制約をもつ非線形システムの切替え型制御： SICE-DD アームを例にして

石川 真生*・大石 泰章**

Switching Control of a Constrained Nonlinear System:
With the SICE-DD Arm as an Example

Masao ISHIKAWA* and Yasuaki OISHI**

In this paper, design of a switching control law is discussed for a constrained nonlinear system with focus on the PD control of the SICE-DD arm. In particular, admissible sets for the given constraints are computed with sum-of-squares polynomials and then utilized for design of a switching rule. Since the technique of sum-of-squares polynomials requires large computational cost in general, a known Lyapunov function is used for reduction of the computational cost. Although this Lyapunov function includes trigonometric functions, they can be replaced by approximating polynomials so as to allow application of the sum-of-squares technique. A numerical example shows efficacy of the proposed method.

Key Words: switching control, constrained control, robot control, admissible sets, sum-of-squares polynomials

1. はじめに

現実の制御系は、制御対象の保護やアクチュエータの物理的限界のため、入力や状態が満たすべき制約をもつことが多い。こうした制約をもつ制御系において大きなゲインの制御器を使うと制約を破ってしまい、機器の損傷やシステムの不安定化などを招くことがある。一方、小さいゲインの制御器を使うと高い制御性能を得ることができない。

この問題を解決する方法の1つは、制御器の切替えを行なうことである。すなわち平衡点から離れたところでは小さいゲインの制御器を使って制約を破らないようにし、平衡点の近くでは大きいゲインの制御器を使って制御性能を高くする。このような切替え型の制御則の設計には状態の初期値をその中に選べば、以降の時刻で制約は破られないという許容集合¹⁾の概念が有効であり、線形の制御対象の場合には成熟した方法論がある^{2)~4)}。一方非線形の制御対象の場合の研究は十分ではない。文献5)では、フィードバックによって制御系を線形化して線形系の方法論を適用している。文献6)では、より

一般の非線形制御対象を扱っているが、制御則の設計のために状態のグリiddingが必要である。文献7)では非線形制御系における最大の許容集合を2乗和多項式を使って計算する繰り返し型の算法を提案しているが、繰り返しを行なうたびに計算量が指数関数的に増加するので適用範囲に限界がある。2乗和多項式は多くの非線形の問題に適用できる方法であるが^{8)~11)}、計算量が大きくなることが多いのでいかにして計算量を減らすかが焦点となる。

本論文ではSICE-DDアーム¹²⁾を例にとり、ロボットのPD制御における切替え型の制御について、計算量に配慮した設計法を提案する。

具体的には、ロボットのPD制御ではLyapunov関数が陽に得られていることに着目し、そのレベル集合で制約を満たす最大のものを2乗和多項式を使って計算する。このとき計算されたレベル集合は許容集合になる。この許容集合はLyapunov関数を固定しているため一般に最大のものではないが、最大許容集合を求める場合と比べて計算量が少なくすむ。また、SICE-DDアームを含め、ロボットの動特性は三角関数を含むことが多いが、2乗和多項式では多項式しか扱えない。そこで本論文では三角関数の上下界を多項式で表わすことによって、系統的に許容集合を計算する方法を提案する。さらに提案した方法に基づいて切替え型の制御則を設計し、数値実験によって有効性を確認する。

本論文の構成は以下のとおりである。まず2章でSICE-DDアームの詳細を記述する。3章で切替え型の制御則の設計法を提案し、4章でこの設計法の有効性を数値実験によって示

* 東京大学大学院情報理工学系研究科 東京都文京区本郷 7-3-1

** 南山大学数理情報学部 瀬戸市せいれい町 27

* Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo

** Faculty of Mathematical Sciences and Information Engineering, Nanzan University, Seireicho 27, Seto

(Received September 11, 2008)

(Revised January 5, 2009)

Fig. 1 The configuration of the SICE-DD arm

す. 5 章で一般化の可能性について議論し, 6 章でまとめる.

2. SICE-DD アーム

SICE-DD アームは平面中で動作する 2 リンクのロボットであり, ロボット制御の教育・研究のために広く使われている¹²⁾. SICE-DD アームの構造を Fig. 1 に示す.

