論文

等価体積欠損法に基づく亀裂性岩盤の 三次元変形性評価法*

田 中 義 晴¹ エドゥアルド ヴェルデハ² 金子勝比古³

A Method to Evaluate the Three Dimensional Deformability of Jointed Rock Based on EVDM

by Yoshiharu TANAKA¹, Eduardo VERDEJA² and Katsuhiko KANEKO³

1. Nishimatsu Construction Co., Ltd

2. Graduate school of Engineering, Kumamoto University

3. Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto 860

Deformation behavior of rockmass is strongly affected by the geometrical and mechanical properties of discontinuities, i. e. joint. Equivalent Volume Defect Method (EVDM) is one of useful methods to estimate the effective compliance of the material which contains distributed cracks. However, the application of EVDM is limited in the two dimensional problem.

In this paper, EVDM is extended, as it can apply to the three dimensional deformation analysis of jointed rock. Rock joints are assumed to be distributed circular disk cracks. The mechanical behavior of a circular disk crack has been theoretically analyzed. Equivalent Volume Defect (EVD) for a circular disk crack is formulated in two cases, i. e. crack is open or closed. It is shown that the expression of EVD for cracks can be simplified in the case of random distributed cracks. By comparing the results obtained by the proposed method to those by theoretical analysis, it is confirmed that the proposed method gives a good approximation of three dimensional and anisotropic elasticity of the material containing distributed cracks.

KEY WORDS: Discontinuous Rock, Crack, Three Dimensional Analysis, Anisotropic Elasticity, Nonlinear Deformation

1. 緒 言

大規模岩盤構造物の設計においては、空洞掘削に伴う岩盤変形と周囲岩盤の応力状態の的確な予測が不可欠である。一般に、中硬岩あるいは硬岩以上の岩盤の力学特性は岩盤内の亀裂の挙動に密接に関係していることが知られている¹⁾。特に、岩石・岩盤の力学的挙動に影響を与える亀裂因子としては亀裂の数、大きさ、方向性、幾何学的配置とともに亀裂の開閉状態、せん断特性などを挙げる事ができる。また、岩石の非線形変形挙動は内部に存在する亀裂の力学的挙動、つまり開口亀裂の開閉と、閉合亀裂の摩擦すべり特性に起因すると解釈されている²⁾。したがって、これら内部亀裂の力学挙動を合理的に表現することができれば、亀裂の量、方向性、力学特性などの基礎情報から岩石・岩盤の構造としての変形挙動を予測することが可能となると思われる。

最近、金子らは等価体積欠損の概念に基づいて、開口亀裂および閉合亀裂を有する岩盤の有効コンプライアンスを簡単かつ合理的に

予測する手法、等価体積欠損法を提案している³⁾⁴⁾。また、筆者らは、増分形式の等価体積欠損法の定式化を行い、これによる岩盤の非線形変形挙動の解法を明らかにしている⁵⁾⁶⁾。しかし、以上の研究は、二次元問題に對象が限定されており、現実の岩盤、すなわち、三次元問題に対する等価体積欠損法の定式化およびその適用性は未だ明らかにされていない。

本論文では、上記の等価体積欠損法を三次元問題に拡張するとともに、数値計算例に基づいてその実用性を確認する。具体的には、まず、等価体積欠損法の概要を紹介した後、三次元問題について、亀裂の非線形変形挙動を考慮した増分形式の等価体積欠損法の定式化を行う。また、亀裂の空間分布が一様な場合および、非一様な場合のそれぞれについて等価体積欠損の算定法を明らかにする。さらに、いくつかの数値計算例を示すと同時にそれらを理論計算値と比較し、本手法の妥当性を明らかにする。

2. 二次元等価体積欠損法の概要

等価体積欠損法は、亀裂をそれと等価な体積の欠損として表現して亀裂性材料の変形性を近似評価する方法であり⁵⁾⁶⁾、二次元亀裂性材料における応力ひずみ関係式を次式で与えている。

$$\Delta \epsilon = D \Delta \sigma \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\Delta \epsilon = (\Delta \epsilon_{11}, \Delta \epsilon_{22}, \Delta \epsilon_{12} + \Delta \epsilon_{21})^t \quad \dots \dots \dots (2)$$

* 1993年12月24日受付 1994年7月25日受理

1. 正会員 西松建設(株)技術研究所

2. 熊本大学大学院

3. 正会員 工博 熊本大学助教授 工学部材料開発工学科

キーワード: 不連続性岩盤, 亀裂, 三次元解析, 異方弾性, 非線形変形

$$\Delta \sigma = (\Delta \sigma_{11}, \Delta \sigma_{22}, \Delta \sigma_{12})^t \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$D = c_1(R + \Omega) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & c_2 - 1 & -1 \\ c_2 - 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} V/(V - \tilde{\omega}_{11}) & V/(V - \tilde{\omega}_{12}) & V/(V - \tilde{\omega}_{13}) \\ V/(V - \tilde{\omega}_{21}) & V/(V - \tilde{\omega}_{22}) & V/(V - \tilde{\omega}_{23}) \\ V/(V - \tilde{\omega}_{31}) & V/(V - \tilde{\omega}_{32}) & c_3 V/(V - \tilde{\omega}_{33}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 V は材料の体積、 c_1, c_2, c_3 は材料実質部のヤング率およびポアソン比により定まる定数である。また、式中の $\tilde{\omega}_{ij}$ は亀裂群に対する等価体積欠損であり、次の2つの仮定に基づいてその定式化がなされている。仮定(I)個々の亀裂の等価体積欠損は、他のものとは独立に決定される。仮定(II)全体の等価体積欠損は個々の亀裂の等価体積欠損の和集合として求められる。仮定(I)は、個々の亀裂の等価体積欠損が良く知られた単一亀裂の問題の解⁷⁾ から算定されることを示している。また、仮定(II)は等価体積欠損が亀裂の存在による免圧圏に対応するという物理的考察に基づいて、亀裂相互干渉の力学的効果を近似表現するものである。金子らは仮定(I)に基づき、単一の亀裂を有する二次元無限弾性体に無限遠から一様な応力が作用する場合のエネルギー関係式から、亀裂存在に起因したひずみ増分を求め、これにより単一亀裂に対する等価体積欠損を算定している。次に、仮定(II)に基づいて、単一亀裂に対する等価体積欠損の和集合演算により亀裂群の等価体積欠損を与えると同時に、これを式(1)に適用して亀裂群を有する材料の有効コンプライアンスを算定し、その結果が比較的良効な近似解を与えることを明らかにしている。そこで、本論文においても、同様な基本仮定を前提として、三次元問題に対する定式化を試みる。すなわち、岩盤内亀裂を円板状亀裂として理想化し、三次元弾性体中に単一の開口円板状亀裂または閉合円板状亀裂が存在するそれぞれの場合の等価体積欠損の算定法について検討を加える。

3. 単一円板状亀裂を有する材料の応力ひずみ関係

3・1 解析モデル

Fig. 1 に示すように、亀裂半径 a 、亀裂面の法線ベクトル n_j の円板状亀裂を有する体積 V の弾性体中に応力 σ_{ij}^0 が作用している場合を考える。特に、亀裂半径 a は弾性体の寸法に比較して十分に小さく、亀裂の力学的挙動は無限弾性体中に存在する場合の解で近似されるものとする。また、弾性体実質部は、ヤング率 E およびポアソン比 ν で表わされる均質等方弾性体とする。亀裂状態としては亀裂面が開口および閉合しているそれぞれの場合を考えるが、特

Fig. 1 Definition of stress and geometry of a circular disk crack.

