動的補償器による多様体上の非線形制御系の大域漸近安定化

都 築 卓有規*・山下 裕**

Global Asymptotic Stabilization for a Nonlinear System on a Manifold via a Dynamic Compensator

Takayuki TSUZUKI* and Yuh YAMASHITA**

The purpose of this paper is to solve a global asymptotic stabilization problem for a nonlinear control system on a manifold with a complete metric. As well known, a system on a noncontractible manifold is not globally asymptotically stabilizable via a continuous feedback law. This problem results from the existence of multiple singular points of such a controlled system. It is shown that if all singular points can be assigned to a subspace of the extended state space using a dynamic compensator and a continuous feedback except for at most one jump, then the augmented system becomes globally asymptotically stable. Moreover, a method for stabilization is developed using a dynamic compensator and a global control Lyapunov function for an input-affine system. Finally, we propose a method for constructing the control Lyapunov function for a system such that the dimension of the coefficient matrix of the input is equal to the dimension of the state.

Key Words: global asymptotic stabilization, nonlinear system, dynamic compensator, Lyapunov function

1. はじめに

本論文では、完備な距離をもつ n_x 次元多様体上で定義された非線形時不変制御系の静的状態フィードバックによる大域漸近安定化問題を扱う。 n_x は状態の次元である。本論文ではつぎの3つを新たに提案する。1) 一般的な非線形制御系に対し、ただか1回のジャンプをもつ動的補償器を用いた大域漸近安定化条件。2) 入力アファイン系について上記動的補償器と制御 Lyapunov 関数による大域漸近安定化条件。3) 入力の係数行列の階数が n_x である入力アファイン系の上記安定化制御則の設計法。

本論文が対象とする多様体上の制御系の大域漸近安定化問題については、Sontag により「状態空間が一点可縮ではない制御系は連続制御則では大域漸近安定化不可能である」ことが示されている¹⁾。大域漸近安定化不可能である原因の1つとして、任意の閉ループ系が複数の特異点（平衡点）をもつことが考えられる。この問題点を扱った安定化制御則の設計法としては、勾配的 Morse-Smale 制御系の設計法^{2), 3)}、制御 Lyapunov-Morse 関数 (CLMF) による設計法^{4), 5)}がある。また、中村らが局所半凹な CLF を用いた大域漸近安定化制

御則の設計法⁶⁾を提案している。多様体上の制御系についての安定化制御則設計以外の研究として、Malisoff らによる大域漸近可制御性から不連続制御則の存在性を示したもの⁷⁾がある。

勾配的 Morse-Smale 制御系の設計法では、従来の意味での大域漸近安定化の概念を緩和し、ほとんど至るところ大域漸近安定化を実現する C^∞ 級制御則設計を扱っている。ほとんど至るところ大域漸近安定とは、Lebesgue 測度 0 の集合を除いた任意の初期状態をもつ解軌道が原点（目標値）に収束することである。一方文献 4), 6) による設計法では、状態について不連続な大域漸近安定化制御則を設計している。

本論文では動的補償器により状態空間を拡大することで、1回のジャンプ以外で連続な制御則での大域漸近安定化を目的としている点で上記従来研究と異なる。本提案法の概要は以下のとおりである。 n_p 次元の動的補償器を利用することで $n_x + n_p$ 次元の拡大系を構成する。最初に与えられた安定化すべき n_x 次元の制御系を元の系と呼ぶことにする。動的補償器分の状態の自由度を利用し、1) 拡大系のすべての特異点が元の系の原点上に存在し、2) 任意の解軌道が特異点集合に収束する、ような連続制御則を設計できると仮定する。このとき元の系の状態は原点に収束する。

本論文の構成は以下のとおりである。

- 次章では、多様体上の制御系の大域漸近安定化問題の障害を示す。

- 第3章において、本論文の基礎となる動的補償器を用いた連続制御則による原点への収束条件について述べる。さらに、動的補償器の状態ジャンプ系を用いた原点への大域

* 島根大学総合理工学部 松江市西川津町 1060

** 北海道大学大学院情報科学研究科 札幌市北区北 14 西 9

* Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Nishikawatsu-cho 1060, Matsue

** Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University, Kita-ku N14W9, Sapporo

(Received November 12, 2009)

(Revised October 1, 2010)

漸近安定化法を提案する。

- 第4章では、入力アファイン系について、3章の問題をCLFの観点から再構成する。
- 第5章では、入力係数行列が行フルランクであるシステムについて、4章で得られた大域漸近安定化制御則を導くCLFの構成法を提案する。

2. 多様体上の制御系の大域漸近安定化における障害

つぎの一般的な非線形時不変制御系を考える。

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, u), \quad x \in \mathbb{X}, u \in \mathbb{U} = \mathbb{R}^m \quad (1)$$

ただし x は状態, u は入力であり, 写像 $\tilde{f}$ は x, u についてなめらかであり, $\mathbb{X}$ の接ベクトル空間 $T_x\mathbb{X}$ 上に値をもつと仮定する. 状態空間 $\mathbb{X}$ は完備な距離をもつ n_x 次元多様体とし, 入力空間 $\mathbb{U}$ は m 次元 Euclid 空間と同相とする. 状態空間 $\mathbb{X}$ で安定化したい点を $0_x \in \mathbb{X}$ と書き, 系 (1) の原点と呼ぶ. 本研究では系 (1) の原点の大域漸近安定化を目的とする.

状態について連続な時不変フィードバック制御則をつぎのように表現する.

$$u = k(x) \quad (2)$$

本論文では, 連続制御則により制御された系 (3) は唯一解をもつと仮定する.

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, k(x)), \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

制御された系の特異点を以下で定義する.

