D スケーリング近似を用いない低次元 H_∞ 制御器の μ 設計

小 川 将 司*・佐 伯 正 美*

μ -synthesis of Low Order H_∞ Controller without D -scale Fitting

Masashi OGAWA* and Masami SAEKI*

In this paper, we propose a new approach for synthesizing low order H_∞ controllers without using the rational approximation of the D -scale in the DK -iteration. This approach can be executed on the frequency domain. The sequence of the H_∞ norm of the scaled closed-loop function is guaranteed to be nonincreasing.

Key Words: μ -synthesis, robust control, low order controller, numerical optimization

1. はじめに

μ 設計^{1),2)}では、構造化特異値の上界を最小化するための方法として、 DK 反復法が用いられている。 μ 解析で得られるスケーリング行列 $D(\omega)$ は離散的な周波数点で与えられるので、このゲイン特性を近似する有理関数が用いられてきた。しかしながら、これによりスケール付の一般化プラントは高次元となり、 H_∞ 制御理論によって得られる制御器 K も高次元となる。さらに、近似が悪いとスケールされた H_∞ ノルムが単調に減少しないので、文献3)では周波数領域での設計法を提案している。しかしながら、彼らの方法では制御器は高次元となる。本稿では、周波数領域における低次元 H_∞ 制御器の部分的な数値最適化法⁴⁾と μ 解析を組み合わせた DK -反復法を提案する。これにより、有理関数近似が不要となり、低次元の制御器を設計できる。数値実験で有効性を示す。

2. 問題設定

Fig. 1 の制御系を考える。 $G(s) = [G_{i,j}(s)]$ は n 次元の一般化プラントであり、以下の仮定が満たされているとする。これは標準的な H_∞ 問題の仮定に対応している。

- (G1) $G(s)$ は、ある $K(s) \in \mathcal{K}$ により安定化できる。
- (G2) $G_{11}(j\omega)$, $G_{12}(j\omega)$, $G_{21}(j\omega)$ がすべての ω に対して有界。
- (G3) $G_{12}(j\omega)$ がすべての ω に対して列フルランク。
- (G4) $G_{21}(j\omega)$ がすべての ω に対して行フルランク。
- (G5) $G_{22}(\infty) = 0$ 。

$K(s)$ は (1) 式で表わされる n_k 次元の低次元制御器であり、モデルの不確かさ Δ の集合は大きさが $\|\Delta\|_\infty < 1$ で (2) 式の構造を有する。

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K \quad (1)$$

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_F) \in \mathcal{C}^{m_1 \times m_1} \quad (2)$$

Fig. 1 System configuration for controller synthesis

ここに $z \in \mathcal{R}^{m_1}, y \in \mathcal{R}^{m_2}, w \in \mathcal{R}^{m_1}, u \in \mathcal{R}^{m_2}$ である。 Δ を除去した w から z への閉ループ伝達関数を $T_{zw}(s)$ で表わす。ここでは、 μ 設計の DK -反復法で扱われる問題に、制御器の次数制約を付加した問題を扱う。

設計問題 閉ループ系を安定化し、次式を $\gamma = 1$ で満たす低次元制御器 $K(s)$ と $D(\omega) \in \mathcal{D}$ を求めよ。

$$\sigma_{\max}[D(\omega)T_{zw}(j\omega)D(\omega)] < \gamma, \quad \omega \in R \quad (3)$$

$$\mathcal{D} = \{\text{diag}(d_1 I_{q_1}, \dots, d_{m_1} I_{q_{m_1}}) : d_i \in \mathcal{R}, d_i > 0\} \quad (4)$$

3. 部分的最適化法

文献4)では、制御対象の周波数応答データに基づいて、構造が固定された H_∞ 制御器を部分的に数値最適化する方法を与えた。この方法は (1) 式で表わされる制御器の4つの係数行列のうち C_K , D_K (もしくは B_K , D_K) 行列をパラメータとして、 $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ を単調減少させる制御器の列を与える勾配法である。この方法では、閉ループ系を安定化する n_k 次元の低次元制御器を初期値としている。数値実験では、 H_∞ 制御器に低次元化法を適用して得られる制御器を初期値に用いて実用に足る良好な結果が得られている。

この方法の概略を説明する。詳細は文献4)を参照されたい。(3) 式は次式の $K(j\omega)$ に関する双線形行列不等式で表わせる。

$$KPK^* + KL^* + LK^* + R > 0, \quad \omega \in R \quad (5)$$

* 広島大学大学院工学研究科 東広島市鏡山 1-4-1

* Graduate School of Engineering, Hiroshima University, 1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima

(Received April 7, 2009)

