周囲液体からの静液圧と一様な軸圧縮荷重 を受ける円筒殻の座屈*

— 円筒状海洋構造物の安定性に関する研究 (第3報) —

土 岐 仁¹ 麻 生 和 夫²

Buckling of Circular Cylindrical Shells Surrounded with Liquid under Axial Compression

— Studies on the stability of cylindrical offshore structures (3rd Report) —

by Hitoshi DOKI¹ and Kazuo ASO²

1. Mining College, Akita University, Akita 010, Associate Professor, Dr.

2. Mining College, Akita University, Akita 010, Professor, Dr.

In order to clarify systematically the stability of cylindrical offshore structures, the buckling problem of circular cylindrical shells surrounded with liquid under axial compression is analyzed. A theoretical analysis is performed by means of the Galerkin method on the basis of the Donnell-type equations for shells, taking the effect of the axisymmetric deformation due to the static liquid pressure into consideration. Calculations are carried out for both simply supported and clamped shells and the critical compressive load k_c are determined for various values of the shell geometric parameter Z , liquid pressure parameter p_x and liquid depth ratio l_0 .

The main results obtained are summarized as follows:

- (1) The critical compressive load ratio $\bar{k}_c$ decreases monotonously with an increase in the value of l_0 and/or p_x . With an increase in l_0 , the buckling wave number ratio $\bar{\beta}$ increases for small value of Z and decreases to less than unity for large value of Z .
- (2) The effects of the shell geometries Z on $\bar{k}_c$ are relatively small for clamped shells.
- (3) The value of $\bar{k}_c$ for simply supported shells is always larger than one for clamped shells in large value of Z .
- (4) The effects of the surrounding liquid and the axial compression on the prebuckling deformation and the change of buckling mode for the rapid change of buckling load and buckling wave number are clarified by means of the contour map representation.

KEY WORDS: Offshore Structure, Stability, Buckling, Cylindrical Shell, Surrounding Liquid, Axial Compression

1. 緒 言

円筒状構造物は液体貯槽を初め、航空機、化学プラントの配管等各種産業において広く用いられている基本構造物であり、これらのうち、周囲液体からの静液圧を受ける円筒状構造物としては、半地下構造の石油タンクや高速増殖炉の原子炉容器を初め、海洋構造物や土木産業の分野において少なくない。外部からの静液圧は円筒状構造物を本質的に不安定にするので、各種荷重が複合的に作用する場合の座屈強度を明らかにすることは、強度設計上基本的な重要課題である。

著者らは円筒状海洋構造物の安定性を解明するための第一歩として、液体に囲まれた円筒殻に各種荷重が作用する場合の座屈現

象を逐次系統的に明らかにすることを目的に、先に周囲液体からの静液圧と一様な外圧を受ける場合¹⁾、あるいは一様なねじり荷重を受ける場合²⁾の薄肉円筒殻の座屈強度について理論的な研究を行った。本論文ではこれらに引き続き、周囲液体からの静液圧と一様な軸圧縮荷重を受ける円筒殻の座屈問題を理論的に解析する。

一般に円筒殻の軸圧縮座屈は、座屈前の変形状態に敏感であり、座屈モードも複雑で特異な挙動を示す場合がある。例えば、著者らの一人が先に行った、液体を部分的に満たした円筒貯槽に各種荷重が作用する場合の安定性に関する研究³⁾⁻⁸⁾で明らかにしたように、外圧座屈やねじり座屈と違い、軸圧縮座屈荷重は液位の増加に対して複雑に変動し、軸圧縮荷重のみが作用したときの座屈荷重以下になることさえある。したがって本問題を解明することは、液体に囲まれた円筒殻が橋桁などとして他の構造物を支える場合や、地震の際に半地下構造の石油タンクや円筒状海洋構造物に軸方向荷重が動的に作用する場合に、その耐荷重能力を算定し強度設計する上で重要である。境界条件としては、両端固定お

* 1996年7月31日受付 10月9日受理

1. 正会員 工博 秋田大学助教授 鉱山学部機械工学科

2. 正会員 工博 秋田大学教授 鉱山学部機械工学科

〔著者連絡先〕 FAX 0188-37-0405 (秋田大・機械)

キーワード: 海洋構造物, 安定性, 座屈, 円筒殻, 周囲液体, 軸圧縮荷重

よび両端単純支持の2つの場合を考え、座屈前の有限曲げ変形の影響を考慮に入れた Donnell 型の基礎式に Galerkin 法を適用することによって理論的な解析を行う。