【定義】 制御された系 (3) について,

$$\tilde{f}(x^*, k(x^*)) = 0 \quad (4)$$

を満足する点 $x^* \in \mathbb{X}$ を, 制御された系 (3) の特異点と呼ぶ.

◆

Euclid 空間とは限らない多様体上で定義された制御系についてつぎの結果がよく知られている¹⁾.

《定理1》 非線形時不変制御系 (1) の状態空間 $\mathbb{X}$ が一点可縮でないならば, そのとき制御系 (1) は連続な状態フィードバック制御則では大域漸近安定化不可能である.

◆

〔例題〕 例題としてつぎの簡単な系を考える.

$$\dot{\theta} = u, \quad \theta \in S^1, u \in \mathbb{R} \quad (5)$$

ただし u は入力, θ は状態とする. S^1 は1次元球面であり, 閉区間 $[-\pi, \pi]$ の境界を同一視したものとする, すなわち $\pi = -\pi$. この系は局所的には線形可制御系だが, 状態空間の非線形性より大域的には非線形制御系である. 状態空間 S^1 は一点可縮ではないため, 定理1より系 (5) は連続制御則では大域漸近安定化不可能である代表的な例である.

原点の局所漸近安定化は, なめらかな制御則 $u = -\sin \theta$ で実現可能である. しかし, この制御則を用いても原点は大域漸近安定化されない. なぜならば, $\theta = \pm\pi$ に閉ループ系

の特異点がある, すなわち $\theta = \pm\pi$ に停留解が存在するためである. 他の連続制御則による大域漸近安定化の可能性についてだが, 定理1以外に Poincaré-Hopf の相対指数定理⁸⁾や Morse 不等式⁹⁾を用いることでも, 任意の連続制御則で大域漸近安定化できないことを示すことができる.

◆

以上の例題のように, 原点以外の特異点の存在性が, 多様体上の制御系の安定化問題の大きな障害となっている. 次章では, 動的補償器により全特異点のある部分空間に制限することで, 多様体上の制御系を連続制御則により元の系の原点に収束させ, さらにジャンプ系を構成し大域漸近安定化を実現する.

3. 動的補償器による大域漸近安定化法

3.1 問題の定式化

制御系 (1) について, 動的補償器を用いて次式で表現される拡大系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x, u) \\ \dot{p} &= v \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $p, v \in \mathbb{R}^{n_p}$ は動的補償器の状態, 入力を意味する. n_p は任意の正の整数である. 拡大系の状態空間は $\bar{\mathbb{X}} := \mathbb{X} \times \mathbb{R}^{n_p}$, 入力空間は $\bar{\mathbb{U}} := \mathbb{U} \times \mathbb{R}^{n_p}$ とする. 拡大状態空間上の点 $(x, p) = (0_x, 0)$ を, 拡大系 (6) の原点と呼ぶ.

本論文では (2) 式の形の制御則を使わず, 拡大系 (6) に対して,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^u(\bar{x}) \\ k^v(\bar{x}) \end{pmatrix} =: k(\bar{x}) \quad (7)$$

のような制御則を考える. ただし, $\bar{x} := (x, p) \in \bar{\mathbb{X}}$, 任意の $\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}}$ について $k^u(\bar{x}) \in \mathbb{U}$, $k^v(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_p}$ である.

拡大系の制御則 $k: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}$ について制御された系は次式となる.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x, k^u(\bar{x})) \\ \dot{p} &= k^v(\bar{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

もし元の系 (1) の状態空間 $\mathbb{X}$ が一点可縮でないならば, 拡大系の状態空間 $\bar{\mathbb{X}}$ もまた一点可縮ではない. これより, どのような連続制御則を用いても系 (8) の原点を大域漸近安定化することができないことは明らかである. しかし本論文では, 状態空間の次元を増やすことにより可能となる特異点の位置についての自由度を利用することで, 動的補償器を除いた元の系の原点の大域漸近安定化を実現することを考える.

最初に元の系の原点への収束性をつぎで定義する.

【定義】 制御系 $k: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}$ について, 制御された拡大系 (8) の解が有限逃避時間をもたず, かつつぎの2つの条件を満足するならば, 拡大系の解は制御則 k により元の系 (1) の原点 $0_x \in \mathbb{X}$ に収束するという.

(大域安定性) 拡大系の原点 $(0_x, 0)$ は Lyapunov の意味で安定かつ, 任意の初期状態に対し解軌道が有界である.

(収束性) 任意の初期状態 $\bar{x}_0 \in \bar{\mathbb{X}}$ について, 系 (8) の解 $\bar{x}(t)$ の x -部分が 0_x に収束する, すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) \in \{0_x\} \times P^* \subset \bar{\mathbb{X}} \quad (9)$$

が成立する. P^* は $\bar{x}_0$ に依存する $\mathbb{R}^{n_p}$ 上のある有界集合である.

◆

上記の収束性の定義では, 動的補償器の状態 p の値が 0 に収束することを要求せず, その極限が有界であることだけを必要としている. これは, 制御された拡大系 (8) の原点 $(0_x, 0)$ が, x について大域的に部分漸近安定¹⁰⁾で, かつ $p(t)$ の ω -極限集合が有界である制御則 k が存在すること, と等価である.

3.2 動的補償器を用いた元の系の原点への収束条件

以上の準備の下, つぎの定理が導かれる.

《定理 2》 制御則 $k: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}$ で制御された系 (8) が, つぎの条件を満足すると仮定する.

(i) プロパーな C^∞ 級弱 Lyapunov 関数 $V: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する. すなわち, 以下を満たす V が存在する:

プロパー性 V の任意のレベル集合 $\bar{\mathbb{X}}^\alpha = \{\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \mid V(\bar{x}) \leq \alpha\}$ ($\forall \alpha > 0$) がコンパクトである.