ここで $i = 1, 2$ に対し, q_i は関節 i の角度 (rad), m_i はリンク i の質量 (kg), I_i はリンク i の重心まわりの慣性モーメント ($\text{N}\cdot\text{m}^2$), l_i はリンク i の長さ (m), r_i は第 i 関節の中心からリンク i の重心までの長さ (m) である. 関節 1, 2 の角度をまとめて $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$ と書き, 対応する角速度, 角加速度をそれぞれ $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ と書く. 関節 1, 2 に加えるトルクを τ_1, τ_2 と書き, まとめて $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ と書く. このとき SICE-DD アームの運動方程式は

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + B\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

と表わせる. ただし $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は慣性行列, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ は遠心力・コリオリ力項, $B\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$ は粘性摩擦力項を表わしており, 各行列は

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_1 + 2R \cos q_2 & M_2 + R \cos q_2 \\ M_2 + R \cos q_2 & M_2 \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2R\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2 - R\dot{q}_2^2 \sin q_2 \\ R\dot{q}_1^2 \sin q_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

となっている. ここで M_1, M_2, R は

$$M_1 = I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + r_2^2),$$

$$M_2 = I_2 + m_2 r_2^2,$$

$$R = m_2 r_2 l_1$$

であり, 各パラメータの値は

$$M_1 = 1.1505 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad M_2 = 0.0758 \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$R = 0.0414 \text{ kg}\cdot\text{m},$$

$$B_1 = 3.3983 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}, \quad B_2 = 0.4676 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

である.

この SICE-DD アームに対して以下の PD フィードバック則を適用する:

$$\boldsymbol{\tau} = -K_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_r) - K_d\dot{\mathbf{q}}.$$

ここで $\mathbf{q}_r$ は目標値, K_p は位置のフィードバックゲイン行列, K_d は速度のフィードバックゲイン行列であり, K_p, K_d は正定値で

$$K_p = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} K_{d1} & 0 \\ 0 & K_{d2} \end{bmatrix}$$

なる形をもつものとする. このとき目標値 $\mathbf{q}_r$ は大域的に漸近安定で, Lyapunov 関数

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_r)^T K_p (\mathbf{q} - \mathbf{q}_r) \}$$

をもつことが知られている^{12), 13)}. すなわち PD フィードバック制御を用いた SICE-DD アームは任意の初期値に対して目標値 $\mathbf{q}_r$ に収束する. 以下本論文では, 目標値を $\mathbf{q}_r = \mathbf{0}$ とし, Lyapunov 関数を

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T K_p \mathbf{q} \} \quad (2)$$

として議論する.

一方, SICE-DD アームには関節 1 の最大角度が $\pi/2$ rad, 関節 2 の最大角度が $2\pi/3$ rad, 関節 1 の最大入力トルクが 70 N·m, 関節 2 の最大入力トルクが 15 N·m という制約がある. $\tau_1 = -K_{p1}q_1 - K_{d1}\dot{q}_1$, $\tau_2 = -K_{p2}q_2 - K_{d2}\dot{q}_2$ であることに注意して, これらの制約を満たす状態 $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ の集合を

$$X = \{ [\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^4 \mid |q_1| \leq \pi/2, |q_2| \leq 2\pi/3, \\ | -K_{p1}q_1 - K_{d1}\dot{q}_1 | \leq 70, | -K_{p2}q_2 - K_{d2}\dot{q}_2 | \leq 15 \} \quad (3)$$

と書く. 以下 X を制約集合と呼ぶ.

ゲイン K_p, K_d を大きく選ぶと状態が制約集合 X の外に出てしまい, 小さく選ぶと目標値 $\mathbf{0}$ への収束が遅くなる. この相反する要求を満たすためには, $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ が大きいときにはゲイン K_p, K_d を小さくし, $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ が小さいときには K_p, K_d を大きくする切替え型の制御が有効である. 3 章ではそうした制御則の設計法を提案する.