に、閉合状態の亀裂相対面間の摩擦特性に関しては、摩擦係数を μ とおき粘着力項を無視することとした。なお、本解析では引張を正とする。いま、この弾性体に、Fig. 1 に示すような応力増 $\Delta \sigma_{ij}$ が付加された場合を考えると、応力増分 $\Delta \sigma_{ij}$ に対するひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{ij}$ は、亀裂を有さない場合に生ずるひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ と亀裂の存在に起因したひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ の和で与えられる。

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^c \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ は弾性体実質部のコンプライアンスを λ_{ijkl}^0 とおくと $\Delta \varepsilon_{ij}^e = \lambda_{ijkl}^0 \Delta \sigma_{kl}$ で与えられる。また、 $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ は、開口円板状亀裂と閉合円板状亀裂のそれぞれの条件下で異なるため、以下では開口円板状亀裂および閉合円板状亀裂それぞれの場合について $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ の評価式を示すこととする。

3・2 開口円板状亀裂に対するひずみ増分

線形破壊力学に基づく、開口円板状亀裂を有する弾性体のひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ は式(8)で与えられる。

$$\Delta \varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{V} \frac{\partial \Delta W_c}{\partial \Delta \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 ΔW_c は、単一の開口円板状亀裂を有する弾性体に応力 $\Delta \sigma_{ij}$ が作用した場合の亀裂の存在に起因したコンプリメンタルエネルギーの増分であり、式(9)で与えられる⁷⁾。

$$\Delta W_c = \frac{1 - \nu^2}{E} \int_0^A \left(K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 - \nu} \right) dA \quad \dots\dots (9)$$

ここに、 A は亀裂の面積、また、 K_I, K_{II} および K_{III} はそれぞれ亀裂のモード I、モード II およびモード III の応力拡大係数であり、円板状亀裂に対しては次式で与えられる⁷⁾。

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{2}{\pi} \Delta \sigma_{33} \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \frac{4 \cos \theta}{\pi(2 - \nu)} \Delta \sigma_{32} \sqrt{\pi a} + \frac{4(1 - \nu) \sin \theta}{\pi(2 - \nu)} \Delta \sigma_{31} \sqrt{\pi a} \\ K_{III} &= \frac{4(1 - \nu) \sin \theta}{\pi(2 - \nu)} \Delta \sigma_{32} \sqrt{\pi a} + \frac{4 \cos \theta}{\pi(2 - \nu)} \Delta \sigma_{31} \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $\Delta \sigma_{ij}'$ は亀裂の法線方向を x_3' 軸とした局所座標系(0 - x_1', x_2', x_3')上の応力であり、応力増分 $\Delta \sigma_{ij}$ を局所座標系上に変換して式(11)で与えられる。

$$\Delta \sigma_{ij}' = d_{ki} d_{jl} \Delta \sigma_{kl} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 d_{ij} は、絶対座標系(0 - x_1, x_2, x_3)と局所座標系(0 - x_1', x_2', x_3')との方向余弦である。したがって、 $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ は式(8)を $\Delta \sigma_{ij}'$ で偏微分することにより式(12)で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij}^c &= \frac{16}{3} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{a^3}{V} \{ d_{i3} d_{j3} d_{k3} d_{l3} \Delta \sigma_{kl} \\ &\quad + \frac{2}{2 - \nu} (d_{i3} d_{j1} d_{k3} d_{l1} \Delta \sigma_{kl} \\ &\quad + d_{i3} d_{j2} d_{k3} d_{l2} \Delta \sigma_{kl}) \} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで、式(13)の関係を考慮して、式(12)を整理すると式(14)となる。

$$(n_1, n_2, n_3) = (d_{13}, d_{23}, d_{33}) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^c = \omega^m \eta_{ijkl} / (VE) \cdot \Delta \sigma_{kl} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ijkl} &= n_i n_k [n_j n_l + c^*_2 (\delta_{jl} - n_j n_l)] \\ \omega^m &= 4/3 \cdot c^*_1 a^3 \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし、 $c^*_1 = 4(1 - \nu^2)$ 、 $c^*_2 = 2/(2 - \nu)$ 、 δ_{jl} はクロネッカーのデルタである。

3・3 閉合円板状亀裂に対するひずみ増分

亀裂面が閉合している場合には、亀裂面に作用する直応力とせん断応力の関係により、亀裂相対面間の摩擦すべりを考慮する必要がある。まず、 $\Delta \sigma_{ij}$ を局所座標系(0 - x_1', x_2', x_3')に変換すると、

(a) Description on the 3 axes (τ_{32} τ_{31} σ_{33}). (b) Stresses projected on the plane normal to the axis (σ_{33}).

Fig. 2 Change of stress acting on the face of closed crack. Where, σ_{33} is the stress acting normal to the crack face, and those acting parallel to the crack face.

(a) Description on the 3 axes (τ_{32} τ_{31} σ_{33}). (b) Stresses projected on the plane normal to the axis (σ_{33}).

Fig. 3 Change of stress acting on the face of closed crack. Where, σ_{33} is the stress acting normal to the crack face, and those acting parallel to the crack face.

$\Delta\sigma_{ij}' = d_{ki} d_{lj} \Delta\sigma_{kl}$ となる。ここで、初期状態 ($\Delta\sigma_{ij}$ 負荷前) で亀裂面上に作用していた直応力 σ^f および摩擦抵抗力 (せん断応力) τ_{31}^f , τ_{32}^f を考え、これらを亀裂面上の初期応力と呼ぶことにする。ただし、 σ^f , τ_{31}^f , τ_{32}^f は過去の応力履歴に依存するため、 σ_{ij}^0 とは独立な諸量である点に注意されたい。亀裂面上の応力状態は応力増分 $\Delta\sigma_{ij}'$ と亀裂面上の初期応力の和として与えられるため、応力増分に伴う閉合円板状亀裂の力学的挙動は次の2種のケースに分類される。

$$\begin{aligned} \text{(I)} & (\tau_{31}^f + \Delta\sigma_{31}')^2 + (\tau_{32}^f + \Delta\sigma_{32}')^2 > \{\mu(\sigma^f + \Delta\sigma_{33}')\}^2 \\ & \text{and } \sigma^f + \Delta\sigma_{33}' \leq 0 \\ \text{(II)} & (\tau_{31}^f + \Delta\sigma_{31}')^2 + (\tau_{32}^f + \Delta\sigma_{32}')^2 \leq \{\mu(\sigma^f + \Delta\sigma_{33}')\}^2 \\ & \text{and } \sigma^f + \Delta\sigma_{33}' \leq 0 \end{aligned}$$

なお、これらの場合の亀裂面上の応力の変化を図示すると Fig. 2, 3 のようであり、特に、両図の(b)は、それぞれ σ_{33}' 軸に垂直な面に投影したものである。すなわち、Fig. 2 は Case (I) に対応し、Fig. 3 は Case (II) に対応する。図中の点 A および B は、それぞれ、応力増分 $\Delta\sigma_{ij}'$ 負荷前後の亀裂面上の応力を示している。すなわち、Case (I) は亀裂相対面間で摩擦すべりが生ずる場合、Case (II) は亀裂相対面間のすべりが摩擦力により拘束される場合に対応する。特に、Case (II) においては、弾性体は亀裂を有さない場合と同様な変形挙動を示すため $\Delta\epsilon_{ij}^c = 0$ となる。また、この場合の $\Delta\sigma_{ij}'$ 負荷後の亀裂面上の応力は $(\sigma^f + \Delta\sigma_{33}', \tau_{31}^f + \Delta\sigma_{31}', \tau_{32}^f + \Delta\sigma_{32}')$ となる。したがって、以下では、Case (I) が成立する場合

Fig. 4 Stress change on the face of closed cracks with the frictional sliding.

