No. 95-111
⑤ 藤崎 隆二
一 朝倉 國臣
+ 金 子 忠 利
+ 中 島 巖

■■■ 論文

超音波による水中粒子のクラスタ形成 (その2)*

— 理論的検討 —

朝倉 國臣¹ 今井 忠男²
金子 忠利³ 中島 巖⁴

Formation of Concentrated Solid Clusters in a Liquid-Solid Mixture by Ultrasonic Wave (2nd Report)

— Theoretical consideration —

by Kuniomi ASAKURA¹, Tadao IMAI², Tadatoshi KANEKO³ and Iwao NAKAJIMA¹

1. Faculty of Engineering, Hokkaido University, Kita-ku, Sapporo 060

2. Mining College, Akita University, Akita 010

3. Graduate student, Hokkaido University

The purpose of this study is to clarify the mechanism of the cluster formation in a solid-liquid mixture vibrated by ultrasonic waves. This phenomenon has been explained by two different theories: one proposed by Rayleigh and Schlichting which concerns a steady secondary flow generated by a stationary wave in a tube, and the other by King which is based on sound pressure.

In the present study, the theory based on a steady secondary flow was examined theoretically and experimentally. The results showed that the secondary flow has no significant effect on cluster formation in a solid-liquid mixture. With this result, the upward lift force in highly concentrated particles and gas bubbles was derived theoretically based on the sound pressure and attenuation of the waves.

KEY WORDS : Ultrasonic Wave, Cluster, Gas Bubble, Solid-Liquid Mixture, Stationary Wave

1. はじめに

垂直管内の液体に中立浮遊 (neutrally buoyant) 粒子を混ぜて管下端に超音波で振動を加えると、液体中に分散した粒子は規則的に集合し帯状の高濃度クラスタを形成する。この粒子クラスタの間隔は定在波の間隔と一致するため、粒子集合は定在波によって誘起されることが考えられる。

前報¹⁾では中立浮遊粒子、弱沈降性粒子、微細粒子、気泡の実験を行い以下に示す5点の結論を報告した。1) 粒子濃度が低い中立浮遊性粒子では管内に規則的なクラスタが形成される、2) 沈降性粒子では規則的なクラスタは形成されず上昇粒子と下降粒子が合体し塊状に集まる、3) 中立浮遊粒子の濃度が増すと粒子は上向きの力によって管上端に運ばれる、4) 微小気泡を管内に満たすと気泡は強い上向き力によって管上部へと運ばれる、5) 内径の大きい管ではクラスタのできにくい微細粒子でも小径水平管を用いると沈積層がクラスタ状に集合する。

定在波が発生すると何故粒子が集合してクラスタを形成するかについては2つの異なった理論がある。一つは流体に振動を与えると発生する定常循環性二次流 (以下二次流と略称) により粒

子が運搬されるとする説であり、Rayleigh²⁾によって提唱された。Rayleigh は、この二次流は流体の運動方程式の非線形効果によって生じる現象であることを明らかにし、平行平板内の気体中に定在波が存在する場合の二次流を、一次流の摂動法による速度と重調和関数になる流れ関数による速度の和で求めている。その後、Westervelt³⁾はRayleighの解は圧縮性の考慮が不完全であると、修正解を提案している。

またSchlichting⁴⁾は非圧縮性流体中の振動円柱によって発生する二次流の理論解を示すとともに、Kundtの縞模様を調和振動によって誘起された二次流によるものであると説明⁵⁾している。

振動する固体による定常二次流の発生については、円板、球、円柱、オリフィス、楽器のリードなどの研究があり、音響学の重要な研究課題として取り組まれてきた。最近では流れの可視化の好例として流体力学の教科書⁶⁾や啓蒙書⁷⁾にも採り上げられている。

これらの二次流説とは全く異なる理論がKing⁸⁾によって提唱され、粒子の運動は単純なポテンシャル流れ場で振動する流体のもたらす音圧によって説明されている。

本論文の目的は固液のサスペンションに超音波振動を与えた場合のクラスタ形成メカニズムがいずれの理論によって説明しうることにある。検討は次の手順で行った。上述したように、圧縮性流体については既にRayleighの研究があるが、非圧縮性流体の二次流については解が示されていないので、非圧縮性流体中に定在波が存在する場合の二次流の理論解を求め、その寄与の定量的確認を行った。解の誘導には非圧縮性流体中の円柱振

* 1995年10月16日受付 1996年4月16日受理

1. 正会員 工博 北海道大学助手 工学部資源開発工学科

2. 正会員 秋田大学助手 鉱山学部資源素材工学科

3. 北海道大学工学研究科 資源開発工学専攻

4. 正会員 工博 北海道大学教授 工学部資源開発工学科

[著者連絡先] FAX 011-706-7880 (北大・資源)

キーワード: 超音波, クラスタ, 気泡, 固液混相流体, 定在波

Fig. 1 Amplitude of stationary wave between the parallel plates, λ is wave length.