3. 切替え型制御則の設計

3.1 準備

本章では SICE-DD アームに対する PD フィードバック則の切替えをどのように設計するかを論じる. SICE-DD アームの状態方程式は, 状態変数を $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^4$ として

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1}(\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

のように書ける。また、与えられた K_p, K_d に対して、PD フィードバック則

$$\boldsymbol{\tau} = -K_p \mathbf{q} - K_d \dot{\mathbf{q}}$$

を使うものとする。

【定義】 時刻 $t = 0$ における状態（初期状態）を $[\mathbf{q}_0^T \ \dot{\mathbf{q}}_0^T]^T$ としたときの、時刻 $t \geq 0$ における状態を $\mathbf{x}(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \in \mathbb{R}^4$ と書く。□

【定義】 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^4$ が、制約集合 $X \subseteq \mathbb{R}^4$ に対して、任意の $[\mathbf{q}_0^T \ \dot{\mathbf{q}}_0^T]^T \in A$ について $\mathbf{x}(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \in X (\forall t \geq 0)$ という性質をもつとき、 A を制約集合 X に対するシステム (4) の許容集合という。□

つぎに Lyapunov 関数と許容集合との関係について述べる。ある $c \geq 0$ に関して Lyapunov 関数のレベル集合

$$\Omega_c = \{[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^4 \mid V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c\} \quad (5)$$

を考えると、任意の $[\mathbf{q}_0^T \ \dot{\mathbf{q}}_0^T]^T \in \Omega_c$ に対して $\mathbf{x}(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \in \Omega_c (\forall t \geq 0)$ となる（すなわち Ω_c は正の不変集合である）。したがって、 $\Omega_c \subseteq X$ ならば Ω_c は制約集合 X に対する許容集合である。

そこで与えられたゲイン (K_p, K_d) に対して、 $\Omega_c \subseteq X$ を満たす最大のレベル集合 Ω_c を求めることを考える。今、制約集合 X が K_p, K_d に依存し、Lyapunov 関数 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ も K_p に依存するので、こうして得られる許容集合も K_p, K_d に依存する。一般的に論じるのは難しいが²⁾、 K_p, K_d が小さいほど得られる許容集合は大きいことが多い。

以上に着目して、いくつかのゲイン (K_p, K_d) に対してあらかじめ許容集合を計算しておき、現在の状態がどの許容集合に属しているかということに基づいてゲインを切替えることを考える。以下 3.2 節では許容集合を 2 乗和多項式を使って計算する方法について述べ、3.3 節では得られた許容集合を使ってどのようにゲインの切替えを行なうかについて述べる。

3.2 許容集合の計算

集合 X に含まれる最大のレベル集合 Ω_c の計算はつぎの最適化問題に定式化できる：

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & c \\ \text{条件} & \Omega_c \subseteq X. \end{array}$$

特に $c = 0$ のとき条件 $\Omega_c \subseteq X$ が満たされるので、 $c \geq 0$ の範囲に限定して最大化を考えればよい。

上の最適化問題の条件である $\Omega_c \subseteq X$ は、(3)、(5)式より、「 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c$ を満たす任意の $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ に対して $|\mathbf{q}_1| \leq \pi/2, |\mathbf{q}_2| \leq 2\pi/3, |-K_{p1}\mathbf{q}_1 - K_{d1}\dot{\mathbf{q}}_1| \leq 70, |-K_{p2}\mathbf{q}_2 - K_{d2}\dot{\mathbf{q}}_2| \leq 15$ である」ということを意味する。このような条件を直接扱うのは難しく、このままでは c の最大化は困難である。しかし、2 乗和多項式の使用すること

Fig. 2 The graphs of $\cos q_2, f(q_2) = 1 - q_2^2/2, g(q_2) = 1 - q_2^2/3$

この条件の十分条件を線形行列不等式の形で得ることができ、この線形行列不等式のもとで c を最大化することは可能である。この場合に得られる c は本来の最大の c より小さい値になる可能性があるが、少なくとも $\Omega_c \subseteq X$ を満たすものが得られる。類似の方法は文献 10), 11) で議論されているが、本論文では Lyapunov 関数が陽に得られることに着目して計算量を抑制していること、Lyapunov 関数が $\cos q_2$ を含んでいて完全には多項式でないため特別の工夫をしていることが異なっている。