合を検討対象とする。

Fig. 2 (a), (b) に示すように、応力増分 $\Delta\sigma_{ij}'$ の負荷後の亀裂面上の応力は点 B' に移行し、その値を $(\tau_{31}^*, \tau_{32}^*)$ とすると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\tau_{31}^*)^2 + (\tau_{32}^*)^2} \\ & = \mu(\sigma^f + \Delta\sigma_{33}') \\ & \frac{\tau_{32}^*}{\tau_{31}^*} = \frac{\tau_{32}^f + \Delta\sigma_{32}'}{\tau_{31}^f + \Delta\sigma_{31}'} = \tan \beta \end{aligned} \quad \text{..... (16)}$$

よって、式(16)より摩擦すべり後の亀裂面上のせん断応力 $(\tau_{31}^*, \tau_{32}^*)$ は式(17)で与えられ、過剰せん断力は B'B となる。

$$\begin{aligned} \tau_{31}^* & = \cos \beta \cdot \mu(\sigma^f + \Delta\sigma_{33}') \\ \tau_{32}^* & = \sin \beta \cdot \mu(\sigma^f + \Delta\sigma_{33}') \end{aligned} \quad \text{..... (17)}$$

すなわち、摩擦すべりは、過剰せん断力により生ずるため、そのすべりの方向も過剰せん断力の方向として定められることになる。したがって、すべりの方向を局所座標系 $(0 - x_1', x_2', x_3')$ 上の単位ベクトル $\mathbf{m}'$ で表わすと $\mathbf{m}'$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{m}' = (\cos \beta, \sin \beta, 0) \quad \text{..... (18)}$$

また、 $\mathbf{m}'$ を原座標系上に投影したものを $\mathbf{m}$ とおくと、次式で与えられる。

$$\mathbf{m}_i = d_{ij} m_j' \quad \text{..... (19)}$$

式(19)より摩擦すべりの方向が定まるので、 σ_{ij}^0 , $\Delta\sigma_{ij}$ を、すべり方向を x_2'' 軸、亀裂法線方向を x_3'' 軸とする局所座標系 $(0 - x_1'', x_2'', x_3'')$ 上に変換することを考える。この座標変換の方向余弦は、亀裂面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ および摩擦すべり方向の単位ベクトル $\mathbf{m}$ を用いて、次式で与えられる。

$$\{d_{ij}'\} = \begin{Bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{Bmatrix} \quad \text{..... (20)}$$

ここで、 $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ である。この局所座標系では x_2'' 軸が過剰せん断力の主軸となるため、せん断応力の $3''1''$, $1''3''$ 成分は、恒等的に 0 となる。したがって、局所座標系 $(0 - x_1'', x_2'', x_3'')$ 上では、過剰せん断力としては、 $3''2''$, $2''3''$ 成分のみを考えればよい。また、当然のことながら、局所座標系 $(0 - x_1'', x_2'', x_3'')$ 上と $(0 - x_1', x_2', x_3')$ 上とで亀裂面に対する直応力は相等しい。よって、この局所座標系 $(0 - x_1'', x_2'', x_3'')$ 上では亀裂面上応力として直

応力成分とせん断応力 $3^{\circ}2^{\circ}$ 成分のみを考えればよい。そこで、初期応力状態(σ_{ij}^0 作用下)における亀裂面上の直応力成分とせん断応力 $3^{\circ}2^{\circ}$ 成分をそれぞれ σ^f ($=\sigma^f$)および τ^f と表わすと、応力増分 $\Delta\sigma_{ij}$ が付加された場合の閉合円板状亀裂の摩擦すべり条件は次のように書き換えられる。

$$|\tau^f + \Delta\sigma_{32}| > \mu |\sigma^f + \Delta\sigma_{33}| \quad \text{and} \quad \sigma^f + \Delta\sigma_{33} \leq 0 \quad (21)$$

なお、上式の場合の亀裂面上の応力変化を図示すると、Fig. 4 のようである。

以上の前提のもとに、応力 $\Delta\sigma_{ij}$ を式(22)で表わせるような2組の応力 $\Delta\sigma_{ij}^u$, $\Delta\sigma_{ij}^s$ に分けて考えてみる。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} &= \Delta\sigma_{ij}^u + \Delta\sigma_{ij}^s \\ \Delta\sigma_{ij}^u &= \Delta\sigma_{ij}'' \quad (ij \neq 2^{\circ}3^{\circ}, 3^{\circ}2^{\circ}) \\ &= -\mu \Delta\sigma_{33}'' \quad (ij = 2^{\circ}3^{\circ}, 3^{\circ}2^{\circ}) \\ \Delta\sigma_{ij}^s &= 0 \quad (ij \neq 2^{\circ}3^{\circ}, 3^{\circ}2^{\circ}) \\ &= \Delta\sigma_{ij}'' + \mu \Delta\sigma_{33}'' \quad (ij = 2^{\circ}3^{\circ}, 3^{\circ}2^{\circ}) \end{aligned} \quad (22)$$

応力増分 $\Delta\sigma_{ij}^u$ はFig. 4のA点からB'点へ移行する応力変化を示し、応力 $\Delta\sigma_{ij}^s$ は、同図のB'Bで示される過剰せん断応力に対応する。すなわち、式(22)は、 $\Delta\sigma_{ij}^u$ の作用下においては、亀裂面に対して応力の連続性が満足されるため、弾性体は亀裂を有さない場合と等価な状態にあることを示している。したがって、亀裂存在に起因したひずみ増分は $\Delta\sigma_{ij}^s$ のみに関係することになる。特に、 $\Delta\sigma_{33}^s = 0$ であることを考慮すると、この場合のひずみ増分は開閉円板状亀裂を有する弾性体に $\Delta\sigma_{23}^s$, $\Delta\sigma_{32}^s$ のみが作用した場合の解として与えられることがわかる。したがって、局所座標系($0-x_1''$, x_2'' , x_3'')上における亀裂に起因したひずみ増分 $\Delta\epsilon_{ij}^{cn}$ は式(23)で与えられる。

$$\Delta\epsilon_{ij}^{cn} = \frac{1}{V} \frac{\partial \Delta W_c}{\partial \Delta\sigma_{ij}^s} \quad (23)$$

また、 ΔW_c は亀裂の存在に起因したコンプリメンタリエネルギーの増分であり、モードII, IIIの応力拡大係数 K_{II} , K_{III} を用いて式(24)で与えられる。

$$\Delta W_c = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^A \left(K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\nu} \right) dA \quad (24)$$

したがって、式(23)、式(24)より $\Delta\epsilon_{ij}^{cn}$ は式(25)で与えられることになる。また、 $\Delta\epsilon_{ij}^{cn}$ を絶対座標系($0-x_1$, x_2 , x_3)上のひずみ増分 $\Delta\epsilon_{ij}^c$ に変換し、式(20)と $\Delta\sigma_{ij}'' = d_{ki}' d_{lj}' \Delta\sigma_{kl}$ の関係を検討すると、 $\Delta\epsilon_{ij}^c$ は式(26)となる。

$$\Delta\epsilon_{ij}^{cn} = \omega^m / V \cdot (\sigma_{32}' \delta_{3i} \delta_{2j} + \sigma_{23}' \delta_{2i} \delta_{3j}) \cdot \Delta\sigma_{32}^s \quad (25)$$

$$\Delta\epsilon_{ij}^c = \omega^m \eta_{ijkl} / (VE) \cdot \Delta\sigma_{kl} \quad (26)$$

ただし、

$$\omega^m = 4/3 \cdot c_3^* a^3 \quad (27)$$

$$\eta_{ijkl} = n_i m_j n_k m_l + n_i m_j n_k n_l \mu + m_i n_j m_k n_l + m_i n_j n_k n_l \mu \quad (28)$$

であり、 $c_3^* = 8(1-\nu^2)a^3/(2-\nu)$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。特に、閉合円板状亀裂の条件は、 $\sigma_0^f + \Delta\sigma_{33}'' \leq 0$ として与えられるため、 $\sigma^f + \Delta\sigma_{33}'' > 0$ となる場合には閉合円板状亀裂が開閉円板状亀裂に移行する。