正定性 任意の $\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \setminus (0_x, 0)$ で $V(\bar{x}) > 0$, かつ $V(0_x, 0) = 0$.

軌道に沿っての弱減少性 任意の $\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \setminus (0_x, 0)$ で

$$\dot{V}(\bar{x}) := D_{\bar{x}}V(\bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}(x, k^u(\bar{x})) \\ k^v(\bar{x}) \end{pmatrix} \leq 0 \quad (10)$$

を満たす. $D_{\bar{x}}V(\bar{x})$ は V の点 $\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}}$ 上の $*$ についての微分である. ある局所座標 x を用いれば $D_{\bar{x}}V(\bar{x}) = \partial V / \partial x(\bar{x})$ である.

(ii) 上記の Lyapunov 関数で以下を満たすものが存在する. $\dot{V}(\bar{x}) = 0$ を満たす点はつぎで定義される集合 $\bar{\mathbb{X}}_{x=0_x}$ に含まれる, すなわち

$$\{\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \mid \dot{V}(\bar{x}) = 0\} \subset \bar{\mathbb{X}}_{x=0_x} := \{\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \mid x = 0_x\} \quad (11)$$

である.

(iii) 制御された系 (8) の不変集合が有限個の孤立特異点の集合で構成される.

このとき, 拡大系の解は制御則 k により元の系の原点 0_x に収束する. ◆

(証明) 仮定 (i) より大域安定性は明らかである.

仮定 (ii) より, $\dot{V}(\bar{x}) = 0$ が成立するのは $\bar{\mathbb{X}}_{x=0_x}$ 上のみである. 一方, 不変原理よりすべての解軌道は $\{\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \mid \dot{V}(\bar{x}) = 0\}$ 上の不変集合に収束する. したがって, 仮定 (ii), (iii) より (9) 式を満足するある P^* が存在し, 拡大系の解は制御則 k により 0_x に収束することが示される. □

次節でジャンプ系を構成し, 原点の大域漸近安定化を実現する.

Fig. 1 A solution $\bar{x}(t)$ starting from $\bar{x}_0$ in a neighborhood of the stable manifold of e

3.3 ジャンプ系による大域漸近安定化

定理 2 の条件を満たせば制御系 (8) のすべての解は特異点集合に収束はするが, 不安定特異点が存在するとき以下の問題が発生する. 1 つは, 不安定特異点に収束した解は外乱などに対してロバストではないこと. 2 つ目として解が遠回りするような挙動をすることである. たとえば Fig. 1 のように, ある不安定特異点 e の安定多様体の近傍内の点 $\bar{x}_0$ から出発する解 $\bar{x}(t)$ について考える. この解は, いったん e に近づいた後に安定特異点 q に収束する. このためベクトル場の連続性より e 近傍を出発し q の近傍へ到達する解の集合について, その解集合が q 近傍へ到達する時間のある有限時間 T で抑えることが不可能という問題も発生する. 本来の目的は $x \rightarrow 0_x$ であるので, $e \in \bar{\mathbb{X}}_{x=0_x}$ 近傍に近づいた後に離れるような制御をする必要はない.

これらの問題を解決するため, 簡単な不連続制御則として動的補償器の状態 p のジャンプを用いることが考えられる. 解軌道 $\bar{x}(t)$ が不安定特異点 $e \in \bar{\mathbb{X}}_{x=0_x}$ の r -近傍内に入った時間 $\tau \geq 0$ に, 補償器の状態 $p(\tau)$ を $p(\tau^+) = 0$ へとジャンプさせる. これは解軌道 $\bar{x}(t)$ が安定平衡点の 1 つである拡大系の原点 $(0_x, 0)$ 近傍にジャンプすることを意味し, その後原点へと収束することが期待できる. すなわち, たかだか 1 回のジャンプで拡大系の原点 $(0_x, 0)$ を大域漸近安定化できる. 具体的には以下のジャンプ系を構成する.

半径 r , 中心 $\bar{x}_c$ の閉球体を $B(r, \bar{x}_c)$ とする. ある正定数 r と $(0_x, 0)$ 以外の特異点 $e_1, \dots, e_s$ について, つぎの状態ジャンプ系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x, k^u(\bar{x})) \\ \dot{p} &= k^v(\bar{x}) \\ p(\tau^+) &= 0, \text{ if } \bar{x}(\tau) \in \bigcup_{i=1, \dots, s} B(r, e_i). \end{aligned} \quad (12)$$

このとき, つぎの定理を得る.

《定理 3》 制御則 $k: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}$ により制御された系 (8) が定理 2 の仮定 (i), (ii), (iii) を満たすと仮定する. このときつぎの 2 つが成立する.

(I) 拡大系の原点 $(0_x, 0)$ が大域漸近安定となる定数 $r > 0$ が存在する. すなわち, 系は Lyapunov 安定であり, 任意の初期状態についてジャンプ系 (12) の解 $\bar{x}^J(t)$ が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}^J(t) = (0_x, 0) \quad (13)$$

を満たす r が存在する.

(II) すべての初期状態 $\bar{x}_0$ と, (I) が成立する r について

$$\bar{x}^J(t) \in B(\varepsilon, (0_x, 0)), \quad \forall t \geq T(\|\bar{x}_0\|) \quad (14)$$

となるような正定数 ε と関数 $T: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在する. ただし, $\|\bar{x}_0\|$ は $\bar{\mathbb{X}}$ 上で定義された $(0_x, 0)$ と $\bar{x}_0$ との距離である. ◆

(証明) 系 (8) について, 定理2の仮定 (i), (ii) と (iii) より, 原点 $(0_x, 0)$ は局所漸近安定特異点である. したがって, 任意の小さい定数 $\varepsilon > 0$ について,

$$\bar{x}(t) \in B(\varepsilon, (0_x, 0)), \quad \forall t \geq 0, \forall \bar{x}_0 \in B(\delta, (0_x, 0)) \quad (15)$$

を満たす $\delta > 0$ が存在する. $\varepsilon \geq \delta$ は自明である.

