円錐平板型回転粘度計によるCasson流体ならびに Herschel-Bulkley流体の流動解析*

益 山 忠¹ 今 井 俊 雄²
高 橋 弘³ 川 島 俊 夫⁴

[UDC 621.6.01]

Cone-and-Plate Viscometry of Casson Fluids and Herschel-Bulkley Fluids

by Tadashi MASUYAMA¹, Toshio IMAI², Hiroshi TAKAHASHI¹ and Toshio KAWASHIMA³

1. Faculty of Engineering, Tohoku University, Aoba-ku, Sendai 980
2. Kawasaki Steel Co.
3. Hachinohe Institute of Technology

Cone-and-plate viscometers are suitable and popular devices for measuring non-Newtonian fluid flow characteristics because the shear rate of fluids in the gap between the cone and the plate is constant and they are easy to operate and commercially available. In this paper, a theoretical analysis of the cone-and-plate viscometer for a Casson model fluid and a Herschel-Bulkley model fluid is presented.

Since the theoretical equations derived are complicated, especially for Herschel-Bulkley model fluid, the first and second approximate expressions of the equations are derived. It is found through the comparison between the theoretically calculated values and the approximates that the first approximate expression is unsuitable for the calculation in the case that the included angle between the cone and the plate is over 2° to keep the relative error between the theoretical values and the approximate ones under 1%.

Moreover, it is confirmed that the second approximate expression is applicable to the calculation in the case that the included angle is up to 4° under the condition in which the relative error is less than 1%.

KEY WORDS: Cone-and-Plate Viscometry, Non-Newtonian Fluid, Casson Fluid, Herschel-Bulkley Fluid

1. は じ め に

円錐平板型回転粘度計においては流体のずり速度が一定となるため、非ニュートン流体の流動特性ならびにその物理定数の測定に適していると一般に言われている^{1)~3)}。また、この粘度計による流体の流動特性の決定方法ならびに擬塑性流体(以下、P流体と記す)およびBingham流体(以下、B流体と記す)の流動解析の基礎式については既に報告がなされている⁴⁾。しかしながら、分散系スラリーの流動特性を良く説明しうるCasson流体(以下、C流体と記す)モデルおよびHerschel-Bulkley流体(以下、H・B流体と記す)モデルの流動解析の基礎式、とりわけ基礎式の近似式に対する円錐と平板との挟角の影響については、報告がなされていない。それゆえ、本研究は、円錐平板回転粘度計によるC流体ならびにH・B流体の物理定数の測定に資するため、これら流体の流動解析の基礎式を提示することを目的とするとともにその近似式の精度と円錐・平板間の挟角との関係を明らかにしようとするものである。なお、円錐平板回転粘度計には、平板を固定し円錐を回転させる型式と円錐を固定し平板を回転させる型式の2型式があるが、本研究においては、心出しが比較的容易であり、かつ、よく用いられている前者の型式を取り上げて論ずることとする。

2. 流動解析の基礎式

円錐平板型回転粘度計によるC流体ならびにH・B流体の流動解析の基礎式を誘導する際に必要な、円錐の角速度 Ω と流動方程式との関係ならびに円錐に働くトルク M については、図1に示す極座標を用い、Okazaki⁴⁾によってそれぞれ式(1)ならびに式(2)のように求められている。

$$\Omega = \int_0^a \sec \Psi f(\tau) d\Psi = \int_0^a \sec \Psi f(K \sec^2 \Psi) d\Psi \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$M = \int_0^a \int_0^{2\pi} r \cos \alpha (\tau)_{\Psi=\alpha} r \cdot dr \cdot d\phi$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{K r^2}{\cos \alpha} dr \cdot d\phi = \frac{2\pi a^3 K}{3 \cos \alpha} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 K は運動方程式の積分定数である。

なお、上式の誘導にあたり、次の仮定が設けられている。

- (i) 流体は非時間依存性非ニュートン流体である。
- (ii) 流体は非圧縮性流体である。
- (iii) 流体の運動は定常層流流れである。
- (iv) 流体に働く体積力は無視しうる。

Fig. 1 Schematic illustration of spherical coordinates in cone and plate viscometer.