その工夫とは Lyapunov 関数 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ に対して多項式の上下界を考えることである。関数 $f(q_2) = 1 - q_2^2/2$ と $g(q_2) = 1 - q_2^2/3$ を定義する。これらのグラフを $\cos q_2$ のグラフとともに Fig. 2 に示す。また、(2)式の $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ において $M(\mathbf{q})$ に含まれる $\cos q_2$ をすべて $f(q_2)$ で置き換えたものを $V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 、同じく $g(q_2)$ で置き換えたものを $V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ とする。以下の事実注意到する。

【補題 1】 制約集合 X を内部に含むような集合 $\hat{X} \subseteq \mathbb{R}^4$ が存在して、任意の $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \hat{X}$ に対して $f(q_2) \leq \cos q_2 \leq g(q_2)$ であり、 $V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ または $V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ の少なくとも 1 つが成り立つ。□

(証明) $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in X$ のとき $|q_2| \leq 2\pi/3$ であるが、不等式 $f(q_2) \leq \cos q_2 \leq g(q_2)$ が $|q_2| \leq 2\pi/3$ を内部に含むある集合で成り立つことは、各項の 2 階の導関数を比較することで容易に示せる。(2)式の $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は $\cos q_2$ に関して 1 次なので、その係数の正負に応じて $V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ または $V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ が成り立つ。□

【補題 2】 任意の $c \geq 0$ に対して、レベル集合 Ω_c は原点を含み、弧状連結である。□

(証明) 任意の $c \geq 0$ に対して Ω_c が原点を含むことは明らか。また弧状連結でないとする、 Ω_c 内の連続な道を通して原点に到達できない Ω_c の点が存在するが、これはシステム (4) の大域的漸近安定性に反する。□

つぎに 2 乗和多項式の概念を導入する^{8), 14), 15)}。

【定義】 多項式 p がある多項式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ を使って

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})^2$$

と書けるとき、 p を 2 乗和多項式という。□

定義から明らかに 2 乗和多項式は非負多項式である。すなわち p は $p(\mathbf{x}) \geq 0$ ($\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) を満たす。

この概念をわれわれの問題に適用するには、不等式で表わされた集合上での非負性を 2 乗和多項式を使って表わす文献 8), 14), 15) の方法を拡張してつぎのようにすればよい。まず制約集合 X は多項式

$$h_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - q_1^2,$$

$$h_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{2}{3}\pi\right)^2 - q_2^2,$$

$$h_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 70^2 - \tau_1^2 = 70^2 - (-K_{p1}q_1 - K_{d1}\dot{q}_1)^2,$$

$$h_4(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 15^2 - \tau_2^2 = 15^2 - (-K_{p2}q_2 - K_{d2}\dot{q}_2)^2$$

を用いて $X = \{[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^4 \mid h_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0, h_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0, h_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0, h_4(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0\}$ と表わせる。このとき c が成り立つ。

《定理 1》 $c \geq 0$ とする。 $i = 1, 2, 3, 4$ のおのおのについて

$$h_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = s_{i1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + s_{i2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(c - V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad (6)$$

$$= s_{i3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + s_{i4}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(c - V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad (7)$$

を満たす 2 乗和多項式 $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}$ が存在するならば、 $\Omega_c \subseteq X$ である。□

(証明) 背理法を用いる。関係 $\Omega_c \subseteq X$ が成り立たないとすると、 Ω_c に属すが X には属さない $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ が存在する。補題 2 により Ω_c は原点を含み、弧状連結であるから、特にこの $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ を $\hat{X} \setminus X$ に属すように選べる。補題 1 によりこの $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ に関して $V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ または $V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ が成り立つ。今、 $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \Omega_c$ なので $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c$ であり、したがって $V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c$ または $V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c$ が成り立つ。

$V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c$ であるとする。2 乗和多項式 s_{i1}, s_{i2} ($i = 1, 2, 3, 4$) が非負であるから、不等式 (6) より $h_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) である。すなわちこの $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ は X に属すが、これは仮定に反する。一方 $V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq c$ であるとする。同様に不等式 (7) から $h_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) が導かれ、仮定と矛盾する。以上で定理が証明された。□