この ε, δ よりジャンプ系 (12) の r を, $r \leq \delta$ かつ次式を満たすように選ぶことができる.

$$B(\varepsilon, (0_x, 0)) \cap \left(\bigcup_{i=1, \dots, s} B(r, e_i) \right) = \emptyset \quad (16)$$

仮定 (i), (ii), (iii) より, 任意の初期状態について解軌道 $\bar{x}^J(t)$ はジャンプせずに $(0_x, 0)$ に収束するか, または $(0_x, 0)$ 以外の特異点 $e_1, \dots, e_s$ の r -近傍に入りジャンプが発生する. 前者は問題ないので, 後者についてだけ考える. (16) 式より, ある時間 τ でジャンプが起きると

$$\begin{aligned} \bar{x}^J(\tau^+) &\in B(\delta, (0_x, 0)) \\ \bar{x}^J(t) &\in B(\varepsilon, (0_x, 0)), \quad \forall t > \tau \end{aligned} \quad (17)$$

が成立する. また, 局所漸近安定性より解軌道は $(0_x, 0)$ に収束する. 結果として, すべての解は原点 $(0_x, 0)$ に収束する, すなわち (I) は示された. 以上より, ジャンプ系 (12) のジャンプはせいぜい1回だけであることもわかる.

以降で (II) を示す. 系 (8) は大域安定なので, 各初期状態 $\bar{x}_0$ について

$$\|\bar{x}(t)\| \leq M_1, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (18)$$

を満たす正定数 $M_1 > \varepsilon$ が存在する. M_1 は $\|\bar{x}_0\|$ に依存する. 閉部分集合 $B(M_1, (0_x, 0)) \subset \bar{\mathbb{X}}$ から $(0_x, 0)$ の ε -開近傍と他の特異点 $e_1, \dots, e_s$ の r -開近傍を除いた集合

$$B(M_1, (0_x, 0)) \setminus \text{int} \left\{ B(\varepsilon, (0_x, 0)) \cup \left(\bigcup_{i=1, \dots, s} B(r, e_i) \right) \right\} \quad (19)$$

はコンパクトで特異点を含まない. int は集合の内部を表わす. すなわち部分集合 (19) 上で, 系 (8) のベクトル場は非零なので, 定理2の仮定より $\dot{V}(\bar{x}) \neq 0$ を満たす Lyapunov 関数 V が存在する. これより, 部分集合 (19) 上の任意の $\bar{x}$ について

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -M_2 \quad (20)$$

を満たす正定数 M_2 が存在する.

以上の準備の下, (II) を満たす関数 T の存在性を背理法により示す. もし T が存在しないならば, (20) 式より $V(\bar{x}(t))$ はある時間以降で負値をとる. これは Lyapunov 関数 V の正定性に矛盾する. したがって, 正定数 ε と関数 T の存在性は示された. □

ジャンプ系 (12) の解が系 (8) の解より速く $x \rightarrow 0_x$ に収束するかはベクトル場, 初期状態, r に依存する. しかし, 定理3の (II) より, 任意の初期状態 x_0 について解軌道は有限時間 $T(\|x_0\|)$ 以内に原点 $(0_x, 0)$ の ε -近傍に到達することがわかる. 系 (8) で $(0_x, 0)$ に収束する初期状態に限っても, このような T の存在性は一般には成立しない.

解 $\bar{x}^J(t)$ は t について不連続であるが, 動的補償器の状態 p だけが不連続であり, 実際の制御対象の状態 x は連続である. また, 証明中でも述べているが任意の初期状態から始まる解軌道のジャンプの回数は多くても1回だけである. したがってチャタリング現象は発生しない.

この章では, 多様体上の非線形系について, 動的補償器による元の系の原点への収束条件と, それとジャンプを組み合わせた方法による大域漸近安定化条件について示した. しかし, 一般定非線形制御系について定理2の条件を満たす制御則を見つけることは困難であるため, 入力についてアファインな系について CLF を用いて制御則を設計する方法を提案する.

4. 制御 Lyapunov 関数による大域漸近安定化

この章では, 制御系 (1) を入力についてアファインな制御系に制限する.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x, u) = f(x) + G(x)u \\ G(x) &= (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし, $f, g_1, \dots, g_m$ はなめらかなベクトル場で $f(0_x) = 0$ とする.

4.1 拡大系の制御 Lyapunov 関数の定義

最初に関数の臨界点を定義する. 拡大系の状態空間 $\bar{\mathbb{X}}$ 上のなめらかな関数 $V: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\text{grad}V(\bar{x}^c) = 0 \quad (22)$$

を満たす点 $\bar{x}^c \in \bar{\mathbb{X}}$ を臨界点と呼ぶ.

拡大系 (6) の制御 Lyapunov 関数をつぎで定義する.

【定義】 関数 $V: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ を正定, プロパー, なめらかと仮定する. さらにつぎの2つの条件を満足するとき, 関数 V を拡大系 (6) の一般化制御 Lyapunov 関数 (GCLF) と呼ぶ.

- V は臨界点以外の任意の点 $\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}}$ で

$$\inf_{(u,v) \in \bar{\mathbb{U}}} \{ D_x V(\bar{x}) \cdot (f(x) + G(x)u) + D_p V(\bar{x}) \cdot v \} < 0 \quad (23)$$

を満たす.

- すべての臨界点は $\bar{\mathbb{X}}_{x=0_x}$ 上に存在する.