3・4 等価体積欠損に基づく応力・ひずみ関係の定式化

応力増分 $\Delta\sigma_{ij}$ およびひずみ増分 $\Delta\epsilon_{ij}$ をベクトル表記すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma_I\} &= \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \Delta\sigma_4, \Delta\sigma_5, \Delta\sigma_6\} \\ &= \{\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}, \Delta\sigma_{33}, \Delta\sigma_{23}(=\Delta\sigma_{32}), \Delta\sigma_{13} \\ &\quad (= \Delta\sigma_{31}), \Delta\sigma_{12}(=\Delta\sigma_{21})\} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\Delta\epsilon_I\} &= \{\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \Delta\epsilon_3, \Delta\epsilon_4, \Delta\epsilon_5, \Delta\epsilon_6\} \\ &= \{\Delta\epsilon_{11}, \Delta\epsilon_{22}, \Delta\epsilon_{33}, \Delta\epsilon_{23} + \Delta\epsilon_{32}, \Delta\epsilon_{13} + \\ &\quad \Delta\epsilon_{31}, \Delta\epsilon_{12} + \Delta\epsilon_{21}\} \quad (30) \end{aligned}$$

同様に、コンプライアンステンソルをマトリックス表記して D_{IJ}^* と表わすと、 $\Delta\sigma_I$ と $\Delta\epsilon_I$ の関係は、式(31)で与えられる。

$$\Delta\epsilon_I = D_{IJ}^* \cdot \Delta\sigma_J \quad (31)$$

また、コンプライアンスマトリックス $\{D_{IJ}^*\}$ を2つのマトリックス、亀裂の影響を表わす $\{\Omega_{IJ}\}$ と定数項からなる $\{R_{IJ}\}$ に分解する。

$$\{D_{IJ}^*\} = 1/E \cdot (\{R_{IJ}\} + \{\Omega_{IJ}\}) \quad (32)$$

ここで、亀裂寸法が弾性体寸法に比較して十分小さい($\omega^m \ll V$)と仮定して、式 $\{R_{IJ}\}$ と $\{\Omega_{IJ}\}$ をそれぞれ式(33)と(34)で表わすことにする。

$$\begin{aligned} \{R_{IJ}\} &= 0 \quad (I=J) \\ &= -\nu-1 \quad (I, J < 4 \text{ and } I \neq J) \\ &= -1 \quad (\text{others}) \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\Omega_{IJ}\} &= 1/(1-\omega_{IJ}^m/V) \quad (I=J, IJ \neq 44, 55, 66) \\ &= c^*_4/(1-\omega_{IJ}^m/V) \quad (I=J, IJ = 44, 55, 66) \\ &= 1/(1-\omega_{IJ}^m/V) \quad (\text{others}) \quad (34) \end{aligned}$$

ただし、 $c^*_4 = 1+\nu$ である。また、 ω_{IJ}^m は式(7), (14), (15)および式(26), (27), (28)を式(31), (32)の形式に書き換え、 $\omega^m \ll V$ の条件を考慮することにより次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \omega_{IJ}^m &= \omega^m \xi_{IJ} \quad (IJ \neq 44, 55, 66) \\ &= \omega^m \xi_{IJ} / c^*_4 \quad (IJ = 44, 55, 66) \quad (35) \end{aligned}$$

ただし、 ξ_{IJ} は η_{ijkl} をマトリックス表記したものであり次式で与えられる。

$$\begin{aligned} i=j, k=l: \xi_{IJ} &= \eta_{iikk} \quad (I=i, J=k) \\ i=j, k \neq l: \xi_{IJ} &= \eta_{iikl} + \eta_{iilk} \quad (I=i, J=9-(k+l)) \\ i \neq j, k=l: \xi_{IJ} &= \eta_{ijkk} + \eta_{jikk} \quad (I=9-(i+j), J=k) \\ i \neq j, k \neq l: \xi_{IJ} &= \eta_{ijkl} + \eta_{jikl} + \eta_{ijlk} + \eta_{jilk} \\ &\quad (I=9-(i+j), J=9-(k+l)) \quad (36) \end{aligned}$$

また、式中の η_{ijkl} は、開閉円板状亀裂の場合は前出式(15)より、また、閉合円板状亀裂の場合は前出式(28)より次のように与えられる。

$$\eta_{ijkl} = n_i n_k [n_j n_l + c^*_2 (\delta_{ji} - n_j n_l)] \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ijkl} &= n_i m_j n_k m_l + n_i m_j n_k n_l \mu \\ &\quad + m_i n_j m_k n_l + m_i n_j n_k n_l \mu \quad (38) \end{aligned}$$

以上の結果をもとにすると、体積 V の弾性体中に N 個の亀裂が存在する場合は、前述した仮定(II)より、マトリックス Ω は式(39)で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\Omega_{IJ}\} &= 1/(1-\bar{\omega}_{IJ}/V) \quad (I=J, IJ \neq 44, 55, 66) \\ &= c^*_4/(1-\bar{\omega}_{IJ}/V) \quad (I=J, IJ = 44, 55, 66) \\ &= 1/(1-\bar{\omega}_{IJ}/V) \quad (\text{others}) \quad (39) \end{aligned}$$

Fig. 5 Schematic diagram to calculate the EVD for uniformly distributed cracks.

式中の $\bar{\omega}_{IJ}$ が、単一亀裂に対する等価体積欠損の和集合演算により算出される亀裂群に対する等価体積欠損であり次式で与えられる。

$$\bar{\omega}_{IJ} = \cup \omega_{IJ}^m \quad (40)$$

ただし、 ω_{IJ}^m は亀裂 m ($m = 1 \sim N$)に対する等価体積欠損を表わす。

4. 亀裂分布が一様な場合の等価体積欠損の算定法と解析例

等価体積欠損法では、問題とする物体について物体内部の個々の亀裂に対して等価体積欠損を算定し、その和集合 $\bar{\omega}_{IJ}$ を算定すれば、その有効コンプライアンスが決定される。ここで、問題とする物体

Fig. 6 Three kinds of cracks used in the model calculation.

Fig. 7 Relation between the crack density ϕ and the diagonal components of effective elastic coefficient C_{II}^* , where E is the young's modulus. Solid and broken line: results of proposed method and New Self Consistent Scheme, respectively.

Fig. 8 Relation between the effective elastic coefficient C_{IJ}^* and dip angle ϕ in the case that the angle θ is 90° and crack density Φ is 0.2.

の体積と亀裂数が十分に大きく亀裂の空間分布が一様である場合には、以下に示すような確率論的取扱いにより亀裂群の $\bar{\omega}_I$ を簡略表現することができる。

体積 V の三次元弾性体中に N 個の亀裂（ここでは体積 V と亀裂数 N が十分に大きいものとする）が一様に分布しているものと仮定する。この条件下で、個々の等価体積欠損と残存体積率との関係を図示すると Fig. 5 のようになる。すなわち、体積 V の弾性体中に亀裂が 1 つある場合 ($m = 1$) の等価体積欠損の体積欠損率は、 ω_I^1/V で与えられ、弾性体の残存体積率が $1 - \omega_I^1/V$ となる。次に、この残存体積率が $1 - \omega_I^1/V$ なる弾性体にもう 1 つ亀裂が付加する場合 ($m = 2$) の残存体積率は、亀裂が 1 つ存在する場合の残存体積率の積で与えられ $(1 - \omega_I^1/V) \cdot (1 - \omega_I^2/V)$ となる。したがって、弾性体中に亀裂が N 個含まれる場合の残存体積率の確率期待値は、亀裂が 1 つある場合の残存体積率の積算形として式 (41) で与えられる。

$$1 - \frac{\bar{\omega}_I}{V} = \prod_{m=1}^N \left(1 - \frac{\omega_I^m}{V}\right) \quad (41)$$