2. 基礎式および境界条件

ここでは円筒状海洋構造物を薄肉円筒殻として解析を行う。図1のように半径 R 、長さ L 、厚さ h の円筒殻の周囲が高さ H まで密度 ρ_f の液体に囲まれており、殻両端に単位長さ当たり一様分布軸圧縮荷重 $\sigma_c h$ が作用しているものとする。座標軸を図1のように定め、円筒殻中央面上の変位成分を U, V, W 、合成力に関する応力関数を F とする。実際の構造物の境界条件を考えた場合、上端は剛性の高いリングあるいは端板に結合される場合が多く、一方側板下端は底板に結合され、更に全体が基礎（海底）上に設置されたりしているのでかなり複雑であり、明確に指定することは困難と思われる。そこで本論文では前報¹⁾²⁾同様、簡単のため上下両端を同一境界条件とし、通常座屈問題で考えられている境界条件のうち、拘束力が最も強いものと弱いものを考え、両端固定で面内変位一定の場合と、両端単純支持で応力一定の場合を取り上げ、実際の境界条件はこれらの中間にあるものと考えことにする。

まず座屈前の有限軸対称変形について考える。この場合の変位を $u_0(\xi), v_0(\xi), w_0(\xi)$ 、応力関数を f_0 とすると基礎式は

$$f_{0,\xi\xi\xi\xi} + \alpha w_{0,\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$c w_{0,\xi\xi\xi\xi} - \alpha f_{0,\xi\xi} - \beta^2 f_{0,\eta\eta} w_{0,\xi\xi} - \tilde{p} l_0 \left(1 - \frac{\xi}{\pi l_0}\right) \varepsilon_p = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$u_{0,\xi} + \frac{1}{2} w_{0,\xi}^2 = \beta^2 f_{0,\eta\eta} - \nu f_{0,\xi\xi}, -\alpha w_0 = f_{0,\xi\xi} - \nu \beta^2 f_{0,\eta\eta} \quad \dots\dots\dots (3)$$

境界条件は $\xi = 0, \pi$ において

$$\left. \begin{aligned} \text{両端固定} &: w_0 = w_{0,\xi} = 0 \\ \text{両端単純支持} &: w_0 = w_{0,\xi\xi} = 0 \\ &\beta^2 \int_{-\pi}^{\pi} f_{0,\eta\eta} d\eta = -2\pi c k_c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

座屈の際の基礎式は、微小増分変位を u, v, w 、応力関数を f とすると、

$$\nabla^4 f + \alpha w_{,\xi\xi} + \beta^2 w_{0,\xi\xi} w_{,\eta\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$L(w, f) \equiv c \nabla^4 w - \alpha f_{,\xi\xi} - \beta^2 (f_{0,\xi\xi} w_{,\eta\eta} + f_{0,\eta\eta} w_{,\xi\xi} + f_{,\eta\eta} w_{0,\xi\xi}) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{,\xi} + w_{0,\xi} w_{,\xi} &= \beta^2 f_{,\eta\eta} - \nu f_{,\xi\xi} \\ \beta v_{,\eta} - \alpha w &= f_{,\xi\xi} - \nu \beta^2 f_{,\eta\eta} \\ \beta v_{,\eta} + v_{,\xi} + \beta w_{0,\xi} w_{,\eta} &= -2(1+\nu) \beta f_{,\xi\eta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