* 1989年9月5日受付 1990年3月9日受理

1. 正会員 工博 東北大学助教授 工学部資源工学科
2. 正会員 川崎製鉄(株)
3. 正会員 工博 東北大学助手 工学部資源工学科
4. 正会員 工博 東北大学名誉教授(現 八戸工業大学教授 土木工学科)

キーワード: 円錐平板型回転粘度計, 非ニュートン流体, Casson 流体, Herschel-Bulkley 流体

(v) 流体の運動は回転軸に対して対称性を有する。

(vi) 流体の微小部分は軸に垂直な水平面上にて円運動をする。

(vii) 流体と円錐ならびに平板との間には、すべりが無い。

(viii) 末端効果は無視する。

2・1 Casson 流体の流動解析基礎式

Casson 流体の流動曲線は、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau > \tau_y : \dot{\gamma} &= f(\tau) = (\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_y})^2 / \mu_C \\ \tau \leq \tau_y : \dot{\gamma} &= f(\tau) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式(3)を式(1)に代入し積分を行えば、トルク M の大きさにより、次なる関係を得る。

a) $M \leq 2\pi a^3 \tau_y \cos \alpha / 3$ の場合

$$\Omega = 0 \dots\dots\dots (4)$$

b) $2\pi a^3 \tau_y \cos \alpha / 3 < M \leq 2\pi a^3 \tau_y \sec \alpha / 3$ の場合

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{\Psi_y}^{\alpha} \sec \Psi \frac{1}{\mu_C} (\sqrt{K \sec^2 \Psi} - \sqrt{\tau_y})^2 d\Psi \\ &= \frac{K}{4\mu_C} \left\{ \frac{2 \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{2 \sin \Psi_y}{1 - \sin^2 \Psi_y} + \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \Psi_y}{1 + \sin \Psi_y} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{\tau_y} \sqrt{K}}{\mu_C} (\tan \alpha - \tan \Psi_y) + \frac{\tau_y}{2\mu_C} \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \Psi_y}{1 + \sin \Psi_y} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 Ψ_y は次の関係を満足する値である。

$$\tau_y = K \sec^2 \Psi_y \dots\dots\dots (6)$$

なお、式(5)の第1次近似ならびに第2次近似は、それぞれ次のように表される。

$$\Omega = \frac{K}{\mu_C} (\alpha - \Psi_y) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\tau_y}{K}} \right\}^2 \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{K}{\mu_C} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \Psi_y \left(1 + \frac{\Psi_y^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sqrt{\frac{\tau_y}{K}} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{\alpha^2}{3} \right) - \Psi_y \left(1 + \frac{\Psi_y^2}{3} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_y}{K} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} \right) - \Psi_y \left(1 + \frac{\Psi_y^2}{6} \right) \right\} \right\} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

c) $M > 2\pi a^3 \tau_y \sec \alpha / 3$ の場合

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^{\alpha} \sec \Psi \frac{1}{\mu_C} (\sqrt{K \sec^2 \Psi} - \sqrt{\tau_y})^2 d\Psi \\ &= \frac{K}{4\mu_C} \left\{ \frac{2 \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{\tau_y} \sqrt{K}}{\mu_C} \tan \alpha + \frac{\tau_y}{2\mu_C} \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

なお、式(9)の第1次近似ならびに第2次近似は、それぞれ次のように表される。

$$\Omega = \frac{K}{\mu_C} \alpha \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\tau_y}{K}} \right\}^2 \dots\dots\dots (10)$$

$$\Omega = \frac{K}{\mu_C} \alpha \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{2} - 2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{3} \right) \sqrt{\frac{\tau_y}{K}} + \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} \right) \frac{\tau_y}{K} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 K は式(2)より算出する。

