モード切り換え型制御系の評価方法に関する一考察

不破 勝彦*・成 清 辰 生**・神 藤 久*

A Study on Evaluation Method of Mode Switing Control Systems

Katsuhiko FUWA*, Tatsuo NARIKIYO** and Hisashi KANDOH*

Two design methods of IVC (Initial Value Compensation) gain which are called the J-min method and the zero-assign method have been proposed. In this note, the inverse problem, namely, the problem which minimizes the performance index in the J-min method by a given IVC gain is investigated, and the relationship between design methods is clarified.

Key Words: mode switching control, initial value compensation, pole-zero cancellation, Lyapunov equation

1. はじめに

磁気ヘッドの位置決め制御において多用されるモード切り換え型制御系^{1),2)}では、各モードに対応した制御器の切り換えに伴う応答の劣化を抑制するため、切り換え時に制御器の内部変数を再設定する初期値補償 (Initial Value Compensation, 以降 IVC と略記) が行なわれる^{1),2)}。この補償には、切り換え後の閉ループ系の状態変数に関する 2 乗積分値を最小化する評価関数最小型 (J-min method)¹⁾や零入力応答に関する伝達関数の極と零点とを相殺する極零相殺型 (zero-assign method)²⁾が報告されている。しかしながら、極零相殺型において、何らかの評価関数のもとで時間応答を評価するようなことは考えられていない。

本稿では、極零相殺型において評価関数最小型で用いられる評価関数を導入し、そのときに指定できる重み行列のクラスを明らかにする問題を考察する。この問題の考察により、極零相殺型の IVC の設計に評価関数が導入できるといった側面だけでなく、たとえば実応用上指定される制御量応答を記述する重み行列は、極零相殺型の IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列のクラスに属さないことが示され、2 つの型は必ずしも同じ評価関数で議論できないことが明確になる点で意義があると考えられる。

2. 問題の設定

制御対象 $G_p(s)$ はつぎの状態方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x_p(t) \end{cases} \quad (1)$$

により記述されるものとする。ただし、 $x_p(t)$ は n_p 次元状態変数、 $u(t)$ は 1 次元制御入力、 $y(t)$ は 1 次元制御量であり、 A_p, B_p, C_p はおのおの適当な次元の定数行列、 (A_p, B_p) は可

制御対、 (C_p, A_p) は可観測対とする。モード切り換え型制御系を構成したときの切り換え後の制御器 $G_c(s)$ は

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c \{r(t) - y(t)\} \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c \{r(t) - y(t)\} \end{cases} \quad (2)$$

として最小実現がなされているものとする。ただし、 $x_c(t)$ は n_c 次元状態変数、 $r(t)$ は 1 次元目標入力であり、 A_c, B_c, C_c, D_c はおのおの適当な次元の定数行列である。このとき、切り換え後の閉ループ系は安定化されるものとし

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3)$$

なる状態方程式により記述される。ただし

$$A := \begin{bmatrix} A_c & -B_c C_p \\ B_p C_c & A_p - B_p D_c C_p \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} B_c \\ B_p D_c \end{bmatrix}, \\ C := [O_{1 \times n_c} \quad C_p], x(t) = [x_c(t)^T \quad x_p(t)^T]^T$$

とする。 $x_p(0)$ は測定可能として^{1),2)}、制御器の状態変数の初期値 $x_c(0)$ を定数行列 (IVC ゲイン) K を用いて

$$x_c(0) = K x_p(0) \quad (4)$$

としたとき、 $x_p(0)$ から $y(s)$ までの伝達関数 $G_{op}(s)$ は

$$G_{op}(s) = \frac{N_c(s)K + N_p(s)}{\det(sI_n - A)}$$

となる。ただし、 $C \text{adj}(sI_n - A) = [N_c(s) \quad N_p(s)]$, $n := n_c + n_p$ とし、行列 $N_c(s)$ は 1 行 n_c 列である。以下、評価関数最小型と極零相殺型の IVC ゲインについて述べた後、本稿にて考察される問題が与えられる。

2.1 評価関数最小型

つぎの評価関数 J

$$J = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \quad (5)$$

の値を最小にする IVC ゲイン $K = K_e$ を求める方法である。ただし、 Q は $(Q^{\frac{1}{2}}, A)$ を可観測対とするような準正定行列である。 A は安定であるので、 J はリアプノフ方程式

$$A^T P + PA + Q = O_{n \times n} \quad (6)$$

* 名古屋工業大学 名古屋市昭和区御器所町

** 豊田工業大学 名古屋市天白区久方 2 丁目 12-1

* Nagoya Institute of Technology, Showa-ku, Nagoya

** Toyota Technological Institute, Tenpaku-ku, Nagoya

(Received March 11, 2009)

の正定解 P を用いて

$$J = x(0)^T P x(0) = [x_c(0)^T \ x_p(0)^T] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(0) \\ x_p(0) \end{bmatrix}$$

として記述される. J は $x_c(0)$ に対して最小値が存在し, 評価関数最小型の IVC ゲイン K_e は

$$K_e = -P_{11}^{-1} P_{12} \quad (7)$$

として一意に定まる.