ここで、式中の個々の等価体積欠損 ω_I^m は、前出式 (35) で求められる。式 (41) を前出の式 (33), (39) に適用すると、 Ω , R の各成分は、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \{\Omega_{IJ}\} &= 1/\Pi(1 - \omega_I^m/V) & (I = J, IJ \neq 44, 55, 66) \\ &= c^*_{44}/\Pi(1 - \omega_I^m/V) & (I = J, IJ = 44, 55, 66) \\ &= 1/\Pi(1 - \omega_I^m/V) & (\text{others}) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \{R_{IJ}\} &= 0 & (I = J) \\ &= -\nu - 1 & (I, J < 4 \text{ and } I \neq J) \\ &= -1 & (\text{others}) \end{aligned} \quad (43)$$

したがって、式 (42), (43) を式 (32) に代入することにより D^* が求められることがわかる。すなわち、問題とする弾性体の体積と亀裂数が十分大であり亀裂の空間分布が確率的に一様である場合には、個々の等価体積欠損 ω_I^m から極めて簡単な計算で有効コンプライアンスを求めることができる。

次に、本解法の妥当性の検討を試みるが、等価体積欠損法は亀裂の配向性（亀裂方位分布の任意性）と亀裂相互間の力学的干渉をとにも考慮した近似解法であり、同様な条件下での厳密な解は見あたらないため、まず、この問題に対しての解析的近似解を求める方法

について検討した。その詳細は付録に示し、ここでは、その結果のみを示すことにする。以下では、本法（三次元等価体積欠損法）による解析値と、付録に示す解法（以下 NSCS と呼ぶ）による解析値とを比較検討し、本法の近似精度を明らかにする。Fig. 6 に解析モデルを示す。モデル A は、三次元弾性体中に Fig. 6 (a) に示すような亀裂面法線の経角 θ および緯角 ϕ が $(\theta, \phi) = (90^\circ, 90^\circ)$ の亀裂群が存在する場合である。モデル B は Fig. 6 (a), (b), すなわち、 $(\theta, \phi) = (90^\circ, 90^\circ)$, $(0^\circ, 0^\circ)$ の 2 種類の亀裂群が含まれている場合である。さらに、モデル C は、Fig. 6 (a), (b), (c), すなわち、 $(\theta, \phi) = (90^\circ, 90^\circ)$, $(0^\circ, 0^\circ)$, $(90^\circ, 0^\circ)$ の 3 種類の亀裂群が含まれている場合である。

Fig. 7 (a) ~ (f) は、上記の 3 種類のモデルに対して有効弾性率 C^*_{IJ} の対角成分と亀裂密度 Φ との関係を示したものである。なお、縦軸は C^*_{IJ} を弾性体実質部のヤング率 E で正規化した値で示し、実線が等価体積欠損法の解析値、点線が NSCS（付録参照）による解析値を示している。また、(b), (c) は $(\theta, \phi) = (90^\circ, 90^\circ)$, $(0^\circ, 0^\circ)$ の 2 種類の亀裂群の亀裂密度比が 1:1, および 2:1, の場合であり、(d), (e), (f) は $(\theta, \phi) = (90^\circ, 90^\circ)$, $(0^\circ, 0^\circ)$, $(90^\circ, 0^\circ)$ の 3 種類の亀裂群の亀裂密度比が 1:1:1, 2:1:1, 2:2:1 の場合を示している。図より、 C^*_{IJ} の対角成分 ($I = J$) すべてにおいて、

Fig. 9 Definition of Equivalent Volume Defect ω_I^m for a circular crack.

Table 1 Shape and polarity factor for a open circular crack.

Equivalent volume Defect	Shape factor			Polarity factor
ω_{1j}	k_1	k_2	k_3	k_S
ω_{11}	$ n_1[n_1^2+c_2(1-n_1^2)] \phi$	1	$ n_1 $	+
ω_{22}	$ n_2 $	$ n_2[n_2^2+c_2(1-n_2^2)] \phi$	1	+
ω_{33}	1	$ n_3 $	$ n_2[n_2^2+c_2(1-n_2^2)] \phi$	+
ω_{44}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{44} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{44} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{44} / c_3}$	+
ω_{55}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{55} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{55} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{55} / c_3}$	+
ω_{66}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{66} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{66} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{66} / c_3}$	+
$\omega_{12}(\omega_{21})$	$ n_2 $	$ n_1 $	$ n_1 n_2(1-c_2) \phi$	-
$\omega_{13}(\omega_{31})$	$ n_3 $	$ n_1 n_2(1-c_2) \phi$	$ n_1 $	-
$\omega_{14}(\omega_{41})$	$2 n_1^2(1-c_2) $	$\sqrt{\phi} n_3 $	$\sqrt{\phi} n_2 $	$(1-c_2)n_3 n_2$
$\omega_{15}(\omega_{51})$	$\sqrt{\phi} n_3 $	$ 2n_1^2+c_2(1-2n_1^2) $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$n_1 n_3 [2n_1^2+c_2(1-2n_1^2)]$
$\omega_{16}(\omega_{61})$	$\sqrt{\phi} n_2 $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$ 2n_1^2+c_2(1-2n_1^2) $	$n_1 n_2 [2n_1^2+c_2(1-2n_1^2)]$
$\omega_{23}(\omega_{32})$	$ n_2 n_3(1-c_2) \phi$	$ n_3 $	$ n_2 $	-
$\omega_{24}(\omega_{42})$	$ 2n_2^2+c_2(1-2n_2^2) $	$\sqrt{\phi} n_3 $	$\sqrt{\phi} n_2 $	$n_2 n_3 [2n_2^2+c_2(1-2n_2^2)]$
$\omega_{25}(\omega_{52})$	$\sqrt{\phi} n_3 $	$2 n_2^2(1-c_2) $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$(1-c_2)n_3 n_1$
$\omega_{26}(\omega_{62})$	$\sqrt{\phi} n_2 $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$ 2n_2^2+c_2(1-2n_2^2) $	$n_1 n_2 [2n_2^2+c_2(1-2n_2^2)]$
$\omega_{34}(\omega_{43})$	$ 2n_3^2+c_2(1-2n_3^2) $	$\sqrt{\phi} n_3 $	$\sqrt{\phi} n_2 $	$n_2 n_3 [2n_3^2+c_2(1-2n_3^2)]$
$\omega_{35}(\omega_{53})$	$\sqrt{\phi} n_3 $	$ 2n_3^2+c_2(1-2n_3^2) $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$n_1 n_3 [2n_3^2+c_2(1-2n_3^2)]$
$\omega_{36}(\omega_{63})$	$\sqrt{\phi} n_2 $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$2 n_3^2(1-c_2) $	$(1-c_2)n_2 n_1$
$\omega_{45}(\omega_{54})$	$\sqrt{\phi} n_2 $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$ 4n_3^2(1-c_2)+1 $	$n_1 n_2 [4n_3^2(1-c_2)+1]$
$\omega_{46}(\omega_{64})$	$\sqrt{\phi} n_3 $	$ 4n_2^2(1-c_2)+1 $	$\sqrt{\phi} n_1 $	$n_1 n_3 [4n_2^2(1-c_2)+1]$
$\omega_{56}(\omega_{65})$	$ 4n_2^2(1-c_2)+1 $	$\sqrt{\phi} n_3 $	$\sqrt{\phi} n_2 $	$n_2 n_3 [4n_1^2(1-c_2)+1]$

$$\xi_{44}=4n_2^2 n_3^2(1-c_2)+c_2(n_2^2+n_3^2) ; \xi_{55}=4n_1^2 n_3^2(1-c_2)+c_2(n_1^2+n_3^2) ; \xi_{66}=4n_1^2 n_2^2(1-c_2)+c_2(n_1^2+n_2^2)$$

Table 2 Shape and polarity factor for a closed circular crack with the frictional sliding.