2・2 Herschel-Bulkley 流体の流動解析基礎式

Herschel-Bulkley 流体の流動曲線は、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau > \tau_y : \dot{\gamma} &= f(\tau) = (\tau - \tau_y)^n / \mu_{HB} \\ \tau \leq \tau_y : \dot{\gamma} &= f(\tau) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(1)に代入し積分を行えば、トルク M の大きさにより、次なる関係を得る。

a) $M \leq 2\pi a^3 \tau_y \cos \alpha / 3$ の場合

$$\Omega = 0 \dots\dots\dots (13)$$

b) $2\pi a^3 \tau_y \cos \alpha / 3 < M \leq 2\pi a^3 \tau_y \sec \alpha / 3$ の場合

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{\Psi_y}^{\alpha} \frac{\sec \Psi}{\mu_{HB}} \{ K \sec^2 \Psi - \tau_y \}^n d\Psi \\ &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \int_{\Psi_y}^{\alpha} \sec^{2n+1} \Psi \left\{ 1 - \frac{\tau_y \cos^2 \Psi}{K} \right\}^n d\Psi \\ &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \int_{\Psi_y}^{\alpha} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_j \Psi^{2j}}{(2j)!} \right)^{2n+1} \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{\tau_y}{K} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Psi^{2i}}{(2i)!} \right)^2 \right\}^n d\Psi \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし、 Ψ_y は式(6)を満足する値であり、 E_j は Euler の数^{a)5)}である。また、 n が自然数の場合には、式(14)の定積分は初等関数によって次のように表される。

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \int_{\Psi_y}^{\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r C_r \left(\frac{\tau_y}{K} \right)^r \sec^{2(n-r)+1} \Psi d\Psi \\ &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \sum_{r=0}^n \left[(-1)^r C_r \left(\frac{\tau_y}{K} \right)^r \frac{(2(n-r-1))!!}{(2(n-r))!!} \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin \alpha}{\cos^{2(n-r)} \alpha} \sum_{j=0}^{n-r-1} \left[\frac{(2(n-r)-2j-2)!!}{(2(n-r)-2j-1)!!} \cos^{2j} \alpha \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \Psi_y}{\cos^{2(n-r)} \Psi_y} \sum_{j=0}^{n-r-1} \left[\frac{(2(n-r)-2j-2)!!}{(2(n-r)-2j-1)!!} \cos^{2j} \Psi_y \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \Psi_y}{1 + \sin \Psi_y} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

なお、式(14)の第1次近似ならびに第2次近似は、それぞれ次のように表される。

$$\Omega = \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \alpha \left(1 - \frac{\Psi_y}{\alpha} \right) \left(1 - \frac{\tau_y}{K} \right)^n \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \alpha \left\{ \left(1 + \frac{2n+1}{6} \alpha^2 \right) - \frac{\Psi_y}{\alpha} \left(1 + \frac{2n+1}{6} \Psi_y^2 \right) \right\} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\tau_y}{K} \right)^n + \frac{n \alpha^2 (1 - (\Psi_y / \alpha)^3)}{3} \frac{\tau_y}{K} \left(1 - \frac{\tau_y}{K} \right)^{n-1} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

c) $M > 2\pi a^3 \tau_y \sec \alpha / 3$ の場合

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^{\alpha} \frac{\sec \Psi}{\mu_{HB}} (K \sec^2 \Psi - \tau_y)^n d\Psi \\ &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \int_0^{\alpha} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_j \Psi^{2j}}{(2j)!} \right)^{2n+1} \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{\tau_y}{K} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Psi^{2i}}{(2i)!} \right)^2 \right\}^n d\Psi \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

また、 n が自然数の場合には、式(18)の定積分は初等関数によって次のように表される。

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \sum_{r=0}^n \left[(-1)^r C_r \left(\frac{\tau_y}{K} \right)^r \frac{(2(n-r-1))!!}{(2(n-r))!!} \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin \alpha}{\cos^{2(n-r)} \alpha} \sum_{j=0}^{n-r-1} \left[\frac{(2(n-r)-2j-2)!!}{(2(n-r)-2j-1)!!} \cos^{2j} \alpha \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

なお、式(18)の第1次近似ならびに第2次近似は、それぞれ次のように表される。

$$\Omega = \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \alpha \left(1 - \frac{\tau_y}{K} \right)^n \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{K}{\mu_{HB}} \right)^n \alpha \left\{ \left(1 + \frac{2n+1}{6} \alpha^2 \right) \left(1 - \frac{\tau_y}{K} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{n \alpha^2 \tau_y}{3 K} \left(1 - \frac{\tau_y}{K} \right)^{n-1} \right\} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