一般に 2 乗和多項式 $s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ の次数は偶数である。多項式 $s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ の次数が $2d$ (d は自然数) のとき、これが 2 乗和多項式であるための必要十分条件は $s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = u_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T Q u_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ を満たす対称な半正定値行列 $Q \succeq O$ が存在することである 8), 15)。ただし $u_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ の d 次以下の単項式をすべて並べてできるベクトルで、たとえば $d = 1$ の場合

$$u_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T$$

である。

以上に基づき r を適当な自然数としてつぎの最適化問題を考える：

最大化 c

条件 $Q_{i1} \succeq O, Q_{i2} \succeq O, Q_{i3} \succeq O, Q_{i4} \succeq O,$

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= u_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T Q_{i1} u_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &\quad + u_{r-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T Q_{i2} u_{r-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(c - V_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \\ &= u_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T Q_{i3} u_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &\quad + u_{r-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T Q_{i4} u_{r-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(c - V_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \\ &\quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

ここで最適化の変数は、スカラー c と対称行列 $Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}, Q_{i4}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) である。条件中の等式は $\mathbf{q}$ と $\dot{\mathbf{q}}$ に関する恒等式が成り立つこと、すなわち $\mathbf{q}$ と $\dot{\mathbf{q}}$ に関する多項式とみなした際の各項の係数が左辺と右辺とで一致することと解釈する。このとき c を固定すれば、条件は等式制約付きの線形行列不等式であり、これを満たす $Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}, Q_{i4}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) が存在するかどうかは内点法により判別できる。したがって c に関する二分法によって c の最大化が可能である。

なお、線形行列不等式に付随する等式制約は変数の次元を小さくすることで消去でき、数値計算上の問題は生じない。また、数値計算上取扱いが困難な関数を取扱いが容易な多項式などで置き換えるアイデアは、ゲインスケジュールド制御などでも使われている^{16)~18)}。文献 19) にも関連するアプローチがある。

3.3 ゲインの切替え

本節では、前節で求めた許容集合を使ってゲインの切替えを行なうことを考える。

準備としてゲイン $\mathbf{K} = (K_{p1}, K_{p2}, K_{d1}, K_{d2})$ を n 個用意し、それぞれ $\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(2)}, \dots, \mathbf{K}^{(n)}$ と書く。ただしゲインの各成分が次第に大きくなるように、すなわち $K_{p1}^{(1)} \leq K_{p1}^{(2)} \leq \dots \leq K_{p1}^{(n)}, K_{p2}^{(1)} \leq K_{p2}^{(2)} \leq \dots \leq K_{p2}^{(n)}$ などとなるように設定する。各ゲインに対して 3.2 節の方法を適用し n 個の許容集合 $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ を得る。また、適当な時間の刻み幅 $\Delta t > 0$ を選ぶ。このとき、初期状態に関する仮定 $[\mathbf{q}_0^T \ \dot{\mathbf{q}}_0^T]^T \in A^{(1)}$ のもとで、つぎの切替え型制御則を考える。

Step 1. 現在の状態を測定し、 $[\mathbf{q}(t)^T \ \dot{\mathbf{q}}(t)^T]^T \in A^{(k)}$ となる最大の k を見つける。

Step 2. Step 1 で見つけた k に対応するゲイン $\mathbf{K}^{(k)}$ を使って時間 Δt だけ制御する。

Step 3. Step 1 に戻る。

このとき任意の $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、ゲイン $\mathbf{K}^{(k)}$ を使った制御は $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in A^{(k)}$ なる状態から始めるので制約を破ることはない。また制約を破らないゲインの中で最大のものを使うため早く目標値 $\mathbf{0}$ に収束すると期待できる。

Fig. 3 The computed admissible sets $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ and the constraint set X (Their cross sections with $\dot{q}_1 = 0$ and $\dot{q}_2 = 0$)