◆

以降では, 拡大系 (21) のある GCLF V について, CLF の場合¹¹⁾と同様に Sontag 制御則 $k_S: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}$ を用いる.

$$a(\bar{x}) := D_x V(\bar{x}) \cdot f(x), \quad (24)$$

$$b(\bar{x}) := (D_x V(\bar{x}) \cdot G(x), D_p V(\bar{x})) \quad (25)$$

$$k_S(\bar{x}) := \begin{cases} -\frac{a(\bar{x}) + \sqrt{|a(\bar{x})|^2 + |b(\bar{x})|^4}}{|b(\bar{x})|^2} b^T(\bar{x}), & b(\bar{x}) \neq 0 \\ 0, & b(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

CLF の場合と同様に, Sontag 制御則 k_S は部分空間 $\{\bar{x} \in \bar{\mathbb{X}} \mid b(\bar{x}) \neq 0 \text{ or } a(\bar{x}) < 0\}$ 上で解析的である, すなわち, GCLF の臨界点以外では k_S は解析的である¹¹⁾.

また, 上記の制御則において a, b は $\bar{\mathbb{X}}$ 上の点 $\bar{x}$ での接ベクトルと余接ベクトルの内積となっており局所座標系に依存しない, すなわち, 制御則 k_S は局所座標系に依存しない.

臨界点での k_S の連続性については, CLF の場合と同様に, 小入力特性を用いて保証することができる.

【定義】 $\bar{x}^c \in \bar{\mathbb{X}}$ を拡大系の GCLF V の臨界点とする. 任意の ε について, 各 $\bar{x} \in \text{int}B(\delta, \bar{x}^c) \setminus \{\bar{x}^c\}$ で

$$\inf_{(u,v) \in \text{int}B(\varepsilon, (0,0))} \{a(\bar{x}) + b(\bar{x}) \cdot (u,v)^T\} < 0 \quad (27)$$

を満たす $\delta > 0$ が存在するならば, GCLF V は臨界点 $\bar{x}^c$ で小入力特性をもつという. ◆

与えられた GCLF がすべての臨界点で小入力特性をもつならば, k_S は全状態空間 $\bar{\mathbb{X}}$ で連続である.

拡大系の GCLF は, 複数の臨界点をもつという点で CLF¹¹⁾と異なり, 臨界点を $\bar{\mathbb{X}}_{x=0_x}$ 上に制限し退化した臨界点も許容する点で CLMF⁴⁾と異なる.

[注 1] 上述の CLF, CLMF を含む広義の CLF が文献 1) で定義されている. これは多様体上の制御系にも定義可能であるが, Sontag 制御則 (26) 式が大域漸近安定化制御則となるとは限らない. すなわち, 上記制御則による連続制御則による大域漸近安定化問題には適用不可能である. そのため本論文で CLF とは文献 11) の定義の意味で用いている. ◆

4.2 GCLF と動的補償器による大域漸近安定化

拡大系の GCLF を用いて, 定理 2 をつぎのように書き直すことができる.

《定理 4》 拡大系 (6) の GCLF $V: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ で

- V の臨界点は孤立しており有限個であり,
- V のすべての臨界点で小入力特性をもつ,

を満たすものが存在すると仮定する. このとき, V から誘導される k_S により制御された系 (8) は定理 2 の仮定を満たす. ◆

証明は自明である.

上記より, 定理 4 の条件を満たす拡大系の GCLF V を少なくとも 1 つ見つければ, 連続制御則 k_S とジャンプ系 (12)

により大域漸近安定化を実現できる.

つぎの章では, 制御系についてさらに制限を加えた場合に, 定理 4 の条件を満たす GCLF を構成する方法を示す.

5. $G(x)$ が行フルランクな場合の GCLF 構成法

この章ではつぎで表現できる系について考える.

$$\dot{x} = G(x)u \quad (28)$$

$$G(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$$

ただし, 任意の $x \in \mathbb{X}$ について

$$\text{rank } G(x) = n_x \quad (29)$$

を満たし, 動的補償器の次元を 1 に固定する, すなわち $n_p = 1$. 系 (28) については, 任意の C^∞ 級関数 V は (23) 式を満たす. また, 任意の拡大系の GCLF がすべての臨界点で小入力特性を満たす.

[注 2] ランク条件 (29) より, $n_x \leq m$ が必要条件である. 特に $n_x = m$ のとき, $G(x)$ のなめらかさを仮定しているので, 元の系の状態空間 $\mathbb{X}$ は平行化可能多様体¹²⁾である必要がある. 多様体 $\mathbb{X}$ が平行化可能多様体であるとは, 多様体上の n_x 個のベクトル場 $v_1, \dots, v_{n_x} \in T\mathbb{X}$ が任意の点 $x \in \mathbb{X}$ で接空間 $T_x\mathbb{X}$ の基底となるときにいう. これは, 接バンドルが自明であることと等価である. たとえば 1 次元球面は平行化可能だが, 2 次元球面は平行化不可能な多様体である. ◆

[注 3] ランク条件 (29) より $n_x \leq m$ であるので, 局所的には $u = G^T(x)(G(x)G^T(x))^{-1}v$ とすると

$$\dot{x} = v \quad (30)$$

とより簡単な形にできる. しかし, 上述したように $\mathbb{X}$ が平行化可能多様体でなければ, 大域的に (30) 式の形に変形することは不可能である. しかも状態空間 $\mathbb{X}$ が多様体の場合には, 2 章の例題で示したように, 安定化問題は自明ではない. また, 後述する 6.2 節の例題で示すように, 局所座標と (30) 式を用いるより, 冗長な状態空間を用いた大域的な座標と $G(x)$ を陽に用いたほうがよい場合がある. ◆

系 (28) についてある正定でプロパーな C^∞ 級関数 $V_0: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. この V_0 の臨界点は s 個で孤立していると仮定し, そそれを $x_1^c, \dots, x_s^c \in \mathbb{X}$ と表わす. 1 次元の動的補償器を追加した拡大系について,

$$V_1(\bar{x}) := V_0(x) + p^2 \quad (31)$$

は s 個の臨界点 $\bar{x}_i^{c1} := (x_i^c, 0) \in \bar{\mathbb{X}}, i = 1, \dots, s$ をもつ. 系 (28) について座標変換を利用して V_1 を変形することで, 定理 4 を満たす拡大系の GCLF を構成するのが本章の目的である.