以上、円錐回転式の場合について述べたが、平板回転式の場合にも同様な結果が得られる。なお、下記の点を考慮すれば、型式

$$a) E_j = \frac{(2j)! 2^{2j+2}}{\pi^{2j+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^{2j+1}}$$

的に上述の式をそのまま利用できる。すなわち、平板回転式の場合には、式(2)における被積分関数は、 $r^2(\tau)w=0$ であることから、平板に働くモーメント M' は $2\pi a^3 K/3$ となる。従って、型的に $M'=M\cos\alpha$ として取り扱えば、上述の式はそのまま利用できる。

3. 解析値と近似値との比較検討

円錐平板型回転粘度計によるC流体ならびにH・B流体の流動解析の基礎式ならびにそれらの近似式を2章において示したが、同章において示したようにH・B流体の場合にはレオロジー定数 n の値が自然数でない限り、基礎式は切関数で表しえない。それゆえ、本章ではレオロジー定数 n の値が自然数の場合について基礎式による値と近似式による値とを比較し、近似式の精度を評価することにする。また、本章では、流動解析の主なる状態である回転粘度計内の流体が完全に流動している場合についてこれらの値の比較検討を行う。すなわち、2・3節ならびに2・4節におけるc)の場合について比較検討を行うことにする。なお、比較の際には、基礎式ならびに近似式による計算値を解析値 TH ならびに近似値 AP と記し、次式に示す相対誤差を用いることにする。

$$\phi_1 = (TH - AP1) / TH \quad \text{..... (2)}$$

$$\phi_2 = (TH - AP2) / TH \quad \text{..... (3)}$$

ここに、 TH 、 $AP1$ ならびに $AP2$ は解析値、第1次近似値ならびに第2次近似値をそれぞれ表す。

Fig. 2 TH : theoretical value;
 $AP1$: first approximation value;
 $AP2$: second approximation value
Dependence of $\phi_1 (= (1-AP1/TH))$
and $\phi_2 (= (1-AP2/TH))$ on τ_y/K
for various values of angle α for
Casson model fluids.

Table 1 Symbols in figures.

α°	1	2	3	4	5
Approx.					
First	○	△	□	▽	◇
Second	○	△	□	▽	◇

図2は、C流体の ϕ_1 および ϕ_2 と τ_y/K との関係を挟角 α をパラメータとして図示したものである。なお、図中の記号は表1に示す記号と対応している。同図に示される範囲においては、第1次近似で相対誤差を1%以内に押さえるとするならば、挟角 α を3度以下にする必要があり、また、相対誤差を0.1%以内にするためには、 α は1度以内にしなければならない。一方、第2次近似を使用すれば、 α が5度であっても相対誤差は0.1%以内であることが分かる。

図3は、降伏値が零であるH・B流体すなわち、H・B流体の特別な場合の流体と考えられるP流体について ϕ_1 および ϕ_2 とレオロジー定数 n との関係を挟角 α をパラメータとして図示したものである。同図に示されるように、この場合にも図2に示したC流体の場合と同様のことが言える。

図4は、レオロジー定数 n の値が1であるH・B流体、すなわち、H・B流体の特別な場合の流体と考えられるB流体について、図2に示したC流体と同様な関係として図示したものである。同図に示される範囲においては、相対誤差を1%以内に押さえるには、第1次近似では挟角 α を4度以下にする必要がある。

図5は、レオロジー定数 n の値が2であるH・B流体について、図2の場合と同様な関係として示したものである。同図に示されるように、相対誤差を1%以内にするためには、第1次近似では挟角 α を3度以下にする必要がある。

図6は、レオロジー定数 n の値が10であるH・B流体について図5の場合と同様に示したものである。同図に示されるように、挟角 α が2度以上では、第1次近似では1%以内に抑えることができないことが分かる。また、第2次近似を用いても挟角 α が5度の場合には相対誤差は1%を超えることが分かる。

図7は、 τ_y/K が0.5である場合、H・B流体の ϕ_1 および ϕ_2 と n との関係について、挟角をパラメータとして図示したものである。同図に示されるように、1%以下に抑えるには第1次近似

Fig. 3 Dependence of ϕ_1 and ϕ_2 on n
for various values of α for
pseudo-plastic fluids.