動を取り扱った Schlichting の方法を参考にした。次に、管内部の流れをトレーサ（染料）を用いて調べ、二次流が存在するか否かの実験による確認を行った。これらの結果から濃度の高い粒子群に作用する揚力の発生メカニズムを音圧理論をもとに考察した。

2. 二次流の解析

2.1 定在波

解析を容易にするため Fig. 1 に示す二次元平行平板内に定在波が存在する場合を対象にする。定在波とは定常波とも呼ばれ、 x 方向に進行する縦波と、 x の負の方向に進行する縦波が合成された場合に生じ、次式で表される。

$$\phi(x, t) = \phi_+ + \phi_- = a \cos(kx - \omega t) + a \cos(kx + \omega t) = 2a \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (1)$$

ここで、 k は波数、 ω は角周波数、 t は時間、 a は振幅、 x は位置である。したがって、定在波とは振幅が位置 x によって変化する定在した縦波である。

2.2 基礎方程式

循環性二次流の理論解は以下の方程式を用いて求める。流体は二次元非圧縮性流体であるから連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

になる。ここで u は x （長軸）方向速度、 v は y （横断）方向速度である。 x 方向の運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

である。ここで ρ 、 p 、 μ はそれぞれ流体密度、圧力、粘性係数である。振動流の場合に粘性の効果は平板のごく近傍の境界層に閉じ込められるため、この境界層を離れると粘性の影響のないポテンシャル流れとして取り扱える。したがって境界層の外の運動方程式は単純化され、

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4)$$

となる。ここで U は境界層外の x 方向速度である。

Fig. 2 に示す平行平板上の流体では境界層は薄い（3）式（一次近似）に置き換えると、

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (5)$$

になる。圧力勾配には（4）式から対流項を無視した次式を用いる。

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

（6）式を（5）式に代入すると、

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (7)$$

この方程式は線形であるから解くことができる。Fig. 2 より、下板と上板の距離が十分にあり、かつ境界層は薄く境界層相互の影

Fig. 2 Flow near the parallel plates.

響はないため下板のみを考える。また境界層の厚さ δ は角周波数 ω と動粘性係数 ν で表す⁵⁾。

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (8)$$

次に、対流項を含んだ二次近似運動方程式を次式で表現する³⁾。

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (9)$$

この式は（3）式（一次近似）の流速 u_1 と v_1 で置き換え、圧力勾配をポテンシャル流の対流項で置き換えた式である。したがって u_2 に関しては線形になり解くことができる。

2.3 解の誘導

取り扱う方程式は線形であるため、（1）式を複素数 i を含む形で表現する。

$$U(x, t) = U_0(x) e^{i\omega t} \quad (10)$$

ここで U_0 は $2a_v \cos kx$ であり、 a_v は速度の振幅である。

解を求めるために流れ関数を導入する。流れが二次元で非圧縮性流体なので流れ関数は必ず存在する。二次までの近似であるから流れ関数は2つの関数の合成になり、

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0 (\chi_1(\eta, t) + \chi_2(\eta, t)) \quad (11)$$

ここで η は次式の無次元距離である。

$$\eta = y \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (12)$$

一次の流れ関数を次式とおくと、

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0 \chi_1(\eta, t) = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0 \zeta_1(\eta) e^{i\omega t} \quad (13)$$

各方向の速度は（13）式を微分すると得られる。

$$u_1(x, y, t) = U_0 \zeta_1' e^{i\omega t} \quad (14)$$

$$v_1(x, y, t) = - \frac{\partial U_0}{\partial x} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \zeta_1 e^{i\omega t} \quad (15)$$

（14）、（15）式は（2）式を満たす。これらを（7）式に代入すると、 ζ_1 に関する微分方程式が得られる。

$$i \zeta_1' = i + \zeta_1''' \quad (16)$$

この方程式を解くことにより ζ_1 が決まる。（16）式を積分すると一般解は、

$$\zeta_1' = c_1 \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) + c_2 \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) + 1 \quad (17)$$