Equivalent volume Defect	Shape factor			Polarity factor
ω_{1j}	k_1	k_2	k_3	k_S
ω_{11}	$2 n_1 m_1(m_1+n_1 \mu f) \phi$	1	$ n_1 $	+
ω_{22}	$ n_2 $	$2 n_2 m_2(m_2+n_2 \mu f) \phi$	1	+
ω_{33}	1	$ n_3 $	$2 n_3 m_3(m_3+n_3 \mu f) \phi$	+
ω_{44}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{44} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{44} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{44} / c_3}$	+
ω_{55}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{55} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{55} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{55} / c_3}$	+
ω_{66}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{66} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{66} / c_3}$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{66} / c_3}$	+
ω_{12}	$ n_2 $	$ n_1 $	$2\phi m_1(m_2+n_2 \mu f) $	$n_1 n_2 m_1(m_2+n_2 \mu f)$
ω_{13}	$ n_3 $	$2\phi m_1(m_3+n_3 \mu f) $	$ n_1 $	$n_1 n_3 m_1(m_3+n_3 \mu f)$
ω_{21}	$ n_2 $	$ n_1 $	$2\phi m_2(m_1+n_1 \mu f) $	$n_1 n_2 m_2(m_1+n_1 \mu f)$
ω_{23}	$2\phi m_2(m_3+n_2 \mu f) $	$ n_3 $	$ n_2 $	$n_2 n_3 m_2(m_3+n_3 \mu f)$
ω_{31}	$ n_3 $	$2\phi m_3(m_1+n_1 \mu f) $	$ n_1 $	$n_1 n_3 m_3(m_1+n_1 \mu f)$
ω_{32}	$2\phi m_3(m_2+n_2 \mu f) $	$ n_3 $	$ n_2 $	$n_2 n_3 m_3(m_2+n_2 \mu f)$
(Others)				
ω_{1j}	$\sqrt[3]{\phi \xi_{1j} }$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{1j} }$	$\sqrt[3]{\phi \xi_{1j} }$	ξ_{1j}

$$\begin{aligned} \xi_{14}=2n_1 m_1 [n_2 m_3+n_3 m_2+2n_2 n_3 \mu f] ; \xi_{15}=2n_1 m_1 [n_3 m_1+n_1 m_3+2n_1 n_3 \mu f] ; \xi_{16}=2n_1 m_1 [n_1 m_2+n_2 m_1+2n_1 n_2 \mu f] \\ \xi_{24}=2n_2 m_2 [n_3 m_3+n_3 m_2+2n_2 n_3 \mu f] ; \xi_{25}=2n_2 m_2 [n_3 m_1+n_1 m_3+2n_1 n_3 \mu f] ; \xi_{26}=2n_2 m_2 [n_1 m_2+n_2 m_1+2n_1 n_2 \mu f] \\ \xi_{34}=2n_3 m_3 [n_2 m_3+n_3 m_2+2n_2 n_3 \mu f] ; \xi_{35}=2n_3 m_3 [n_3 m_1+n_1 m_3+2n_1 n_3 \mu f] ; \xi_{36}=2n_3 m_3 [n_1 m_2+n_2 m_1+2n_1 n_2 \mu f] \\ \xi_{41}=2n_1 (n_2 m_3+n_3 m_2)(m_1+n_1 \mu f) ; \xi_{42}=2n_2 (n_2 m_3+n_3 m_2)(m_2+n_2 \mu f) ; \xi_{43}=2n_3 (n_2 m_3+n_3 m_2)(m_3+n_3 \mu f) \\ \xi_{44}=2[n_2^2 m_3^2+n_3^2 m_2^2+2n_2 n_3 m_2 m_3+2n_2^2 n_3 m_3 \mu f+2n_2 n_3^2 m_2 \mu f] \\ \xi_{45}=2(n_2 m_3+n_3 m_2)(n_3 m_1+n_1 m_3+2n_1 n_3 \mu f) ; \xi_{46}=2(n_2 m_3+n_3 m_2)(n_1 m_2+n_2 m_1+2n_1 n_2 \mu f) \\ \xi_{51}=2n_1 (n_1 m_3+n_3 m_1)(m_1+n_1 \mu f) ; \xi_{52}=2n_2 (n_1 m_3+n_3 m_1)(m_2+n_2 \mu f) ; \xi_{53}=2n_3 (n_1 m_3+n_3 m_1)(m_3+n_3 \mu f) \\ \xi_{54}=2(n_1 m_3+n_3 m_1)(n_2 m_3+n_3 m_2+2n_1 n_3 \mu f) ; \xi_{55}=2[n_1^2 m_3^2+n_3^2 m_1^2+2n_1 n_3 m_3 m_1+2n_1^2 n_3 m_3 \mu f+2n_1 n_3^2 m_1 \mu f] \\ \xi_{56}=2(n_1 m_3+n_3 m_1)(n_1 m_2+n_2 m_1+2n_1 n_3 \mu f) \\ \xi_{61}=2n_1 (n_1 m_2+n_2 m_1)(m_1+n_1 \mu f) ; \xi_{62}=2n_2 (n_1 m_2+n_2 m_1)(m_2+n_2 \mu f) ; \xi_{63}=2n_3 (n_1 m_2+n_2 m_1)(m_3+n_3 \mu f) \\ \xi_{64}=2(n_1 m_2+n_2 m_1)(n_2 m_3+n_3 m_2+2n_1 n_3 \mu f) ; \xi_{65}=2(n_1 m_2+n_2 m_1)(n_1 m_3+n_3 m_1+2n_1 n_3 \mu f) \\ \xi_{66}=2[n_1^2 m_2^2+n_2^2 m_1^2+2n_1 n_2 m_1 m_2+2n_1^2 n_2 m_2 \mu f+2n_1 n_2^2 m_1 \mu f] \end{aligned}$$

等価体積欠損法と NSCS の値がほぼ一致していることがわかる。すなわち、NSCS による解析値を基準とすると、三次元問題においても等価体積欠損法は良好な近似解を与えていることがわかる。

次に、Fig. 8 は亀裂密度を $\phi = 0.2$ 、亀裂経角 $\theta = 90^\circ$ と一定にして亀裂緯角 ϕ を変化した場合の有効弾性率の各成分 C^*_{IJ} を示したものである。ただし、縦軸は、Fig. 7 と同様に正規化してある。なお、Fig. 8 (a) は有効弾性率 C^*_{IJ} の $I \leq 3, J \leq 3, I \leq J$ の各成分、(b) は $I \leq 3, J \geq 4, I \leq J$ の各成分、(c) は $I \geq 4, J \geq 4, I \leq J$ の各成分を示している。図より、等価体積欠損法と NSCS の両者の値は、すべての亀裂緯角 ϕ においてほぼ一致していることがわかる。特に、両者の値に若干の相違は認められるが、本解法の計算の簡便性を考慮すれば、それらは十分許容可能なものであると考えることができる。すなわち、以上の結果から、弾性率の全成分について、本解法（三次元等価体積欠損法）の近似精度を確認することができる。

5. 任意分布の亀裂群に対する等価体積欠損の算定法

亀裂の空間分布に確率的一様性が仮定できない場合、すなわち、任意の亀裂の空間分布を有する亀裂群の等価体積欠損法について考察する。この場合は等価体積欠損 ω_{IJ} の算定における和集合演算を考えると、個々の亀裂に対する等価体積欠損 ω_{IJ}^m の位置と形状を与える必要がある。そこで、ここでは、二次元等価体積欠損法の取り扱いを拡張して、等価体積欠損の欠損領域の形状を Fig. 9 および式(44)に示すような楕円体と仮定する。

$$\omega_{IJ}^m = 4/3 \cdot \pi \cdot k_1 a \cdot k_2 a \cdot k_3 a \cdot \text{sgn}(k_3) \dots \dots \dots (44)$$