2.2 極零相殺型

$G_{op}(s)$ が有する応答の遅い極を相殺するように, その零点が配置される IVC ゲイン $K = K_c$ を求める方法である. 簡単のため, 各列要素の分子多項式において, 共通の零点 λ_i ($i = 1, \dots, l$ ($l \leq n_c$)) が配置される場合を考える. このとき, 極零相殺型の IVC ゲイン K_c は

$$N_p(\lambda_i) + N_c(\lambda_i) K_c = O_{1 \times n_p}, \quad i = 1, \dots, l \quad (8)$$

の連立方程式を解くことにより得られる.

2.3 問題の設定

評価関数最小型の IVC ゲイン K_e を用いて

$$N_p(s) + N_c(s) K_e = O_{1 \times n_p}$$

の解 s を求めれば, 配置されている零点を知ることはできる. しかし, 極零相殺型の IVC ゲイン K_c により最小化される評価関数 J の重み行列は不明である. このことは, 極零相殺型で評価関数最小型の評価関数を導入することができるか否かも不明であることを意味するが, まずは何らかの評価関数で極零相殺型による応答が評価できることを明らかにすることは, IVC の基礎的研究として意義があると考えられる. そこで, 本稿ではつぎの問題を考える.

[問題] 与えられた IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列のクラスを求めよ. $\square$

3. 重み行列のクラス

本章では, 以下の手順に従い問題の考察を行なう.

(1) 与えられた IVC ゲインが評価関数最小型のゲインの構造をもつための条件を, 求めるべき重み行列を含んだリアプノフ方程式として定式化する (3.1 節の議論).

(2) 上記リアプノフ方程式が可解であるための条件を明らかにし, 与えられた IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列のクラスを求める (3.2 節の議論).

(3) 極零相殺型の IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列のクラスを求める (3.3 節の議論).

3.1 与えられた IVC ゲインによるリアプノフ方程式

(7) 式より, 与えられた IVC ゲイン K が

$$P_{11}K + P_{12} = O_{n_c \times n_p} \quad (9)$$

により表現されれば, 評価関数最小型の IVC で用いられている評価関数を導入することができる.

いま, IVC ゲイン K , 行列 A そして重み行列 Q が与えられているものとする. (6) 式の P を用いて (9) 式が満足されたとすれば

$$T := \begin{bmatrix} I_{n_c} & K \\ O_{n_p \times n_c} & I_{n_p} \end{bmatrix}$$

により

$$T^T P T = \begin{bmatrix} P_{11} & O_{n_c \times n_p} \\ O_{n_p \times n_c} & P_p \end{bmatrix} =: \bar{P}, \quad P_p := P_{22} + K^T P_{12}$$

であり, $\bar{A} := T^{-1} A T, \bar{Q} := T^T Q T$ とすれば (6) 式は

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} + \bar{Q} = O_{n \times n} \quad (10)$$

として記述される.

逆に, (10) 式が満足されているものとすれば

$$\tilde{P} := T^{-T} \bar{P} T^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & -P_{11}K \\ * & K^T (P_{11}K + P_{12}) + P_{22} \end{bmatrix}$$

とすると

$$A^T \tilde{P} + \tilde{P} A + Q = O_{n \times n}$$

が成り立つ. A は安定行列であるので

$$A^T P + P A + Q - A^T \tilde{P} - \tilde{P} A - Q = O_{n \times n}$$

であるための必要十分条件は $P - \tilde{P} = O_{n \times n}$ である. それゆえ, (6) 式の解 P で (9) 式が成り立つ.

以上より, つぎの補題が成り立つ.

[補題 1] 与えられた K が評価関数最小型の IVC ゲインの構造をもつための必要十分条件は, (10) 式のリアプノフ方程式が正定解 $\bar{P}$ を有することである. $\blacksquare$

(注意) 補題 1 は, 本節以降において指定可能な重み行列を求めるための第 1 段階として得られたものである. $\square$

それゆえ, 問題は与えられた IVC ゲイン K により (10) 式を満足するような重み行列を求めることに帰着される.