境界条件は $\xi = 0, \pi$ において

図1 円筒殻の諸元および座標系

$$\left. \begin{aligned} \text{両端固定} &: w = w_{,\xi} = u = v = 0 \\ \text{両端単純支持} &: w = w_{,\xi\xi} = f_{,\eta\eta} = f_{,\xi\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\pi x}{L}, \eta = \frac{\pi y}{l}, l = \frac{\pi R}{N}, \beta = \frac{L}{l}, f = \frac{F}{E h^3} \\ (u, v) &= \frac{L}{\pi h^2} (U, V), w = \frac{W}{h} \\ (n_x, n_y, n_{xy}) &= \frac{L^2}{\pi^2 E h^3} (N_x, N_y, N_{xy}) \\ c &= \frac{1}{12(1-\nu^2)}, \alpha = \frac{L^2}{\pi^2 R h^3}, Z = \sqrt{1-\nu^2} \frac{L^2}{R h} \\ \tilde{p} &= \frac{L^4 (\rho_f g L)}{\pi^4 h^4 E} = K Z k_{p0} p_x, K = \frac{1}{12\pi^2 (1-\nu^2)^{3/2}} \\ p_x &= \frac{\rho_f g L}{p_0}, k_{p0} = \frac{p_0 R L^2}{\pi^2 D}, l_0 = \frac{H}{L}, k_c = \frac{\sigma_c h L^2}{\pi^2 D} \\ D &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \varepsilon_p = \begin{cases} 1 & (\xi < l_0 \pi) \\ 0 & (\xi \geq l_0 \pi) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式においてコンマ後の添字はそれに関する微分を意味し、 N, l はそれぞれ円周方向の波数および半波長、 E はヤング係数、 ν はポアソン比であり、 Z (または α)、 β 、 k_c はそれぞれ円筒殻の形状、波数、軸圧縮荷重に関する無次元係数である。一般に円筒殻の形状を表すには $L/R, R/h$ の2つのパラメータを必要とするが、Donnell 型の基礎式を用いた場合、式(9)で定義した円筒殻形状係数 Z のみで形状を指定することができ、 Z が小さい場合は全体として短い円筒殻を、大きい場合は細長い円筒殻を表す。また、 p_0 は周囲液体がない空の円筒殻に一様外圧のみ作用したときの座屈圧力であり、 p_x は本問題において重要な役割を果たす液圧比で、その物理的な意味は、密度 ρ_f の周囲液体を円筒殻上端まで満たしたときの底面における液圧と p_0 との比である。したがって、周囲液体としては海水のみに限定していないので他の液体の場合にも適用可能である。

問題は、円筒殻の諸元、材質、液体の種類、液面の高さが与えられた場合に、基礎式(5)、(6)が恒等的に0でない解を持つための荷重係数 k_c の最小値を定めることにある。

3. 座屈前の変形状態

断面力が軸対称であることと式(1)、(3)、(4)より

$$f_{0,\xi\xi} = -\alpha w_0 - \nu c k_c, f_{0,\eta\eta} = -\frac{c}{\beta^2} k_c \quad \dots\dots\dots (10)$$

したがって座屈前のたわみ w_0 に関する基礎式は式(2)より

$$L_0(w_0, f_0) \equiv c w_{0,\xi\xi\xi\xi} + c k_c w_{0,\xi\xi} + \alpha^2 w_0 + \alpha \nu k_c - \tilde{p} l_0 \left(1 - \frac{\xi}{\pi l_0}\right) \varepsilon_p = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。

3・1 両端固定の場合

たわみ w_0 を式(4)の第一式を考慮して次のように仮定する。

$$w_0 = \sum_m a_m [\cos(m-1)\xi - \cos(m+1)\xi] \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで a_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) は未定係数である。上式を用いて式(11)に Galerkin 法を適用すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (2Z_0 + Z_2) a_1 - Z_2 a_3 &= -2\alpha \nu k_c - \frac{2}{\pi c} \{T_1^{(1)} + T_2^{(2)}\} \\ Z_{m-1} a_{m-2} - (Z_{m-1} + Z_{m+1}) a_m + Z_{m+1} a_{m+2} \\ &= \frac{2}{\pi c} \{T_1^{(1)} + T_2^{(2)}\}, a_m = 0 \quad (m \leq 0), (m \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} Z_m &= m^4 - m^2 k_c + \frac{12}{\pi^4} Z^2, \quad T_m^{(1)} = -\tilde{p} l_0 T_m \\ T_m^{(2)} &= \frac{\tilde{p}}{\pi} \left[l_0 \pi T_m - \frac{1}{2} l_0^2 \pi^2 \delta_{m,1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \delta_{m,1}}{(m-1)^2} \{ \cos(m-1) l_0 \pi - 1 \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(m+1)^2} \{ \cos(m+1) l_0 \pi - 1 \} \right] \\ T_m &= l_0 \pi \delta_{m,1} + \frac{1 - \delta_{m,1}}{m-1} \sin(m-1) l_0 \pi \\ &\quad - \frac{1}{m+1} \sin(m+1) l_0 \pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである。上式の連立方程式を解くことにより a_m を定めることができる。