4. 数値実験

4.1 許容集合の計算

実際に SICE-DD アームの許容集合を求める最適化問題を解く. ゲイン $\mathbf{K} = (K_{p1}, K_{p2}, K_{d1}, K_{d2})$ として

$$\mathbf{K}^{(1)} = (10, 4, 4, 0.8),$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = (15, 6, 6, 1.2),$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = (30, 12, 12, 2.4)$$

を用いるとき, これらに対する許容集合 $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ は 3.2 節の方法で

$$A^{(1)} = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) | V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 7.2\},$$

$$A^{(2)} = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) | V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 4.3\},$$

$$A^{(3)} = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) | V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 1.2\}$$

と求められる. この許容集合と制約集合 X の $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ における断面を **Fig. 3** に示す. ゲインが小さければ許容集合は大きく, ゲインが大きければ許容集合は小さくなることを確認できる.

4.2 ゲインの切替え

本節では, 前節で求めた許容集合 $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ を用いてゲインの切替えを行なう. Δt は 3 ms とする.

最も小さいゲイン $\mathbf{K}^{(1)}$ のみを使った場合と, 3.3 節の切替え型制御則を使ってゲイン $\mathbf{K}^{(1)}$, $\mathbf{K}^{(2)}$, $\mathbf{K}^{(3)}$ を切り替えた場合の 2 つについて, 関節 1 の角度 q_1 の時間変化を **Fig. 4** に, 関節 2 の角度 q_2 の時間変化を **Fig. 5** に示す. ただし初期状態を

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\pi \end{bmatrix}$$

とした. ゲインを切り替えた場合のほうが早く目標値 $\mathbf{0}$ に近づいており, 切替え型制御則の効果が確認できる. また, 制約 $|q_1| \leq \pi/2$, $|q_2| \leq 2\pi/3$ を破っていないことも確認できる.

Fig. 4 The time response of the first joint angle $q_1(t)$. The solid line shows the response with the switching gain while the dotted line shows the response with the constant gain.

Fig. 5 The time response of the second joint angle $q_2(t)$

同じ場合における関節 1 への入力トルク τ_1 と関節 2 への入力トルク τ_2 の時間変化を, それぞれ **Fig. 6** と **Fig. 7** に示す. ゲインを切り替えた場合には, 時刻 $t = 0.012$ s にゲイン $\mathbf{K}^{(1)}$ から $\mathbf{K}^{(2)}$ への切り替えが, 時刻 $t = 0.165$ s にゲイン $\mathbf{K}^{(2)}$ から $\mathbf{K}^{(3)}$ への切り替えがなされている. 特にこれらの切替え時刻において, ゲインを切り替えた場合にはゲイン $\mathbf{K}^{(1)}$ のみを使った場合と比べて大きなトルクが入力されており, 積極的な制御がなされていることが確認できる. 一方で制約 $|\tau_1| \leq 70$, $|\tau_2| \leq 15$ を破っていないことも確認できる.

以上を総合して, 提案手法が有効であることが確認できる.

5. 一般化

本論文では SICE-DD アームを例として切替え型制御則の設計法を提案したが, 動特性が(1)式で表わされるロボットの PD フィードバック制御であれば基本的に同じ方法が適用できる. またロボット以外にも, 受動性に基づく制御など Lyapunov 関数が陽に得られる制御を使っていれば同じ方法が適用でき

Fig. 6 The input torque to the first joint $\tau_1(t)$ Fig. 7 The input torque to the second joint $\tau_2(t)$

る。さらに、Lyapunov 関数が陽に得られない一般の非線形システムの制御でも、文献 8), 9) にあるように 2 乗多項式を使って Lyapunov 関数を求めておけば適用可能である。ただし、いずれの場合も Lyapunov 関数が多項式でなければ Lyapunov 関数の上下界となる多項式を求める必要がある。Lyapunov 関数が複雑な場合には、このような多項式が容易に得られないこともあると思われ、系統的な方法の開発が必要と考える。