積分定数 c_1 と c_2 は境界条件より決まり、

$$\eta \gg \delta \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \text{ で } \zeta_1' = 1 \text{ より } c_1 = 0$$

$$\eta = 0 \text{ で } \zeta_1' = 0 \text{ より } c_2 = -1$$

であるから、

$$\zeta_1' = 1 - \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \eta\right) \quad (18)$$

上式を積分および微分すると(19), (20)式が得られる。

$$\zeta_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} + \eta + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta) \quad (19)$$

$$\zeta_1'' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\eta) \quad (20)$$

(11)式の二次近似の流れ関数を次式で表す。

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{U_0}{\omega} \frac{\partial U_0}{\partial x} (\zeta_{2t}(\eta)e^{2i\omega t} + \zeta_{2s}(\eta)) \quad (21)$$

右辺の括弧内第1項は時間周期項で第2項は定常項である。 x および y 方向の定常速度は,

$$u_{2s} = \frac{U_0}{\omega} \frac{\partial U_0}{\partial x} \zeta_{2s}' \quad (22)$$

$$v_{2s} = -\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + (\frac{\partial U_0}{\partial x})^2) \zeta_{2s} \quad (23)$$

(9)式の解を求めるために各項を書き下す。(9)式の左辺第1項, 第2項は(21)式を用い,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = 2i\zeta_{2t}' e^{2i\omega t} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (24)$$

$$-\nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} (\zeta_{2t}''' e^{2i\omega t} + \zeta_{2s}''') \quad (25)$$

右辺の第1, 2, 3項は方程式の線形性を保つため実数演算した後⁴⁾に複素数表示をするとそれぞれの項は,

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \frac{(1+e^{2i\omega t})}{2} \quad (26)$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \zeta_1'^2 \frac{(1+e^{2i\omega t})}{2} \quad (27)$$

$$v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \zeta_1 \zeta_1'' \frac{(1+e^{2i\omega t})}{2} \quad (28)$$

(24)式から(28)式を(9)式に代入して整理すると,

$$2i\zeta_{2t}' e^{2i\omega t} - \zeta_{2t}''' e^{2i\omega t} - \zeta_{2s}''' = \frac{(1+e^{2i\omega t})}{2} - \zeta_1'^2 \frac{(1+e^{2i\omega t})}{2} + \zeta_1 \zeta_1'' \frac{(1+e^{2i\omega t})}{2} \quad (29)$$

上式で ζ_{2s}''' は実数の定常項であるため, 上式を定常項と非定常項に分離する。

$$2i\zeta_{2t}' - \zeta_{2t}''' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta_1'^2 + \frac{1}{2} \zeta_1 \zeta_1'' \quad (30)$$

$$-\zeta_{2s}''' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta_1' \zeta_1' + \frac{1}{4} (\zeta_1 \zeta_1'' + \zeta_1' \zeta_1'') \quad (31)$$

ここで上付きのバーは共役複素数である。(30)式は時間とともに変動する非定常成分の方程式であり, (31)は時間に関係しない定常成分の方程式である。興味の対象は時間に関係しない定常成分であるから, (31)式の解を求める。この式を書き下すと,

$$-\zeta_{2s}''' = -\frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2}\eta) + \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{2\sqrt{2}} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) (\cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}}) \quad (32)$$

ζ_{2s} は次式の右辺第1項に示す壁からの距離の増加に伴って急激に減衰する項 f_d , すなわち $\exp(-\eta)$ 関連項と, 第2項に示す非減衰項 f_n から成り立っている。

$$\zeta_{2s} = f_d + f_n \quad (33)$$

(32)式を積分すると ζ_{2s} は,

$$\zeta_{2s} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}\eta) - \frac{3}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \alpha(\eta_1 - \eta) + \beta(\eta_1 - \eta)^3 \quad (34)$$