3・2 両端単純支持の場合

この場合のたわみ w_0 を式(4)の第2式を考慮して次のように仮定する。

$$w_0 = \sum_m a_m \sin m\xi \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式を用いて式(11)に Galerkin 法を適用すると、未定係数 a_m に関して次式を得る。

$$a_m = \frac{2}{\pi m Z_m} \left[-\{1 - (-1)^m\} \nu a k_c + \frac{\tilde{p}}{c} \left(l_0 - \frac{1}{\pi m} \sin m l_0 \pi \right) \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

4. 座屈条件式

4・1 両端固定の場合

境界条件を考慮して座屈波形 w を次式で仮定する。

$$w = \cos \eta \sum_m b_m \{ \cos(m-1)\xi - \cos(m+1)\xi \} \quad \dots\dots (17)$$

ただし b_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) は未定係数である。式(12), (17)を式(5)に代入し応力関数 f を求め、ついで基礎式(6)に Galerkin 法を適用すると次の条件式を得る。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} L(w, f) \{ \cos(r-1)\xi - \cos(r+1)\xi \} \cos \eta \, d\xi d\eta = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式の積分を実行し整理すると、結局未定係数 b_m に関して次式が得られる。

$$\sum_m \left\{ P_{rm} - k_c Q_{rm} + \frac{12Z^2}{\pi^5} \beta^2 (R_{rm} + \Phi_{rm} + \Psi_{rm}) \right\} b_m = 0, \quad (m, r = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} P_{rm} &= \beta^4 \delta_{r,1} \delta_{m,1} + (Z'_{r-1} + Z'_{r+1}) \delta_{r,m} \\ &\quad - Z'_{r-1} \delta_{r,m+2} - Z'_{r+1} \delta_{r,m-2} \\ Q_{rm} &= \nu \beta^2 \delta_{r,1} \delta_{m,1} + 2(r^2 + 1 + \nu \beta^2) \delta_{r,m} \\ &\quad - \{(r-1)^2 + \nu \beta^2\} \delta_{r,m+2} - \{(r+1)^2 + \nu \beta^2\} \delta_{r,m-2} \\ R_{rm} &= \frac{4\beta}{(1+\nu)E_r^{(1)}} \{ C + (-1)^r \} \{ 1 + (-1)^{r+m} \} \\ &\quad \times \{ g_r + (1+\nu)h_r \} \{ g_m + (1+\nu)h_m \} \\ \Phi_{rm} &= E_{rm} + F_{rm} + F_{mr} + G_{rm} + G_{mr}, \quad \Psi_{rm} = H_{rm} + I_{rm} \\ E_{rm} &= \frac{\pi}{2\alpha} \{ 3(a'_{m-r-1} - a'_{m-r+1} - a_{m+r-1} + a_{m+r+1}) \\ &\quad + a'_{m+r-3} - a'_{m-r-3} + a'_{m-r+3} - a_{m+r+3} \} \\ F_{rm} &= \frac{\pi}{2\alpha} \{ \gamma_{r-1} + \gamma_{r+1} \} (c_{m-r} - c_{m+r}) \\ &\quad - \gamma_{r-1} (c_{m-r+2} - c_{m+r-2}) - \gamma_{r+1} (c_{m-r-2} - c_{m+r+2}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} G_{rm} &= \frac{2\beta}{\alpha(1+\nu)E_r^{(1)}} \{ C + (-1)^r \} \{ g_r + (1+\nu)h_r \} \\ &\quad \sum_{p=0,1,2,\dots} \{ 1 - (-1)^{p+r} \} (\gamma_p - \nu \beta^2 \lambda_p) \bar{c}_{p,m} \\ H_{rm} &= \frac{\pi \beta^2}{4\alpha} \sum_{p=0,1,2,\dots} \lambda_p \bar{c}_{p,m} (c_{p+r-1} + c_{p-r+1} \\ &\quad - c_{p+r+1} - c_{p-r-1}) \\ I_{rm} &= \frac{\beta}{\alpha^2(1+\nu)} \sum_{p=0,1,2,\dots} \frac{\{ 1 + (-1)^{p+q} \} \{ C - (-1)^p \}}{E_p^{(2)}} \\ &\quad \times (\gamma_p - \nu \beta^2 \lambda_p) (\gamma_q - \nu \beta^2 \lambda_q) \bar{c}_{p,r} \bar{c}_{q,m} \\ Z'_m &= (m^2 + \beta^2)^2 + \frac{12Z^2}{\pi^4} \frac{m^4}{(m^2 + \beta^2)^2} \\ c_m &= m^2 (a'_{m-1} - a'_{m+1}), \quad a'_m = a_m - a_{-m} \\ \bar{c}_{p,m} &= c_{p+m-1} + c_{p-m+1} - c_{p+m+1} - c_{p-m-1} \\ &\quad - \delta_{p,0} (c_{m-1} - c_{m+1}) \\ g_r &= \frac{4r}{\{(r-1)^2 + \beta^2\} \{(r+1)^2 + \beta^2\}} \\ h_r &= \frac{4r \{ (r^2 - 1)^2 - \beta^4 \}}{\{(r-1)^2 + \beta^2\}^2 \{(r+1)^2 + \beta^2\}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