3.2 リアプノフ方程式の可解性

補題 1 より, (10) 式が可解でなければ, (9) 式を満足する P_{11}, P_{12} は得られないので, その可解性を考察する.

$\bar{A}$ を

$$\bar{A} =: \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

と分割する. ただし

$$\bar{A}_{11} = A_c - K B_p C_c, \quad \bar{A}_{22} = A_p - B_p D_c C_p + B_p C_c K$$

$$\bar{A}_{21} = B_p C_c, \quad \bar{A}_{12} = -K \bar{A}_{22} + A_c K - B_c C_p$$

である. 重み行列 $\bar{Q}$ を

$$\bar{Q} =: \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{11} \geq O_{n_c \times n_c}, \quad \bar{Q}_{22} \geq O_{n_p \times n_p}$$

と分割し, $(\bar{Q}_{ii}^{\frac{1}{2}}, \bar{A}_{ii})$ は $i = 1, 2$ に対して可観測対とする. いま, (10) 式の正定解 $\bar{P}$ が存在するとしよう. このとき

$$\bar{A}_{11}^T P_{11} + P_{11} \bar{A}_{11} + \bar{Q}_{11} = O_{n_c \times n_c} \quad (11)$$

$$\bar{A}_{22}^T P_p + P_p \bar{A}_{22} + \bar{Q}_{22} = O_{n_p \times n_p} \quad (12)$$

が $P_{11} > O_{n_c \times n_c}, P_p > O_{n_p \times n_p}$ にて成り立ち, それゆえ $\bar{A}_{ii}$ ($i = 1, 2$) は安定行列である³⁾. 逆に, $\bar{A}_{ii}$ ($i = 1, 2$) が安定行列であるとき, (11) 式および (12) 式を満足する正定解 P_{11} および P_p が存在する. これらの解を用いて

$$\bar{Q}_{12} = -\bar{A}_{21}^T P_p - P_{11} \bar{A}_{12}$$

とすると(10)式が成り立つ。それゆえ、リアプノフ方程式(10)式の可解性は、つぎの定理により記述される。

《定理1》 $\left(\bar{Q}_{ii}^{\frac{1}{2}}, \bar{A}_{ii}\right)$ は $i=1, 2$ に対して可観測対となる準正定行列 $\bar{Q}_{ii}$ ($i=1, 2$) が与えられているとする。このとき、(10)式が可解であるための必要十分条件は、 $\bar{A}_{ii}$ ($i=1, 2$) が安定行列となることである。■

定理1より、与えられた K により行列 $\bar{A}_{ii}$ ($i=1, 2$) が安定になれば(10)式は可解となり、(5)式の評価関数を最小化する K となる。このとき、重み行列 Q のクラスは

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ * & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし

$$\begin{aligned} Q_{12} &= -(\bar{Q}_{11}K + \bar{A}_{21}^T P_p + P_{11} \bar{A}_{12}) \\ Q_{22} &= -K^T Q_{12} + (P_p \bar{A}_{21} + \bar{A}_{12}^T P_{11})K + \bar{Q}_{22} \end{aligned}$$

として得られる。ここで、 $\bar{Q}_{ii}$ ($i=1, 2$) は $\left(\bar{Q}_{ii}^{\frac{1}{2}}, \bar{A}_{ii}\right)$ が $i=1, 2$ に対して可観測対となる任意の準正定行列である。(13)式より、 $\bar{Q}_{11}$ は任意に与えることができるが、それ以外のブロック行列は P_p に依存することから任意に与えることは困難である構造を有することがわかる。

3.3 極零相殺型に対する重み行列のクラス

つぎに、相殺される閉ループ極の数と制御器の次数が一致していることを仮定して、行列 $\bar{A}_{ii}$ ($i=1, 2$) の安定性を考察する。いま、閉ループ系において (C, A) は可観測対とする。 $\bar{C} := CT$ とすると $(\bar{C}, \bar{A})$ は可観測対であるので、極零相殺型の IVC ゲイン K_c を施したときの伝達関数 $G_{op}(s)$

$$G_{op}(s) = \bar{C} (sI_n - \bar{A})^{-1} \begin{bmatrix} O_{n_c \times n_p} \\ I_{n_p} \end{bmatrix}$$

において、極と零点とが相殺されるのは対 $\left(\bar{A}, \begin{bmatrix} O_{n_c \times n_p} \\ I_{n_p} \end{bmatrix}\right)$ の不可制御極 λ_{uc} である。このとき

$$\text{rank} \left[\bar{A} - \lambda_{uc} I_n \begin{bmatrix} O_{n_c \times n_p} \\ I_{n_p} \end{bmatrix} \right] < n$$