上式の $f(\eta)$ は積分定数を含む η のべき乗項であるが(18)式において平行平板の下板のみを対象に式を導いたため, この項を(32)式の積分から直接求めることはできない。そこで, $f(\eta)$ を(33)式の非減衰項に置き換え, y 方向速度の軸対称性を考慮した関数を導入すると,

$$f_n = \alpha(\eta_1 - \eta) + \beta(\eta_1 - \eta)^3 \quad (35)$$

ここで η_1 は(11)式に下板から測った両板の中央距離 y_1 を代入した値である。 α と β は定数であり, この式による速度は(2)式を満たす。減衰項 f_d は(34)式の右辺第1項から第4項である。したがって ζ_{2s} と ζ_{2s}' は,

$$\zeta_{2s}' = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}\eta) - \frac{3}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \alpha(\eta_1 - \eta) + \beta(\eta_1 - \eta)^3 \quad (36)$$

$$\zeta_{2s}' = \frac{1}{4} \exp(-\sqrt{2}\eta) + 2 \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2\sqrt{2}} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) (\cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}}) - \alpha - 3\beta(\eta_1 - \eta)^2 \quad (37)$$

係数 α と β は $\eta = 0$ における境界条件から求める。 $\eta = 0$ で(36), (37)式はゼロになるから,

$$0 = -\frac{13}{4\sqrt{2}} + \alpha\eta_1 + \beta\eta_1^3 \quad (38)$$

$$0 = \frac{3}{4} - \alpha - 3\beta\eta_1^2 \quad (39)$$

両式から α は,

$$\alpha = -\frac{3}{8} + \frac{39}{8\sqrt{2}\eta_1} = -\frac{3}{8} + \frac{39\delta}{8y_1}$$

$y_1 \gg \delta$ であるから上式は,

$$\alpha = -\frac{3}{8} \quad (40)$$

と近似できる(付録)。この式を(39)式に代入すると,

$$\beta = \frac{3}{8\eta_1^2} \quad (41)$$

(1), (22), (23), (36), (37), (40), (41)式を用いて整理すると定常速度の各成分は次式になる。

$$u_{2s} = -\frac{2a_v^2 k}{\omega} \sin 2kx (\frac{1}{4} \exp(-\sqrt{2}\eta) + 2 \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2\sqrt{2}} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) (\cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}}) + \frac{3}{8} - \frac{9}{8} \frac{(\eta_1 - \eta)^2}{\eta_1^2}) \quad (42)$$

$$v_{2s} = \frac{2a_v^2 k^2}{\omega} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \cos 2kx (-\frac{1}{4\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}\eta) - \frac{3}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2} \exp(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8} (\eta_1 - \eta) + \frac{3}{8} \frac{(\eta_1 - \eta)^3}{\eta_1^2}) \quad (43)$$

上式で η が増加すると $\exp$ 関連項は消える。この条件のもとで式を整理し, 無次元量 η を壁からの距離 y に書き直すと次式が

Fig. 3 Flow pattern of the secondary flow generated by the standing wave.

得られる。

$$u_{2s} = -\frac{2a_v^2 k}{\omega} \left(\frac{3}{8} - \frac{9}{8} \frac{(y_1 - y)^2}{y_1^2} \right) \sin 2kx \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$v_{2s} = \frac{2a_v^2 k^2}{\omega} \left(-\frac{3}{8} (y_1 - y) + \frac{3}{8} \frac{(y_1 - y)^3}{y_1^2} \right) \cos 2kx \quad \dots\dots\dots (45)$$

Fig. 3に(44), (45)式による流れのパターンを示す。これらの式から流れの強さを計算するためには振幅 a_v を求めなければならない。以下にその実験結果を述べる。

3. 実験による検証

3・1 二次流の検証

振幅を求めるために水を抜いた管を洗浄器の水面に立てて管の底の変位量を測定した。洗浄器の超音波振動子の周波数は46 kHzであるため、100 kHzまで測定できる静電容量型プローブ(岩通 ST-0541A)と変位計(ST-3511, 特注品)を用いた。Fig. 4にプローブの設置状況を示す。変位計からの出力はFFTアナライザ(岩通 SM-2701)で解析した。その結果、超音波は連続的に出力されるのではなく20 msecごとに断続して出力されており、持続期間の最大振幅はおおよそ0.5 μ mであることが分かった。この振幅から速度振幅を計算して(44), (45)式に代入すると流速は10 μ m/sのオーダーとなり、二次流の寄与は極めて少ない。この結果を実験で確認するために、染料を注射器で筋状に注入し、超音波を照射しその広がりを調べた。Fig. 5に超音波を60秒照射した結果を示す。前報で示したように粒子を入れた場合には数秒で帯状のクラスタが形成されはじめ、1分ほどで安定した状態になる。二次流によってクラスタができるのなら染料を注入した場合にも定在波の間隔(1.6 cm)で染料の縞模様が形成されるはずである。注入時の注射針のゆれにより染料が若干の速度を持つための影響と超音波を照射した直後の不安定な流れの影響が見られるものの、それらが収まった30秒から60秒では顕著な流れは見られない。さらに電気分解で銅イオンによる着色

Fig. 4 Measurement of vibration amplitude at the bottom of the pipe.