式(19)は b_m についての同次の連立一次方程式である。この式が b_m に関して恒等的に0でない解を持つためには、その係数行列式 Δ が0とならなければならない。すなわち

$$\Delta(Z, \nu, \beta, l_0, p_x, k_c) = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

上式より Z, ν が指定されると、座屈を起こす l_0, p_x, k_c の組合せおよびそれに対応する β の値、すなわち周囲液体の液位、液圧比および軸圧縮座屈荷重とそれに対応する円周方向波数を定めることができる。

4・2 両端単純支持の場合

この場合の座屈波形を次式で仮定する。

$$w = \cos \eta \sum_m b_m \sin m\xi \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし b_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) は未定係数である。以下両端固定の場合と同様に Galerkin 法を適用すると最終的に式(19)と同じ形の式が得られ、座屈条件を定めることができる。

5. 計算結果

前章までの解析結果に基づき、ポアソン比を $\nu = 0.3$ にとり、円筒殻形状係数 Z の種々の値に対して、座屈を発生する液圧比 p_x (周囲液体を円筒殻上端まで満たしたときの底面における液圧と空液時の円筒殻の座屈圧力との比)、液位比 l_0 (周囲液体の液位と円筒殻の長さとの比)、軸圧縮座屈荷重係数 k_c の組合せ、およびそれに対応する無次元座屈波数 β の値を求めた。なおここで軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ 、座屈波数比 $\bar{\beta}$ を次式で定義する。

$$\bar{k}_c = \frac{k_c}{k_{c0}}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\beta_{c0}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式において、 k_{c0}, β_{c0} はそれぞれ円筒殻外部に周囲液体がない場合の通常の軸圧縮座屈における座屈荷重係数および波数係数である。なお、空液時の円筒殻の座屈圧力と軸圧縮座屈荷重およびそれらに対応する座屈波数については、種々の境界条件の下に円筒殻形状係数 Z の広い範囲にわたって正確な値が求められている⁹⁾¹⁰⁾。これらのうち本論文の境界条件に対応するものを図2に示す。なお、単純支持の場合の座屈波数は $N = 1$ であるので図示していない。

5・1 座屈条件および座屈波数

図2 空液時の円筒殻の座屈荷重および座屈波数

各境界条件の下に、円筒殻形状係数 Z の種々の値に対し、液圧比 p_x をパラメタにとり、軸圧縮座屈荷重 k_c と対応する座屈波数 β を液位比 l_0 に対して算出した。本問の場合一般に円筒殻形状係数 Z 、液位比 l_0 、液圧比 p_x が大なるほど収束が悪くなる傾向があり、解の精度は未定係数の数に依存するが、 $Z = 100$ の場合 a_m を 16 項、 b_m を 12 項、 $Z = 1000$ の場合 a_m を 32 項、 b_m を 26 項考慮すれば収束は十分であった。