◇ Step1

最初に動的補償器の状態 p についての座標変換を利用して, V_1 からある関数 V_2 を誘導する.

元の系の状態空間 $\mathbb{X}$ 上の曲線 $c_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ はつぎの条件を

満たすと仮定する.

- c_0 はすべての臨界点 x_i^c を通過する.
- $c_0(0) = 0_x \in \mathbb{X}$.

曲線 c_0 は自己交叉をもっているもよい. またパラメータについて各臨界点 x_i^c を通る順番は任意であり, ある臨界点を何回通ってもよい. 以降では, 動的補償器の状態 p を c_0 のパラメータとする.

この曲線 c_0 より, 拡大系の状態空間 $\bar{\mathbb{X}}$ 上の曲線 $\bar{c}_0: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{X}}$ と点 $\bar{x}_i^{c2} \in \bar{\mathbb{X}}$ をつぎで定義する.

$$\begin{aligned}\bar{c}_0(p) &:= (c_0(p), p) \\ \bar{x}_i^{c2} &:= (x_i^c, p_i^c), \quad i = 1, \dots, s\end{aligned}\quad (32)$$

ただし p_i^c は集合 $c_0^{-1}(x_i^c)$ 上の任意の1点とする.

誘導したい関数 V_2 の臨界点が点 $\bar{x}_i^{c2}$ となるように設計するために, 次式を満たす任意の C^∞ 級関数 $P: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

$$P(x_i^c) = p_i^c, \quad i = 1, \dots, s \quad (33)$$

つぎの微分同相写像 $\bar{T}_1: \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{X}}$ を

$$\bar{T}_1(\bar{x}) := (\text{id}_x, p - P(x)) \quad (34)$$

と定義する. ただし id_x は $\mathbb{X}$ 上の恒等写像とする. V_1 と $\bar{T}_1$ より, 関数 V_2 をつぎで定義する.

$$V_2(\bar{x}) := V_1 \circ \bar{T}_1(\bar{x}) \quad (35)$$

関数 V_2 の臨界点は (32) 式で定義した $\bar{x}_i^{c2}$ である.

以上のような曲線 c_0 と関数 P が存在するのは自明であり, V_1 が与えられれば V_2 が存在するのは明らかである.

◇ Step2

定理4の条件を満たす拡大系の GCLF V_3 を V_2 から誘導する.

拡大系の状態空間 $\bar{\mathbb{X}}$ 上のある微分同相写像を $\bar{T}_2$ で

$$\bar{T}_2 := (T_2, \text{id}_p): \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{X}} \quad (36)$$

で表現できるものを考える. これを満たす写像 $T_2: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ は, p を固定したときに誘導される写像

$$T_2^p := T_2(\cdot, p): \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \quad (37)$$

が $\mathbb{X}$ 上の微分同相写像であることを必要とする.

関数 V_2 の各臨界点 $\bar{x}_i^{c2} = (x_i^c, p_i^c)$ について,

$$T_2(0_x, p_i^c) = T_2^{p_i^c}(0_x) = x_i^c \quad (38)$$

が成立する T_2 を考える. このとき $\bar{T}_2(0_x, p_i^c) = \bar{x}_i^{c2}$ であり, 次式で定義される関数

$$V_3(\bar{x}) := V_2 \circ \bar{T}_2(\bar{x}) = V_1 \circ \bar{T}_1 \circ \bar{T}_2(\bar{x}) \quad (39)$$

の臨界点は $\bar{x}_i^{c3} := (0_x, p_i^c)$ である.

V_1 から V_3 を誘導するために利用した写像 $\bar{T}_1$ と $\bar{T}_2$ は (x, p) についてのなめらかな座標変換なので, V_1 と同様に,

V_3 は正定, プロパーで C^∞ 級であり, 孤立臨界点のみをもつ. したがって, V_3 は定理4の条件を満たす拡大系の GCLF である.

$\bar{T}_1$ の存在は自明であるため, $\bar{T}_2$ の存在性を示す.

[補題1] 系 (28) について, (38) 式を満たす $\bar{\mathbb{X}}$ 上の微分同相写像 $\bar{T}_2$ が存在する. ◆

(証明) Step1 で考えた曲線 c_0 で自己交叉をもたないと仮定する. この c_0 について, つぎを満たす流れ $\varphi: \mathbb{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ が存在する.

$$\varphi(0_x, t) = c_0(t) \quad (40)$$

これより, 任意の p_i^c について $\varphi(0_x, p_i^c) = c_0(p_i^c) = x_i^c$ が成立する.

もし $T_2(x, p) := \varphi(x, p)$ とすれば

$$T_2(0_x, p_i^c) = \varphi(0_x, p_i^c) = x_i^c \quad (41)$$

が成立し, このような T_2 は (38) 式を満たす. この T_2 から (36) 式で誘導される $\bar{T}_2$ が求めるものになる.

曲線 c_0 が自己交叉をもつ場合には, 交叉をもたない部分に分解し上記のように T_2 を構成し, 最後になめらかに接続すればよい. □

系 (28) についてはドリフト項がないので, (26) 式の Sontag 制御則 k_S は $-L_G V(x)$ となり, 全状態空間 $\bar{\mathbb{X}}$ 上でなめらかとなる.