層を管内に作り超音波を照射する実験も合わせて行ったが着色層の混合は見られなかった。以上の結果より粒子のクラスタ形成には二次流は関係しないことが実験でも明らかになった。したがってクラスタ形成のメカニズムは音圧によって説明されるべきであるとの結論にいたる。ただし、低周波数で大振幅の振動を低音速の気体に加えた場合には二次流の影響がでる場合もあると思われる。

なお水を入れた垂直管に低周波数(1 kHz未満)の大振動を与えた場合には液体スロッシングと呼ばれる現象が起き、管内の自由水面に生じた波が不安定に変形して、気体の巻き込みを伴う崩壊により振動流体中に気泡が取り込まれ、液体中に止まるようになる。この現象については宇宙開発における燃料タンクの液面制御や耐震設計を目的とした詳細な研究⁹⁾がなされているが、本実験とは異なった現象である。

3・2 音圧説の実験による検討

Kingは流体を粘性のないポテンシャル流れと仮定し、粒子の運動は単純なポテンシャル流れ場で振動する流体のもたらす音圧によるとする理論を報告している。この理論では、波動方程式から求めたポテンシャル関数と球表面の圧力分布の関係をもとに、球に作用する平均圧力を振動波のエネルギー密度から求めている。したがって、流体の粘性や循環流のような二次流は関係しない。Kingの理論によると定在波のもとでは、小さい球の受ける放射圧 $\bar{p}$ は、

$$\frac{\bar{p}}{\pi r^2} = 2\beta F(\rho_0/\rho_1) \bar{E} \sin 2kh \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$F(\rho_0/\rho_1) = \frac{1 + \frac{2}{3}(1 - \rho_0/\rho_1)}{2 + \rho_0/\rho_1} \quad \dots\dots\dots (47)$$

となる。ここで r は粒子半径、 $\beta = kr$ 、 ρ_0 は流体密度、 ρ_1 は粒子密度、 h は放射圧の節から測った座標、 $\bar{E}$ は平面波のエネルギー密度である。

進行波の場合には位置に関係なく音波の進行方向に向かい、

$$\frac{\bar{p}}{\pi r^2} \cong 4(kr)^4 \bar{E} \frac{1 + \frac{2}{9}(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1})^2}{(2 + \frac{\rho_0}{\rho_1})^2} \quad \dots\dots\dots (48)$$

の放射圧が作用する。

定在波の条件下では(47)式から比重の大きい球($\rho_1 > 0.4 \rho_0$)は音圧の節から腹に向かう力を受け、軽い球($\rho_1 < 0.4 \rho_0$)は腹から節に向かう力を受けることになる。この理論を検証するため内径6.7 mm、長さ310 mmのU字ガラス管の水平部に気泡と

Fig. 5 Dispersion of red ink streak in 60 seconds.

Fig. 6 Clusters of air bubbles and polystyrene beads in a horizontal U tube.

ポリスチレン粒子を入れた実験を行った。Fig. 6 にはその結果を示す。ポリスチレン粒子および気泡のクラスタの間隔は定在波の間隔に一致しているが、上部の気泡のクラスタと下部のポリスチレン粒子のクラスタが同じ位置に集まる。King の理論では軽い気泡の集合位置はポリスチレンの集合位置と異なるはずである。気泡は固体粒子と異なり圧縮性流体であるため、圧縮性を考慮した Yosioka¹⁰⁾ の理論式との比較を行ったが気泡の位置は異なる。この結果より音圧説は現象の定性的な説明には有効であるが、実際の現象をすべて説明しうるものではないことが分かる。実際の現象は液柱の振動と管の振動が複雑に関連しあう連成系になっていると考えられる。この点の検討は今後の課題である。