なお、 $k_1 a$, $k_2 a$, $k_3 a$ はそれぞれ、 x_1 軸、 x_2 軸、 x_3 軸方向の径である。ここで、式(35)～(38)は単に個々の亀裂の等価体積欠損の体積を与えるものであるため、定数 k_1 , k_2 , k_3 の設定には任意性がある。しかし、等価体積欠損は物理的には亀裂周囲の免圧圏に対応するものであると考えると、 k_1 , k_2 , k_3 は免圧圏形状を大略近似するように与えればよいことになる。このような考えのもとに種々の応力場における亀裂周囲の免圧圏の解析を行い、これに基づいて三次元開口円板状亀裂、閉合円板状亀裂に対する k_1 , k_2 , k_3 をそれぞれ Table 1, 2 に示すように与えてみた。これらの表を用いると個々の亀裂に対する等価体積欠損 ω_{IJ}^m の体積とその幾何形状が算定される。したがって、三次元空間における ω_{IJ}^m ($m = 1 \sim N$) の和集合の体積を求めれば、亀裂群に対する等価体積欠損 ω_{IJ} が算定されることになる。これを式(39)に適用すれば応力ひずみ関係式が与えられる。

上記の手法によれば、亀裂の空間分布を考慮して有効コンプライアンスを算定することが可能となるが、現時点ではその妥当性を検証するための方法が存在しない。そこで、ここでは、簡単なモデルに対して解析の一例を示すにとどめる。解析モデルは、Fig. 10(a), (b) に示す三次元基盤目状配置モデルと三次元千鳥状配置モデルで、すべての亀裂が開口円板状亀裂の場合である。亀裂数は、ともに 96 個であり、亀裂半径 a を一定として、 $\theta = 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$, $b/a =$

Fig. 10 Three dimensional model for jointed rock.

Fig. 11 Relation between the effective young's modulus E^* and crack density ϕ for regular and alternative stacking models.

1.5 の条件で c/a の値を変化させた。この場合の x_3 方向一軸載荷時の有効ヤング率 E^* と亀裂密度 $\phi (= \Sigma a^3/V)$ の関係を Fig. 11 に示した。図より、求められた有効ヤング率 E^* と亀裂密度との関係には亀裂相互干渉の影響とともに亀裂配置の影響が表されていることがわかる。特に、(a) と (b) における有効ヤング率の値の相違は亀裂配置と調和的であることがわかる。

6. 結 言

本論文では、亀裂性岩盤の三次元変形性の近似解法として、三次元等価体積欠損法を提案した。まず、岩盤内亀裂を円板状亀裂として表現し、開口円板状亀裂および閉口円板状亀裂に対する等価体積欠損の定式化を行った。次にこれらの結果を基に、まず、亀裂の空

間分布が一様な場合の等価体積欠損の確率論的算定法について考察し、有効コンプライアンスを極めて簡単な計算で求める方法を提案した。また、提案した手法による解析値を eigen ひずみ理論による解析値と比較検討し、本手法は極めて簡単な計算で、かつ、良好な近似解を与えることを示した。さらに、亀裂の空間分布が非一様な場合を例にとり、等価体積欠損を楕円体領域で与える方法を提案し、これにより、亀裂の配向性のみならず空間配置の影響も表現されることを示した。なお、本論文で提案した手法は三次元有限要素法に容易に適用することが可能である。したがって、これにより異方性・非線形性を考慮して空洞開閉に伴う岩盤の三次元変形挙動を解析することが可能となると思われる。

<付録> eigen ひずみ理論による有効弾性率の評価法

任意の亀裂方位分布の亀裂群を有する弾性体の有効コンプライアンスおよび有効弾性率を解析的に求める手法について概説する。ただし、亀裂はすべて半径 a の開口円板状亀裂であり、空間的に一様に分布してのものと仮定する。

前出式(7)を応力 σ_{kl} で偏微分すると亀裂を有する弾性体の有効弾性コンプライアンス λ^*_{ijkl} の評価式が求められる。

$$\lambda^*_{ijkl} = \lambda^0_{ijkl} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 \Delta W_c}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \quad (A1)$$

ただし、 λ^0_{ijkl} は弾性体実質部の弾性コンプライアンスであり、 V および ΔW_c は前出と同様に弾性体の体積および亀裂存在に起因したコンプリメンタリエネルギー増分である。式(A1)は単一の亀裂に対して誘導されたものであるが、亀裂が複数存在する場合でも、亀裂密度が充分小であれば、適用可能なものである。なお、このような場合は、個々の亀裂を無限弾性体中の単一亀裂として取り扱い、それらの亀裂のコンプリメンタリエネルギーの総和として式(A1)の ΔW_c を与えることになる。しかし、亀裂が複数存在し、かつ、亀裂密度が比較的大きな場合には、亀裂相互の力学的干渉効果の影響を無視することはできない。このような場合の有効弾性コンプライアンスの近似解法として Self Consistent Scheme⁸⁾ (以下 SCS と略す) や New Self Consistent Scheme⁹⁾ (以下 NSCS と略す) が提案されているが、特に、解の信頼性から NSCS が有力な手法であると考えられている。NSCS は、亀裂密度が充分小であれば個々の亀裂を無限弾性体中の単一亀裂として取り扱うことが可能であるとの前提にたち、次式に示す逐次計算により λ^*_{ijkl} を算定する方法である。

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{n+1}_{ijkl} &= \lambda^n_{ijkl} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 W_c(\lambda^n_{ijkl}, \Delta\Phi)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \\ \lambda^*_{ijkl} &= \lambda^N_{ijkl} \end{aligned} \right\} \quad (A2) \quad (n=1 \sim N)$$

ただし、 $\Delta\Phi$ は亀裂密度の増分であり、全亀裂密度と計算ステップ数 N により、 $\Delta\Phi = \Phi/N$ と与えられる。また、 $W_c(\lambda^{n-1}_{ijkl}, \Delta\Phi)$ は、弾性コンプライアンス λ^{n-1}_{ijkl} の弾性連続体中に亀裂密度 $\Delta\Phi$ の亀裂群が存在する場合のそれら亀裂群によるコンプリメンタリエネルギー増分である。ここで、亀裂が配向性を有する場合には、各計算ステップで求められる弾性コンプライアンス λ^n_{ijkl} は異方性を示し、特に、亀裂方位分布によってはそれは完全異方性となる。したがって、任意の亀裂方位分布に対して式(A2)の計算を行うためには、完全異方弾性体中に存在する亀裂に対するコンプリメンタリエネルギー増分の計算が必要となる。Eshelby¹⁰⁾ は、亀裂などのインクルージョンの存在に起因したコンプリメンタリエネルギー増分は、そのインクルージョンに対応した eigen ひずみ ε^*_{ij} を用いて次式で与えられることを示している (なお、eigen ひずみに関する解析は引用文献11)12)を参照されたい)。

$$\Delta W_c = (\Psi/2) \cdot \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} \quad (A3)$$