計算結果を図3～5に示す。図3は両端固定の場合について Z の種々の値に対して液位比 l_0 と液圧比 p_x を変化させたときの軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ と座屈波数比 $\bar{\beta}$ を示したものである。いずれの Z においても、 l_0 の増加に対して $\bar{k}_c$ は、はじめはわずかに減少するだけであるが、ある値を境にして急激に減少してくることがわかる。また p_x が大きいほど l_0 が小さい値でこの現象が見られる。ただし、 Z が小さい場合のみ l_0 が約 0.2～0.3 の範囲では一時的に $\bar{k}_c$ の値がわずかに 1 より大きくなるが、 Z が大きい場合はこの現象は見られない。一方、座屈波数比 $\bar{\beta}$ は Z が小さい場合、 l_0 の増加とともに増加し 1 より大きな値を取る。この傾向は p_x が大きいほど著しい。しかし Z が大きくなるにつれて全体的に $\bar{\beta}$ は低下し、1 以下の値となる。これは次のような理由による。一般に、図2から明らかなように、空液時における座屈波数は $Z = 100$ の場合を除いて外圧座屈よりも軸圧縮座屈の方が大きい。したがって $\bar{\beta}$ が 1 に近いところでは軸圧縮荷重が周囲液体による外圧よりも支配的であり、逆に 1 より減少するときには周囲液体による外圧が軸圧縮荷重よりも支配的であることを意味する。例えば $Z = 1000$ の場合、 $\bar{k}_c$ の曲線が急に折れ曲がっているところがあるが、これは座屈モードが軸圧縮から外圧に変化しているため、対応する $\bar{\beta}$ も 1 付近の値から小さな値に飛び移っている。これに関しては座屈波形のところで詳述する。

図4は Z の違いによって軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ がどのように変化するかを、液圧比が $p_x = 1.0, 3.0, 5.0, 10.0$ の場合について示したものである。両端固定の場合、 Z の違いによる軸圧縮座屈荷重比の差は比較的小さいが、両端単純支持の場合は l_0 が増加しても一定 ($\bar{k}_c = 1$) であるが、ある値を境にして急激に減少し、 $Z = 1000$ の方が軸圧縮座屈荷重比は常に大きいことがわかる。

図5は境界条件によって軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ がどのように変

図3 軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ および座屈波数比 $\bar{\beta}$ と液位比 l_0 の関係 (両端固定) 図4 軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ に及ぼす Z の影響 図5 軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ に及ぼす境界条件の影響

 図6 座屈前変形および座屈波形（等高線表示）： $Z = 200$, $p_x = 2.0$, 両端固定

 図7 座屈前変形および座屈波形（等高線表示）： $Z = 1000$, $p_x = 2.0$, 両端固定

化するかを表すために、代表例として $Z = 100, 1000$ の場合について示したものである。図より、 Z が大きく、 p_x が小さいほど両端単純支持の方が両端固定の場合よりも k_c の値が大きいことがわかる。なお、図4, 5は $Z = 100, 1000$ の場合のみ示してあるが、 $Z = 200, 500$ の場合はこれらの曲線の間にある。

5・2 座屈前変形および座屈波形

図6～8は液位比 l_0 の変化につれて座屈前の軸対称変形 w_0 および座屈波形 w がどのように変化するかを示すために、代表例として両端固定で $Z = 200, 1000$ 、液圧比 $p_x = 2.0$ の場合および両端単純支持で $Z = 1000$, $p_x = 5.0$ の場合について、座屈前変形はたわみの軸方向分布を、座屈波形は1.5波長分を等高線表示により表したものである。なお負の変位に対応する等高線を破線で示してある。実際には円筒殻は円周方向に円筒面を形成しており、

かつたわみは円周方向に波数 N で周期的に変形しているので、これを平面に展開し、そのうち半波長3個相当分のみを取り出して等高線表示したものである。図中の太線は $w = 0$ 、すなわちたわみが0である節線を表している。参考のため $\eta = 0, \pi$ における座屈波形の軸方向分布も併せ示した。ここで $w_0 = 1$ は円筒殻の厚さに相当する変形量を表し、その正負はそれぞれ円筒殻の内および外側への変形を意味する。また座屈の際の増分変位 w の大きさは不定であるので、その最大値を1にとり正規化して示してある。

図6は $Z = 200$, $p_x = 2.0$ （両端固定）の場合の座屈前変形と座屈波形を示したもので、図3右上（ $Z = 200$ の場合）の(a)～(d)点に対応している。座屈前変形 w_0 の軸方向分布は、液位比 l_0 が低いときは上端部から下端部にかけて周期的に外側に張り出す

図8 座屈前変形および座屈波形（等高線表示）： $Z = 1000$, $p_x = 5.0$, 両端単純支持

複雑な変形であったものが、 l_0 の増加につれて下端近くで内側にたわみかつ周期的な変形が徐々に取れ、直線的な変形へと移行することがわかる。また座屈波形 w については $l_0 = 0.4$ では変形は下半分に集中していたが、 l_0 の増加につれて全体に広がり、最大たわみ点の位置は上方に移動している。