4. 高濃度粒子群に作用する上向き力の検討

粒子の濃度が増すと粒子に上向き力が働き、中立浮遊粒子では粒子が管の最上端に運ばれ、弱沈降性粒子では上向き力によって上昇する粒子と上部から沈降してくる粒子が合体して管の途中に大きな粒子塊が形成される。また微小気泡では気泡濃度が高いと気泡は上向き力によって上部に移動し水面に集中する。気泡の移動速度は超音波を照射しない浮力の上昇速度と比較すると著しく速い。これらの現象は固体粒子あるいは気泡による超音波の減衰によるものと考えられる。超音波に減衰が起こると、管の下端から減衰を伴った超音波が進行し、管上部の自由水面で反射した波も減衰して戻ってくるため、減衰性定在波が生じる。あるいは減衰が著しい場合には、行きの波または戻りの波が管の途中で減衰し消滅する場合も生じる。

まずはじめに減衰性定在波に恒常的な上向き力が生じるか否かの検討を行う。厳密な解析には粒子表面の圧力を求めなければならないが、解析を容易にするために振動場の圧力を用いて定性的傾向を調べる。超音波の減衰は一般に次式で表現¹¹⁾される。

$$p = p_0 \exp(-bx) \quad (49)$$

ここで p_0 は音源の音圧であり、 b は単位長さ (m) 当たりの減衰係数である。いま b が小さい場合には戻りの波があるため減衰性定在波ができる。定在波は逆方向に伝わる音波の重ね合わせた定在した波であり、その音圧分布は次式で表現される。

$$p = p_i \sin(\omega t - kx) + p_r \sin(\omega t + kx) \quad (50)$$

この波のエネルギー密度¹²⁾を求めると、

$$E = \frac{p^2}{\rho_0 c^2} = \frac{1}{\rho_0 c^2} (p_i^2 \sin^2(\omega t - kx) + p_r^2 \sin^2(\omega t + kx) + 2p_i p_r \sin(\omega t - kx) \sin(\omega t + kx)) \quad (51)$$

ここで c は音速である。波の周波数が高いので上式の時間関連項を 1 周期の時間で積分し時間平均値で表現する。(51) 式の時間関連項は、

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + kx) dt = \frac{1}{2} \quad (52)$$

$$\sin(\omega t - kx) \sin(\omega t + kx) = \frac{1}{2} (\cos 2kx - \cos 2\omega t) \quad (53)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\omega t dt = 0 \quad (54)$$

になるため時間平均したエネルギー密度は、

$$\bar{E} = \frac{1}{2\rho_0 c^2} (p_i^2 + p_r^2 + 2p_i p_r \cos 2kx) \quad (55)$$

になる。このエネルギー密度は時間平均した場の圧力¹³⁾になる。行きの波に(49)式、戻りの波に管の長さ l を含む次式を(55)式に代入して、

$$p_r = p_0 e^{-b(2l-x)} \quad (56)$$

微分すると、

$$-\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = \frac{p_0^2}{\rho_0 c^2} (be^{-2bx} - be^{-2b(2l-x)} + 2ke^{-2bl} \sin 2kx) \quad (57)$$

になる。この式に粒子の体積を掛けると 1 粒子当たりの力が得られる。上式から減衰性定在波の圧力勾配は右辺の括弧内の第 1 項と第 2 項の和である正の圧力勾配と第 3 項の位置によって符号が変わる減衰した定在波による圧力勾配から成り立っていることが分かる。Fig. 7 と Fig. 8 には上式を $p_0^2/\rho_0 c^2$ で割って無次元表示した結果を示す。一点鎖線は第 1 項と第 2 項の和であり、点線は減衰した定在波、実線はすべての和である。Fig. 7 は減衰係数 b を 5 とした結果であるが、一定の振幅を持った減衰した定在波(点線)が第 1 項と第 2 項を加算することで若干プラス側にシフトした実線で示す波になる。Fig. 8 には $b = 10$ の場合を示すが、管の下端近傍では圧力勾配が常に正になる領域が現れる。したがって減衰が大きいと管の下端近傍の粒子には恒常的な上向き力が作用するため、粒子は上昇する。また、減衰が大きく戻りの波が無視できる場合には、減衰性進行波になる。その場合のエネルギー密度は、

$$E = \frac{p_0^2}{\rho_0 c^2} e^{-2bx} \sin^2(kx - \omega t) \quad (58)$$

になる。これを時間で平均すると、

$$\bar{E} = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c^2} e^{-2bx} \quad (59)$$

になる。単位体積当たりの力は次式となる。

$$-\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = \frac{p_0^2 b}{\rho_0 c^2} e^{-2bx} \quad (60)$$

Fig. 7 Non-dimensional pressure gradient of vibrating fluid, the coefficient of attenuation $b = 5$.