(Revised May 28, 2009)

係数行列は周波数に依存する複素数の定数行列であり、 $P(j\omega)$ の正定性や負定性に依存して (5) 式を満たす C_K, D_K の集合が凸や非凸となるので、 $P(j\omega)$ を 3 つの場合に分けて (5) 式の十分条件である C_K, D_K についての線形行列不等式 (LMI) 条件を与えている。LMI 制約条件を次式のように略記する。

$$F_\omega(C_K, D_K) < 0, \quad \omega \in R \quad (6)$$

この中心解を用いて勾配方向を計算し，直線探索を行なう．
これを繰り返して局所解を求める．

問題設定の仮定 (G3) と (G4) について補足する。文献 4) では, (3) 式から (5) 式を導出するために, 特異値分解 $G_{12} = U_{12}\Sigma_{12}V_{12}^*$ を求め, $L_1 = \Sigma_{12}V_{12}^*$ の逆行列を用いている。この可逆性は (G3) により保証される。なお, (G4) は式の導出に用いていない。これより, アルゴリズムが実行可能なためには, (G4) は省くことができ, (G3) は「サンプル周波数で $G_{12}(j\omega)$ が列フルランク」という条件に緩めることができる。これにより汎用性が増すものの悪条件の設計問題になる危険性がある点と本稿では H_∞ 制御理論の解を低次元化して得られた安定化制御器を初期値に用いている点から, 問題設定では標準 H_∞ 制御問題の仮定を与えた。

4. 数値最適化アルゴリズム

(6) 式を離散的な周波数点 $\omega = \omega_l, l = 1 \dots N$ で満たす解を求めることとする。評価関数は次式で表わされる。

$$\gamma(D, K) = \max_{\omega} [\sigma_{\max}\{D(\omega)T_{zw}(j\omega, K)D^{-1}(\omega)\}] \quad (7)$$

Step 1 $D = D_0 = I$ として, n_k 次元の安定化制御器 K_0 を与える. $i = 0$.

Step 2 K_i を初期値として，部分的最適化法を適用して， $D = D_i$ に固定し， $\gamma(D_i, K)$ が単調非増加となる安定化制御器の列 $K_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, ite$ を求める (ite は反復回数であり， $ite = 1000$ のように大きくとる場合には，別に与えた γ の収束条件により， ite に至る前に反復を終了する． $ite = 3$ のように小さい場合には収束判定のまえに反復回数を満たしたことにより，反復を終了する)．こうして得られた解を K_{i+1} とする．

Step 3 $K = K_{i+1}$ に固定し $\gamma(D, K_{i+1})$ を最小化する $D_{i+1}(\omega)$ を μ 解析で求める. μ の上界値 μ_u が 1 より小であれば終了する.

Step 4 $i = i + 1$ として, Step 2 へ行く.

Step 2 では単調非増加な解が得られ, Step 3 では問題が凸であるので最小解が得られる. これらを反復するので評価関数列は単調非増加となる.

Step 3 の計算負荷は軽い⁸, Step 2 では ite を大きくして解が収束条件を満たすまで反復すると計算負荷は大きくなる. このため, ite をあまり大きくせずに Step 2 の計算を打ち切り, Step 3 の計算を増やすのが適当かと予想される. これはつぎの数値実験で検討する.

Fig. 2 Block diagram of HIMAT

5. 数值例

戦闘機のピッチ軸制御問題 HIMAT²⁾に適用する。Fig. 2で、点線部は一般化プラント G を表わし 8 次である。ノミナルモデル P 、重み関数 W_{del} , W_P は次式で与えられる。文献 2) では従来の DK 反復法により、スケーリング行列 D を 3 次の有理関数行列で近似し 14 次の制御器が得られている。

$$P(s) = \left[\begin{array}{cccc|cc} -0.023 & -37 & -19 & -32 & 0 & 0 \\ 0 & -1.9 & 0.98 & 0 & -0.41 & 0 \\ 0.012 & -12 & -2.6 & 0 & -78 & 22 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (8)$$

$$W_{del}(s) = \frac{50(s+100)}{s+10000}I_2, \quad W_P(s) = \frac{0.5(s+3)}{s+0.03}I_2 \quad (9)$$

モデル誤差の構造とスケーリング行列 $D(\omega)$ が次式で与えられる.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}; \Delta_1 \in \mathcal{C}^{2 \times 2}, \Delta_2 \in \mathcal{C}^{2 \times 2} \quad (10)$$

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} d_1(\omega)I_2 & 0 \\ 0 & d_2(\omega)I_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

計算機は、CPU: Intel Core2 Duo 3.16GHz, メモリ: 3.25GB RAM, OS: Microsoft Windows XP Professional Ver.2002, プログラムは MATLAB R2007b, ‘SEDUMI for interface’⁵⁾, ‘SEDUMI solver’⁶⁾を用いた.