Fig. 4 Dependence of ϕ_1 and ϕ_2 on
 τ_y/K for various values of α for
Bingham plastic fluids.

Fig. 5 Dependence of ϕ_1 and ϕ_2 on τ_y/K for Herschel-Bulkley model fluids. Sample calculation is made for $n = 2$.

Fig. 6 Dependence of ϕ_1 and ϕ_2 on τ_y/K for Herschel-Bulkley model fluids. Sample calculation is made for $n = 10$.

Fig. 7 Dependence of ϕ_1 and ϕ_2 on τ_y/K for Herschel-Bulkley model fluids. Sample calculation is made for $\tau_y/K = 0.5$.

では挟角が2度以下である必要がある。

以上、H・B流体についてはレオロジー定数 n の値が自然数である場合について理論値と近似値との比較を行ったが、被積分関数が積分範囲において連続であることからレオロジー定数の値が自然数以外の場合にも近似式は同程度の精度を有していると考えられる。

4. む す び

円錐平板回転粘度計によるC流体ならびにH・B流体の流動解析に資するため、これら流体の流動解析の基礎式について検討した。その結果、次のことが結論として得られた。

1. C流体の流動解析の基礎式として、式(4)、式(5)、式(9)を求めた。また、これらの式の第1次近似式ならびに第2次近似式として式(7)および式(8)ならびに式(10)および式(11)をそれぞれ求めた。

2. H・B流体の流動解析の基礎式として式(13)、式(14)ならびに式(19)を求めた。また、これらの式の第1次近似式および第2次近似式として、式(16)および式(17)ならびに式(20)および式(21)をそれぞれ求めた。さらに、H・B流体の基礎式は、この流体モデルの特別な場合としてP流体($\tau_y = 0$)ならびにB流体($n = 1$)の基礎式を包括している。

3. 第1次近似式を用いて流動解析をする場合、挟角 α が2度以上の場合には誤差が1%を超える場合があることが分かった。また、第2次近似を用いれば、挟角 α が4度以下であれば、誤差を1%以内に抑えることができる。

終りに、本研究を遂行するにあたり、有益な助言を頂きました東北大学教授故野田佳六先生に深く感謝申上げる。

なお、本研究の一部は文部省科学研究費によったことを付記し謝意を表する。

主 な 記 号

a : 円錐半径	[m]
K : 定数	[Pa]
M : トルク	[N・m]
n : レオロジー定数	[-]
P : 圧力	[Pa]
V : 速度	[ms ⁻¹]
α : 挟角	[Rad]
$\dot{\gamma}$: りり速度	[s ⁻¹]
θ : 角度	[Rad]
μ : 粘度	[Pa・s]
τ : せん断応力	[Pa]
ϕ : 相対誤差	[-]
$\Psi = \pi/2 - \theta$	[Rad]
Ω, ω : 角速度	[Rad・s ⁻¹]
添 字	
C : Casson	
HB : Herschel-Bulkley	
y : 降伏	

参 考 文 献

- 1) 中川鶴太郎・神戸博太郎：レオロジー，188～189，(1967)，みすず書房，(東京)
- 2) Bogue, D. C. & White, J. L.: レオロジーの理論と応用—非ニュートン流体の工学的解析(三石，山中共訳)，23～24，(1972)，工業調査会(東京)
- 3) 小野木重春：化学者のためのレオロジー，31～33，(1985)，化学同人，(京都)
- 4) Oka, S. & Takami, A.: Japan J. Appl. Phys. 6, 258, (1967); 岡小天：レオロジー—生物レオロジー—，135，(1976)，裳華房(東京)
- 5) 森口ら：数学公式Ⅱ，138，(1979)，岩波書店(東京)