Fig. 8 Non-dimensional pressure gradient of vibrating fluid, the coefficient of attenuation $b = 10$.

したがって各粒子には減衰を考慮した進行波のもとら放射圧に加えて、(60)式に粒子の体積を掛けた上向き力が作用することになる。もし水面で反射した戻りの波が減衰し消滅した場合には、消滅箇所から管の下端にかけて減衰性の進行波が存在するため、その領域の粒子には上向き力が作用し高濃度層が形成される。濃度が高くなるとさらに減衰が強まるため、戻りの波が弱まり進行波のしめる領域が広がる。したがって中立浮遊粒子や気泡は上昇を続け管上端に集まる。また沈降性の粒子は超音波による上昇力と粒子の水中重量の釣り合った箇所でき粒子塊を作る。管内に分散した粒子濃度がある程度高い場合に見られることであるが、超音波の照射直後に粒子が一時的に上昇し、その後クラスタを作る現象がある。これは反射波が戻るまでの短時間に減衰性進行波が支配し全粒子に一時的に上向き力が作用するために起きる現象であると考えられる。

以上の結果より、濃度の高い粒子や気泡が上昇するメカニズムの定性的説明が可能になったと考えられる。

5. ま と め

超音波を用いて固液あるいは気液混相流体内に定在波を作ると、粒子は規則的に集合してクラスタを形成する。このメカニズムは循環二次流説と音圧説の異なった2つの理論で説明されている。

いずれの理論が適切なのかを知るために理論的、実験的検討を加えた。以下にそのまとめを示す。

1) 非圧縮性流体の循環二次流の理論解を求め、実測した振幅から流速を計算すると極めて低いことが分かった。

2) この結果を染料を用いた実験によっても確認し、循環二次流説は本実験結果には適用できないとの結論に至った。

3) 音圧説を調べるために、水平管に固体粒子と気泡を入れてクラスタを作るとクラスタ間隔は理論と合うが、気泡のクラスタ位置は理論と異なる結果になった。この違いは、実際の現象が管の振動と流体の振動が複雑に影響する連成現象であることに起因すると考えられる。

4) 濃度の高い固体粒子や気泡が上昇する現象のメカニズムを、超音波が減衰すると発生する圧力勾配をもとにして解析し、定在波が存在しても減衰が大きいと上向き力が発生することを明らかにした。

謝辞 東北大学流体科学研究所の橋本弘之教授には有益な助言いただくとともに液体スロッシング現象に関する論文をお送りいただいた。ここに記して感謝を申し上げる。

付録 超音波の周波数を 46 kHz、水の動粘性係数を 10^{-6} (m^2/s) とすると、(8)式より、境界層の厚さ δ は数ミクロン程度になる。管の半径 y_1 を 1.7 cm とすると、 δ/y_1 は 10^{-4} のオーダーになる。

引 用 文 献

- 1) 今井忠男・朝倉國臣・金子忠利・中島 巖：資源と素材，Vol. 111，p. 937-942，(1995)
- 2) Rayleigh, L. : The Theory of Sound, Vol. 2, p. 333, New York, Dover Publications, (1945)
- 3) Westervelt, P. : J. of the Acoustic Society of America, Vol. 1, p. 60-67, (1953)
- 4) Schlichting, V. H. : Physik. Zeitschr. XXXIII, p. 327-335, (1932)
- 5) 日野幹雄：流体力学，p. 11, p. 224, (1992), 朝倉書店
- 6) Schlichting, V. H. : Boundary Layer Theory, p. 415, McGraw-Hill Sixth edition
- 7) 流れの可視化学会編：流れのファンタジー，p. 26-29, 講談社ブルーバックス
- 8) King, L. : Proc. Roy. Soc. A137, p. 211-240, (1935)
- 9) Hashimoto, H. and Sudo, S. : Experimental Thermal and Fluid Science 1, p. 159-169, (1988)
- 10) Yosioka, K. : Acustica 5, p. 167-173, (1955)
- 11) 島川正憲：超音波工学－理論と実際－，工業調査会，p. 16, (1975)
- 12) 小橋 豊：音と音波，裳華房，p. 81, (1991)
- 13) Piercy, J. E. and Lamb, J. : Proc. Roy. Soc. (London), A226, p. 43-50, (1954)