周波数点は 10^{-4} から 10^6 rad/sec まで対数目盛りで等間隔に 100 点与えた。平衡化打ち切り法で低次元化し、3 次以下に低次元化した場合は安定化初期ゲインが得られなかったため、4 次以上に対して計算した。

$ite = 1000$ と $ite = 3$ の場合の計算結果を **Table 1** と **Table 2** に示す. n_k は低次元化次数, $\mu_{\mathbf{u}\{1\}}$ は初期ゲインに対する μ_u , j_{all} は K の探索に要した繰返し回数 j の合計, i は D を求めた回数, $\mu_{\mathbf{u}\{ite\}}$ は $\mu_u < 1$ となるのはじめの μ_u の値, time が計算時間を表わす.

ite = 3, $n_k = 4$ の場合の $\bar{\sigma}(DT_{zw}D^{-1})$ の周波数特性を **Fig. 3** に, 反復回数 j_{all} における μ_u の減少のようすは **Fig. 4** に, $D(\omega)$ の要素 d_1, d_2 の周波数特性は **Fig. 5** に示す. 図中の ‘start’, ‘end’ はそれぞれ初期ゲインに対する $d_2(\omega)$ の周波数特性と $\mu_u < 1$ が達成されたときのそれを示している. 常に $d_1(\omega) = 0$ dB である.

Table 1 Numerical calculation results for $ite = 1000$

n_k	$\mu_{u\{1\}}$	j_{all}	i	$\mu_{u\{ite\}}$	time [s]
8	1.6828	184	3	0.9996	174
7	1.6902	246	4	0.9997	195
6	1.6902	162	4	0.9999	129
5	1.7053	131	3	0.9999	101
4	3.5999	257	6	0.9999	186

Table 2 Numerical calculation results for $ite = 3$

n_k	$\mu_{u\{1\}}$	j_{all}	i	$\mu_{u\{ite\}}$	time [s]
8	1.6828	158	53	0.9993	128
7	1.6902	173	58	0.9995	146
6	1.6902	119	40	0.9996	86
5	1.7053	135	45	0.9984	94
4	3.5999	147	49	0.9997	108

ite がどちらの場合でも、設計問題を満足する 8 次から 4 次の低次元制御器を求めることができた。Table 1 と Table 2 を比較すると、 $ite = 3$ の場合のほうがすべての n_k において少ない計算時間で $\mu_u < 1$ を達成できている。よって、 γ が

Fig. 3 Frequency characteristics of $\bar{\sigma}(D_i T_{zw\{j\}} D_i^{-1})$, ($ite = 3$, $n_k = 4$) **Fig. 4** Sequence of μ upper bound $\mu_u\{j\}$, $j_{all} = 1, 2, \dots$, ($ite = 3$, $n_k = 4$) **Fig. 5** Frequency characteristics of $d_2(\omega)$, $d_1 = 0$ dB, ($ite = 3$, $n_k = 4$)

収束するまで K の探索を繰り返すよりも、 γ が下がりにくなくても数回の反復で得られる K を解として、 D の探索に移るようにしたほうが効率的であると期待される。

6. あとがき

本稿の提案法では、 D の有理関数近似を必要としないので、評価関数の単調非増加性が保証される。従来の DK 反復では手で近似次数を入力しており手間がかかるが、提案法では不要である。数値実験で D と K の計算負荷が計算時間に及ぼす影響を評価し、適切な配分を示した。プラントの状態方程式は初期値の安定化制御器を求める際に有用であるが、その他のステップは周波数応答のみで実行できる。

参考文献

- 1) K. Zhou, J. Doyle and K. Glover: *ROBUST AND OPTIMAL CONTROL*, PRENTICE HALL Inc. (1996)
- 2) G. Balas, J. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith: *μ -Analysis and Synthesis TOOLBOX*, The MATH WORKS Inc. (1994)
- 3) K.Y. Tsai, H.A. Hindi: DQIT: μ synthesis without D-scale fitting, *Proc. of the American Control Conference*, Anchorage, 493/498(2002)
- 4) M. Saeki, M. Ogawa and N. Wada: Low-order H_∞ controller design on the frequency domain by partial optimization, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (to appear)
- 5) D. Peacelle, D. Henrion, Y. Labit and K. Taitz: *User's Guide for SEDUMI interface 1.04* (2002)
- 6) J.F. Sturm: Using SEDUMI 1.02(ver. 1.05), *A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones* (2001)