6. おわりに

本論文では SICE-DD アームを例にとり、制約をもつ非線形システムのゲインの切替えによる制御を提案した。また、そのための許容集合の計算を 2 乗多項式を用いた最適化問題に定式化した。2 乗多項式を用いる方法は非線形性をもつ多くの問題に適用できるが、計算量が大きくなりがちであるのが欠点である。計算量を抑制するために、本論文では Lyapunov 関数として既知のものを用いた。用いた Lyapunov 関数は三角関数を含むため多項式ではないが、現われる三角関数の上下界となる多項式を使うことで許容集合を計算できる。また数値実験によって提案した手法の有効性を確認した。

謝辞 本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金および 2007, 2008 年度南山大学パッヘ研究奨励金 I-A-2 の補助を受けている。

参考文献

- 1) E.G. Gilbert and K.T. Tan: Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**-9, 1008/1020 (1991)
- 2) G.F. Wredenhagen and P.R. Bélanger: Piecewise linear LQ control for systems with input constraints, *Automatica*, **30**-3, 403/416 (1994)
- 3) E.G. Gilbert, I. Kolmanovsky and K.T. Tan: Discrete-time reference governors and the nonlinear control of systems with state and control constraints, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **5**-5, 487/504 (1995)
- 4) 平田研二: 不変集合を利用した拘束システムの解析と制御系設計への応用, システム/制御/情報, **47**-11, 507/513 (2003)
- 5) R.H. Miller, I. Kolmanovsky, E.G. Gilbert and P.D. Washabaugh: Control of constrained nonlinear systems: a case study, *IEEE Control Systems Magazine*, **20**-1, 23/32 (2000)
- 6) M.W. McConley, B.D. Appleby, M.A. Dahleh and E. Feron: A computationally efficient Lyapunov-based scheduling procedure for control of nonlinear systems with stability guarantees, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**-1, 33/49 (2000)
- 7) 平田研二: あるクラスの非線形システムに対する最大出力許容集合の構成手順, 計測自動制御学会論文集, **41**-6, 544/546 (2005)
- 8) P.A. Parrilo: Structured semidefinite programs and semi-algebraic geometry methods in robustness and optimization, Ph.D. thesis, Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, Pasadena, USA (2000)
- 9) A. Papachristodoulou and S. Prajna: Analysis of non-polynomial systems using the sum of squares decomposition, *Positive Polynomials in Control* (D. Henrion and A. Garulli, eds.), 23/43, Springer, Berlin, Germany (2005)
- 10) W. Tan and A. Packard: Stability region analysis using sum of squares programming, *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, 2297/2302, Minneapolis, USA (June 2006)
- 11) B. Tibken and Y. Fan: Computing the domain of attraction for polynomial systems via BMI optimization method, *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, 117/122, Minneapolis, USA (June 2006)
- 12) 小林尚登ほか: ロボット制御の実例, コロナ社, 東京 (1997)
- 13) M.W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar: *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Hoboken, USA (2006)
- 14) J.B. Lasserre: Global optimization with polynomials and the problem of moments, *SIAM Journal on Optimization*, **11**-3, 796/817 (2001)
- 15) P.A. Parrilo: Semidefinite Programming relaxations for semialgebraic problems, *Mathematical Programming*, **96**-2, 293/320 (2003)
- 16) P. Apkarian and R.J. Adams: Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **6**-1, 21/32 (1998)
- 17) I. Masubuchi, A. Kume and E. Shimemura: Spline-type solution to parameter-dependent LMIs, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1753/1758, Tampa, USA (December 1998)

- 18) C.W. Scherer: Robust performance analysis for parameter dependent systems using tensor product splines, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 2216/2221, Tampa, USA (December 1998)
- 19) G. Chesi and Y.S. Hung: Trajectories bounds for nonlinear systems: a BMI approach, *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 4001/4006, New Orleans, USA (December 2007)

=====

[著 者 紹 介]

石 川 真 生

2006 年千葉大学法経学部経済学科卒業。2008 年東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻修士課程修了。制御理論，最適化理論に興味をもつ。

大 石 泰 章（正会員）

1993 年東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了。95 年同大学助手，2001 年同講師。2007 年より南山大学数理情報学部准教授，現在に至る。博士（工学）。ロバスト制御，サンプル値制御，数理計画法アプローチに興味をもつ。システム制御情報学会，IEEE などの会員。

=====