この章では, 系 (28) について定理4の条件を満たす GCLF V_3 を構成する方法を明らかにした.

6. 例題

6.1 $\mathbb{X} = S^1$ の場合

系 (28) の簡単な例として系 (5) を考える.

$$\dot{\theta} = u, \quad x \in S^1, \quad u \in \mathbb{R} \quad (42)$$

状態空間は S^1 なので, 平行化可能多様体であり大域的に (30) 式で記述できるが, 連続な制御則では大域漸近安定化不可能である. そのため動的補償器と GCLF を用いることで, $\theta = 0$ を大域漸近安定化する.

最初に系 (42) に関数

$$V_0(\theta) := 1 - \cos \theta \quad (43)$$

を定義する. V_0 の臨界点は $\theta_1^c = 0, \theta_2^c = \pi$ である. 系 (42) の拡大系はつぎとなる.

$$\dot{\theta} = u \quad (44)$$

$$\dot{p} = v, \quad p, v \in \mathbb{R} \quad (45)$$

つぎの関数

$$P(\theta) := 1 - \cos \theta \quad (46)$$

より微分同相写像 $\bar{T}_1$ が誘導され

$$V_2(\theta, p) := 1 - \cos \theta + (p - (1 - \cos \theta))^2 \quad (47)$$

が定義できる. V_2 の臨界点は $\bar{x}_1^{c2} = (0, 0)$, $\bar{x}_2^{c2} = (\pi, 2)$ である.

微分同相写像 $T_2(\theta, p) := \theta - \frac{\pi}{2}p$ は (38) 式を満たす.

$$\bar{T}_2(0, 0) = \bar{x}_1^{c2}, \quad \bar{T}_2(0, 2) = \bar{x}_2^{c2} \quad (48)$$

したがってつぎの V_3 は定理 4 の条件を満足する.

$$V_3(\theta, p) := 1 - \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}p \right) + \left\{ p - \left(1 - \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}p \right) \right) \right\}^2 \quad (49)$$

V_3 の臨界点は $\bar{x}_1^{c3} = (0, 0)$, $\bar{x}_2^{c3} = (0, 2)$ である.

Fig. 2 は V_3 の等高線図と制御則 k_S により制御された拡大系 (44), (45) の解軌道である. すべての解軌道が $\bar{x}_1^{c3}$ または $\bar{x}_2^{c3}$ に収束している. したがって, $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \rightarrow 0$ は達成されている.

Fig. 3 では, 初期状態 $\bar{x}_0$ について系 (8) とジャンプ系 (12) の解軌道が示されている. 系 (8) の軌道は破線であり, 一回 $\bar{x}_2^{c3}$ に近づいた後に $\bar{x}_1^{c3} = (-2\pi, 0)$ に収束している. 一方, ジャンプ系 (12) の軌道は実線であり, $\bar{x}_2^{c3}$ に近づいたら状態 p のジャンプが発生し原点 $\bar{x}_1^{c3} = (0, 0)$ に収束している. 一点破線は, 解のジャンプを示している. 今回のシミュレーションではジャンプ系 (12) について $r = 0.5$ とした.

Fig. 4, 5 は Fig. 3 の解軌道の時間応答を示している. Fig. 4 が系 (8), Fig. 5 が系 (12) の解である.

6.2 $\mathbb{X} = \text{SO}(3)$ の場合

三次元空間上の物体の姿勢制御について考える.

$$\dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} R \quad (50)$$

$R \in \text{SO}(3)$ は物体の姿勢を意味し, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は速度であり系の入力とする. $\text{SO}(3)$ は 3 次元特殊直交群で, その要素 R は行列式が 1 となる 3 次元直交行列 (回転行列) である.

状態 $R = I$ を目標値 0_x とし, $R = I$ の大域漸近安定化問題を考える. I は単位行列である. $\text{SO}(3)$ は一点可縮ではない 3 次元多様体なので, 系 (50) も連続制御則では大域漸近安定化不可能である. しかし系 (50) は系 (28) の 1 つであるので, 提案手法で $R = I$ へ大域漸近安定化可能である.

状態 R を四元数 $x := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ に変換する¹³⁾. x は $|x| = 1$ を満たす. 系 (50) はつぎに変換される.

$$\dot{x} = G(x)\omega := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & x_4 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & x_4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \omega \quad (51)$$

R と x の関係は次式で表現される.

Fig. 2 Contour plot of V_3 and trajectories

Fig. 3 Trajectories starting from $\bar{x}_0$

Fig. 4 Time responses of θ and p with no jump

Fig. 5 Time responses of θ and p with jump

$$R(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 & 2(x_1x_2 + x_3x_4) & 2(x_1x_3 - x_2x_4) \\ 2(x_1x_2 - x_3x_4) & -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 & 2(x_2x_3 + x_1x_4) \\ 2(x_1x_3 + x_2x_4) & 2(x_2x_3 - x_1x_4) & -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

写像 $R(\cdot)$ は $R(x) = R(-x)$ が成立し, 厳密には座標変換にはなっていない. 四元数表現の状態 x と $-x$ は同じ姿勢 R を表わしている. たとえば, 目標値 $R = I$ は $x = (0, 0, 0, \pm 1)$ の二通りの表現がある. このために四元数で表現された系 (51) の GCLF を採用すると, 一般には同一の回転行列 R を表現

する x と $-x$ で GCLF の値が異なってしまう。この問題は、系 (51) の GCLF を偶関数に限定することで解決できる。以下では数式の簡単化のため系 (51) の GCLF を採用しているが、元の回転行列系 (50) で考えていることと等価である。

[注4] 系 (52) の独立な状態は3次元であり、1つは冗長である。そのため $\text{rank}G(x) = 3$ となり、(30) 式の形には変形できない。局所座標系ならば (30) 式に変形できるが、ここでは大域的な座標として利用できる四元数を用いる。◆