図7は $Z = 1000$, $p_x = 2.0$ （両端固定）の場合の座屈前変形と座屈波形を示したもので、図3右下（ $Z = 1000$ の場合）の(a)~(d)点に対応している。 $Z = 200$ の場合と比較して、座屈前変形量は少なくかつ最大たわみ点の位置は下端に非常にならなっていること、また、 l_0 が小さいときに見られた周期的な張り出しの回数はさらに多くなっていることがわかる。一般に、 l_0 が小さい場合は座屈は主として軸圧縮荷重によって起こり、大きい場合は周囲液体からの液圧が支配的になる。このため座屈波形は図7(a), (b)では軸方向に関しては高次のモードとなり、最大たわみ点も下端に近くなるのに対し、(c), (d)では基本的に外圧座屈である一次のモードになっており、最大たわみ点も円筒殻中央近くになっている。また図3からこのときの座屈波数比 β は(a), (b)ではほぼ1であるのに対し、(a), (d)では0.7付近の値に急減しており、これに伴い、円周方向波長が長くなっていることが大きな特徴である。

図8は同じく両端単純支持の場合（ $Z = 1000$, $p_x = 5.0$ ）について示したものである。境界近傍において固定と単純支持の違いがあるほか、座屈前の変形で見られた周期的な張り出しは見られず、座屈波形は最大でも2次のモードで、最大たわみ点の位置が下端に非常に近くなり、下方が押しつぶされたような波形となることがわかる。

6. 結 論

円筒状海洋構造物の安定性を系統的に明らかにすることを目的に、周囲液体からの静液圧と一様な軸圧縮荷重を受ける円筒殻の座屈問題を、両端固定および両端単純支持の境界条件の下に、座屈前の有限曲げ変形の影響を考慮にいれた Donnell 型の基礎式に Galerkin 法を適用することにより理論的に解析した。種々の円筒殻形状に対し、周囲液体の液位比 l_0 、液圧比 p_x の値を変化させて数値計算を行い、軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ を算出するととも

に、それらと座屈前の有限曲げ変形ならびに座屈波形との関係をも明らかにした。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 液位比 l_0 および液圧比 p_x が増加するにつれて軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ は減少する。また、座屈波数比 β は液位比 l_0 が増加するにつれて、 Z が小さい場合は増加するが大きい場合は逆に減少し、1以下の値となる。

(2) 両端固定の場合、 Z の違いによる軸圧縮座屈荷重比の差は比較的少ないが、両端単純支持の場合は Z が大きいほど軸圧縮座屈荷重比は常に大きい。

(3) 円筒殻形状係数 Z が大きく液圧比 p_x が小さいほど軸圧縮座屈荷重比 $\bar{k}_c$ は、両端単純支持の方が両端固定の場合よりも大きい。

(4) 座屈前変形の軸方向分布および座屈波形の等高線表示により、座屈荷重と座屈波数の急変に対応する複雑な座屈モードの変化を明らかにし、円筒殻の変形に及ぼす周囲液体と軸圧縮荷重の影響を明らかにした。

終わりにのぞみ、図面作成の一部に秋田大学鉱山学部成田孝二技官の助力を得た。ここに記して謝意を表する。

引 用 文 献

- 1) 土岐 仁・麻生和夫・菅 勝重・石井憲和：資源と素材，Vol. 107, p. 271-276, (1991)
- 2) 土岐 仁・麻生和夫・菅 勝重・石井憲和：資源と素材，Vol. 107, p. 977-982, (1991)
- 3) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二：日本機械学会論文集（A編），Vol. 48, p. 1291-1299, (1982)
- 4) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二：日本機械学会論文集（A編），Vol. 48, p. 1300-1309, (1982)
- 5) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二：日本機械学会論文集（A編），Vol. 49, p. 1208-1217, (1983)
- 6) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二・大友規矩雄：日本機械学会論文集（A編），Vol. 50, p. 94-102, (1984)
- 7) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二・大友規矩雄：日本機械学会論文集（A編），Vol. 50, p. 936-944, (1984)
- 8) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二・大友規矩雄：東北大学高速力学研究所，Vol. 52, p. 1-20, (1985)
- 9) 八巻 昇：東北大学高速力学研究所報告，Vol. 25, p. 153-175, (1970)
- 10) 八巻 昇・児珠昭太郎：東北大学高速力学研究所報告，Vol. 29, p. 133-173, (1971)