ただし、 Ψ はインクルージョンの体積率である。ここで、亀裂 (中空インクルージョン) が長径 a 、短径 $\alpha_R a$ (α_R : アスペクト比) の回転楕円体の場合には、前述の亀裂密度増分 $\Delta\Phi$ と亀裂体積率の間には $\Psi = 4/3\pi \Delta\Phi$ の関係が成り立つ。また、Mura は完全異方弾性体中 (有効弾性コンプライアンス λ^{n-1}_{ijkl}) に存在する回転楕円体形状の亀裂 (中空インクルージョン) に対する eigen ひずみ ε^*_{ij} を次の関係式で与えている¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= T_{ijmn} \varepsilon^*_{mn} \\ T_{ijmn} &= C^{n-1}_{ijkl} - C^{n-1}_{ijkl} S_{klmn} \\ S_{ijmn} &= (F_{ikjl} + F_{jkil}) C^{n-1}_{klmn} / 2 \\ F_{ijkl} &= \frac{\varepsilon_{ist} \varepsilon_{jnr} C^{n-1}_{s3n3} C^{n-1}_{t3r3} / 2}{2 \varepsilon_{pqr} C^{n-1}_{p3i3} C^{n-1}_{q323} C^{n-1}_{r333}} \\ &\quad - \alpha_R \int_s \frac{\bar{\xi}_3}{(1 - \bar{\xi}_3^2)} \frac{\partial G_{ijkl}(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}_3} ds(\bar{\xi}) \\ G_{ijkl}(\bar{\xi}) &= N_{ij}(\bar{\xi}) \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l / H(\bar{\xi}) \\ H(\bar{\xi}) &= \varepsilon_{pqr} \cdot K_{1p}(\bar{\xi}) K_{2q}(\bar{\xi}) K_{3r}(\bar{\xi}) \\ N_{km}(\bar{\xi}) &= \varepsilon_{kst} \varepsilon_{mnr} K_{ns}(\bar{\xi}) K_{rt}(\bar{\xi}) \\ K_{km}(\bar{\xi}) &= C^{n-1}_{klmn} \bar{\xi}_n \bar{\xi}_l \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

ただし、 C^{n-1}_{ijkl} は λ^{n-1}_{ijkl} に対応する弾性率テンソル、 $\bar{\xi}$ は単位球面上の点を表わすベクトルであり、 $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ 、 $\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2 = 1$ と与えられる。また、 $\int_s ds(\bar{\xi})$ は単位球面状の面積分を表わし、 ε_{qpr} はパーミュテーションテンソル ($\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{321} = 1$ 、その他の添字については $\varepsilon_{qpr} = 0$) である。ここで、式(A4)中の T_{ijkl} を T_{ij} とマトリックスに変換して、その逆マトリックスを T^{-1}_{ij} と表わすと、式(A2)中のコンプリメンタリエネルギー増分の微分項は次式で与えられる。

Fig.A1 The relation between the effective elastic coefficient and the crack density obtained by the New Self Consistent Scheme using Mura's solution. Solid line: results by the increment of elastic coefficient. Broken line: results by the increment of compliance.

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 W_c(\lambda^{n-1}ijkl, \Delta\Phi)}{\partial\sigma_{ij} \partial\sigma_{kl}} = \frac{3\pi}{8} \cdot \alpha_R \cdot \Delta\Phi(T^{-1}_{IJ} + T^{-1}_{JI}) \quad \dots\dots\dots (A5)$$

したがって、式(A4)、(A5)を式(A2)に代入し、 $\alpha_R \ll 1$ の条件下で計算を行えば、任意の亀裂方位分布の円板状亀裂群に対する有効弾性コンプライアンスが求められることになる。なお、式(A4)の積分値は数値積分により算定される。

次に、式(A1)は応力 σ_{ij} に関する偏微分で与えられたものであるが、同様な関係式をひずみ ε_{ij} に関する偏微分として表現すると次式に示す有効弾性率 C^*_{ijkl} の評価式が与えられる。

$$C^*_{ijkl} = C^0_{ijkl} - \frac{1}{V} \frac{\partial^2 \Delta W_e}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{kl}} \quad \dots\dots\dots (A6)$$

ただし、 ΔW_e は弾性ひずみエネルギーである。上式に対しても、式(A1)に対してと同様な定式化を行うことができる。定式化の詳細は省略するが、この場合の、式(A2)および(A4)に対応する関係式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C^n_{ijkl} &= C^{n-1}_{ijkl} - \frac{1}{V} \frac{\partial^2 W_e(C^{n-1}ijkl, \Delta\Phi)}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{kl}} \\ &\quad (n = 1 \sim N) \end{aligned} \right\} \quad (A7)$$

$$\left. \begin{aligned} C^*_{ijkl} &= C^N_{ijkl} \\ &= \frac{1}{V} \frac{\partial^2 W_e(C^{n-1}ijkl, \Delta\Phi)}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{3\pi}{8} \cdot \alpha_R \cdot \Delta\Phi(T^{-1}_{IK} C^{n-1}_{KJ} + T^{-1}_{JK} C^{n-1}_{KI}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (A8)$$

ただし、 C^{n-1}_{IJ} は C^{n-1}_{ijkl} をマトリックス表記したものである。

以上までに示した関係式に基づくと、亀裂群を有する材料の有効弾性コンプライアンスは式(A2)、(A4)、(A5)により算定され、同様に有効弾性率は式(A6)、(A7)、(A8)により算定されることになる。そこで、以上の二通りの方法により亀裂性材料の有効弾性率を算定した結果の一例をFig.A1に示す。なお、図は亀裂密度増分 $\Delta\Phi = 10^{-2}$ 、アスペクト比 $\alpha_R = 10^{-4}$ で亀裂面が水平方向のみの場合の有効弾性率の33, 11, 13成分の結果を示している。図よ

り、基礎式は異なるにもかかわらず、両者はほぼ一致することがわかる。図は省略するが $\Delta\Phi = 10^{-3}$ の条件下では両者の値は有効数字3桁の範囲で完全に一致すること、また、 $\alpha_R \leq 10^{-3}$ では解析値は α_R の値にほとんど依存しないことが確かめられている。

一般に、上記のような計算手法を用いない場合、コンプライアンス増分に基づいて計算された弾性率の値は、弾性率増分に基づいて求められた値に比較して高い値を示すことが知られている。しかしながら、物理的条件を考えれば、問題とする弾性体の体積および亀裂数が十分に大なる場合には両者の値は一致するものと考えられる。このような考察に基づくと、本手法により求められた解は物理的意味からも合理的な解であり、極めて信頼できるものであると考えることができる。なお、本論文に示した解析値は、すべて $\Delta\Phi = 10^{-3}$ 、 $\alpha_R = 10^{-4}$ の場合の結果を示している。

引用文献

- 1) 例えば、Goodman, R. E.: 不連続性岩盤の地質工学, 森山出版, (1978)
- 2) Walsh, J. B.: The effect of crack on the uniaxial elastic compression of cracks, J. Geophys. Res., Vol. 70, No. 2, p. 399-411, (1965)
- 3) 金子・柴: 等価体積欠損に基づく岩盤変形挙動の数値解法, 資源と素材, Vol. 106, No. 3, p. 121-126, (1990)
- 4) 金子・柴・野田: 等価体積欠損法の閉合亀裂問題への適用, 資源と素材, Vol. 106, No. 3, p. 133-138, (1990)
- 5) Kaneko, K., Tanaka, Y. and Koike, K.: Nonlinear elastic analysis of jointed rock by EVDM, Proc. Int. Cong. Rock Mechanics, Aachen, p. 755 - 758, (1991)
- 6) Kaneko, K., Tanaka, Y. and Noguchi, Y.: Equivalent Volume defect Model and its application to jointed Rock, Proc. Int. Symp. Assessment and Prevention of Failure Phenomena in Rock Engineering, Istanbul, p. 935 - 940, (1993)
- 7) 例えば、岡村弘之: 線形破壊力学入門, 培風館, (1976)
- 8) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, J. Meth. Phys. Solids, Vol. 13, p. 213-222, (1965)
- 9) Yamamoto, K., Kosuga, K. and Hirasawa, T.: A theoretical method for determination of effective elastic constants of isotropic composite, Sci. Rep. Tohoku Univ. Ser. 5, 28, p. 47-67, (1981)
- 10) Eshelby, L. D.: The determination of elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, 241, (1957)
- 11) 下谷・山富・山口: 多軸応力下における大理石の強度破壊について, 日本鉱業会誌, Vol. 96, No. 1110, p. 23-28, (1980)
- 12) 村・森: マイクロメカニクス, 培風館, (1976)