系 (51) の V_0 として

$$V_0(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \quad (53)$$

を考える。この臨界点は以下の4つである。

$$\begin{aligned} x_1^c &:= (\pm 1, 0, 0, 0) & x_2^c &:= (0, \pm 1, 0, 0) \\ x_3^c &:= (0, 0, \pm 1, 0) & x_4^c &:= (0, 0, 0, \pm 1) \end{aligned} \quad (54)$$

目標値 $R = I$ は $x = x_4^c$ である。

V_3 を誘導する写像として以下が存在する。

$$c_0(p) := \begin{pmatrix} \cos h_1(p) \cos h_2(p) \sin h_3(p) \\ \cos h_1(p) \sin h_2(p) \\ \sin h_1(p) \\ \cos h_1(p) \cos h_2(p) \cos h_3(p) \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$P(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \quad (56)$$

$$T_2(x, p) := \mathcal{R}_1(h_1(p))\mathcal{R}_2(h_2(p))\mathcal{R}_3(h_3(p))x \quad (57)$$

ただし、

$$\begin{aligned} h_1(p) &:= \frac{\pi}{4}p(p-2)(p-3) \\ h_2(p) &:= -\frac{\pi}{4}p(p-1)(p-3) \\ h_3(p) &:= \frac{\pi}{12}p(p-1)(p-2) \\ \mathcal{R}_1(h) &:= \begin{pmatrix} \cos h & 0 & 0 & \sin h \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin h & 0 & 0 & \cos h \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_2(h) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos h & 0 & \sin h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin h & 0 & \cos h \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_3(h) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos h & \sin h \\ 0 & 0 & -\sin h & \cos h \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

である。

以上より $V_3(x, p) = V_1 \circ \bar{T}_1 \circ \bar{T}_2(x, p)$ が得られる。 V_3 は x についての偶関数であり、臨界点はつぎの4つである。

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^{c3} &= (x_4^c, 1), & \bar{x}_2^{c3} &= (x_4^c, 2) \\ \bar{x}_3^{c3} &= (x_4^c, 3), & \bar{x}_4^{c3} &= (x_4^c, 0) \end{aligned} \quad (59)$$

定理4より、GCLF V_3 から得られる制御則 k_S により、拡大系の解は元の系 (51) の点 x_4^c に収束する。

Fig. 6 は k_S により制御された拡大系のある解軌道の時間応答を示している。解軌道は $\bar{x}_4^{c3}$ 、すなわち四元数では x_4^c 、回転行列では $R = I$ に収束していることが確認できる。

7. ま と め

本論文では、完備な距離をもつ多様体上の非線形制御系に

Fig. 6 The solution starting the initial state $(x, p) = (-\sqrt{0.2}, \sqrt{0.1}, -\sqrt{0.1}, \sqrt{0.6}, 2)$

ついて動的補償器とたかだか1回以下のジャンプ以外で連続的な制御則による大域漸近安定化を実現する方法を提案した。さらに入力アフィン系について拡大系の GCLF を定義し、動的補償器による大域漸近安定化法を GCLF により表現し直した。最後に、制御系 (28) について、なめらかな大域漸近安定化制御則を導く拡大系の GCLF を構成する方法を明らかにした。

参 考 文 献

- 1) E.D. Sontag: Mathematical control theory; deterministic finite dimensional systems second edition, Texts in Applied Mathematics 6, Springer, New York (1998)
- 2) 榎本, 島: 配位空間上の制御理論と勾配的 Morse-Smale 制御系, システム制御情報, **43**-10, 529/537 (1999)
- 3) 榎本, 島: 微分位相幾何学と大域非線形制御理論, システム制御情報, **52**-3, 72/77 (2008)
- 4) 都築, 山下: 制御 Lyapunov-Morse 関数による大域漸近安定化, 計測自動制御学会論文集, **42**-6, 643/650 (2006)
- 5) 都築, 山下: 不連続制御系の解と大域漸近安定化問題, システム制御情報, **52**-3, 84/89 (2008)
- 6) H. Nakamura, Y. Yamashita and H. Nishitani: Minimum Projection Method for Nonsmooth Control Lyapunov Function Design on General Manifolds, Systems & Control Letters, **58**, 716/723 (2009)
- 7) M. Malisoff, M. Krichman and E. Sontag: Global stabilization for systems evolving on manifolds, Journal of Dynamical and Control Systems, **12**-2, 161/184 (2006)
- 8) C.C. Pugh: A generalized Poincaré index formula, Topology, **7**, 217/226 (1968)
- 9) J. Milnor: Morse theory, Princeton Univ. Press, Princeton (1963)
- 10) V.I. Vorotnikov: Partial Stability and Control, Birkhauser Boston (1997)
- 11) E.D. Sontag: A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, Systems & Control Letters, **13**, 117/123 (1989)
- 12) 日本数学会編集: 岩波数学辞典第4版, 岩波書店 (2007)
- 13) 姿勢制御研究委員会編集: 人工衛星の力学と制御ハンドブック: 基礎理論から応用技術まで, 培風館 (2007)

[著 者 紹 介]

都 築 卓有規 (正会員)

2007 年北海道大学大学院情報科学研究科博士後期課程修了。同年島根大学助教となり現在に至る。非線形制御理論の研究に従事。博士 (情報科学)。システム情報制御学会, IEEE などの会員。

山 下 裕 (正会員)

1986 年北海道大学大学院工学研究科修士課程修了。88 年同博士課程退学。同年北海道大学工学部助手。96 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授。2004 年北海道大学大学院情報科学研究科教授。現在に至る。非線形制御理論などの研究に従事。博士 (工学)。システム情報制御学会, 電子情報通信学会, IEEE などの会員。