より

$$\text{rank} [\bar{A}_{11} - \lambda_{uc} I_{n_c} \quad \bar{A}_{12}] < n_c$$

である。仮定より λ_{uc} は n_c 個あるので $\bar{A}_{12} = O_{n_c \times n_p}$ でなければならない。それゆえ、 $\bar{A}_{ii}$ ($i=1, 2$) は安定行列であり、任意の準正定行列 $\bar{Q}_{ii}$ ($i=1, 2$) に対して、(11)式および(12)式を満足する正定解 P_{11} および P_p が存在する。

$$\bar{Q}_{12} = -\bar{A}_{21}^T P_p$$

とすると(10)式が成り立ち、 K_c により最小化される評価関数の重み行列のクラスは(13)式において

$$\begin{aligned} Q_{12} &= -(\bar{Q}_{11}K_c + \bar{A}_{21}^T P_p) \\ Q_{22} &= -K_c^T Q_{12} + P_p \bar{A}_{21} K_c + \bar{Q}_{22} \end{aligned}$$

として得られる。ただし、 $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{22}$ は $K = K_c$ によるものである。

さて、制御量応答を記述する重み行列は $Q = C^T C$ であるので、 $\bar{Q}_{11} = O_{n_c \times n_c}, \bar{Q}_{12} = O_{n_c \times n_p}$ でなければならない。

$\bar{A}_{11}$ は安定行列であるので、(11)式の解 $P_{11} = O_{n_c \times n_c}$ でなければならない。しかしながら、 P_{11} は正定行列であることを要求するので、このような重み行列は極零相殺型の IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列のクラスには属さない。それゆえ、制御量応答に関する極零相殺型の IVC は、制御量応答を記述する重み行列による評価関数最小型の評価関数では評価できないことがわかる。

4. 数 値 例

極零相殺型の IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列を具体的に計算してみよう。

制御対象 $G_p(s)$ および制御器 $G_c(s)$ はおのこの

$$G_p(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+10)(s+50)} \quad (14)$$

$$G_c(s) = \frac{(s+4)(s+6)}{(s+5)(s+20)} \quad (15)$$

とし、 $x_p(0)$ は制御対象が可観測標準形により実現されているものとして $x_p(0) = [10 \ 5 \ 2]^T$ とする。このとき、閉ループ極は $\lambda_1 = -51.7, \lambda_2 = -19.2, \lambda_3 = -10.1, \lambda_4 = -5.00, \lambda_5 = -1.00$ となる。制御器の次数は2であり、絶対値が小さい極 λ_4, λ_5 を相殺する IVC ゲイン K_c は制御器も可観測標準形により実現されているものとして

$$K_c = \begin{bmatrix} -47.6 & 47.6 & -47.7 \\ -9.51 & 9.52 & -9.54 \end{bmatrix}$$

である。 $\lambda(\bar{A}_{11}) = \{\lambda_4, \lambda_5\}, \lambda(\bar{A}_{22}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ であり、 $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{22}$ はともに安定行列になっている。 $\bar{Q}_{11} = 2I_2, \bar{Q}_{22} = I_3$ とすると、(13)式の Q の各ブロック行列 Q_{12}, Q_{22} は

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \begin{bmatrix} 9.51 & -9.52 & 9.53 \\ 1.90 & -1.89 & 1.80 \end{bmatrix} \times 10 \\ Q_{22} &= \begin{bmatrix} 4.71 & -4.71 & 4.70 \\ * & 4.71 & -4.71 \\ * & * & 4.70 \end{bmatrix} \times 10^3 \end{aligned}$$

として得られる。

5. おわりに

本稿では、極零相殺型において評価関数最小型で用いられる評価関数を導入し、そのときに指定可能な重み行列を求める問題を考察した。その結果、制御量応答を記述する重み行列は、極零相殺型の IVC ゲインにより最小化される評価関数の重み行列のクラスに属さず、2つの型はともに制御量応答を評価しているにもかかわらず、同じ評価関数では議論できないことが明らかとなった。

参 考 文 献

- 山口, 宍田, 平井: 磁気ディスク装置ヘッド位置決めサーボ系におけるサーボモード切り換え時の初期値補償問題の基礎検討, 計測自動制御学会論文集, **29**-7, 792/799 (1993)
- 山口, 宍田, 平井: モード切り換え型制御系の初期値補償設計と磁気ディスク装置ヘッド位置決めサーボ系への適用, 計測自動制御学会論文集, **31**-6, 780/788 (1995)
- 木村, 藤井, 森: ロバスト制御, 17/18, コロナ社 (1994)