スケール変換を介した連続極限解析による大規模カスケード システムの低次元化

石 崎 孝 幸*・加 嶋 健 司*・井 村 順 一*

Model Order Reduction for Large-scale Cascade Systems via Analysis in Continuum Limit through Scale Transformation

Takayuki ISHIZAKI*, Kenji KASHIMA* and Jun-ichi IMURA*

In this paper, we propose a model order reduction method for a class of high-dimensional cascade system and it is derived by making use of the fact that the input-output properties of the system approach that of a diffusion system, described by partial differential equations, at a certain continuum limit. Reduced systems preserve the diffusional structure and the stability of the original system. In addition, the upper bound of the error caused by the order reduction is derived.

Key Words: model order reduction, diffusion systems, large-scale systems, scale transformation

1. はじめに

近年、非常に多くの要素どうしが相互作用を及ぼしあって振る舞いが規定される、大規模システムに関する研究が盛んに行なわれている^{1)~3)}。大規模システムに対しては、要素数が膨大であることに起因する問題から、従来の解析・制御手法を直接的に適用することが困難な場合が生じる。たとえば、生体内部の遺伝子調節機構では膨大な数のタンパク質が相互作用を及ぼしあうことでシステムを構築しているが、こういったシステムに対し、ひとつひとつの物質の状態に注目して解析・制御を考えるのは、計算量や煩雑さの増加という観点から現実的とはいえない。そのため、大規模システムの煩雑さを緩和する方法のひとつとして、数多くのモデル低次元化手法が提案されている。その中でも、特異値分解を利用した平衡実現の打ち切りによる低次元化法や、計算機科学分野において有名な Krylov 部分空間を利用した低次元化法などがよく知られている^{1)~3)}。しかしながら、これらの手法では、システムが有する構造を陽に考慮することなく低次元化が行なわれるため、一般に結果として得られる低次元モデルにおいてその本質的な構造は保存されない。

ところで、たとえば気体は、微視的には分子という個々の要素から構成されているにもかかわらず、その分子たる離散性を感じさせることはなく、巨視的には連続的な振る舞いをみせる。このことから類推されるように、システムを

構成する要素数が非常に多い場合には、システムをほとんど空間的な連続体としてみなして扱い得ると考えられる。これはすなわち、システムの個々の状態に注目するのではなく、個々の集合としての巨視的な振る舞いに着目し解析を行なうということである。そこで本論文では、こうしたシステムのひとつである大規模カスケード線形システムに対して、その連続極限における拡散システムを起点とした、新たな低次元化法を提案する。本論文で扱うシステムは、適当なスケール変換を介した連続極限において、偏微分方程式で記述される連続な拡散システム^{4)~8)}に一致することが示される (**Fig. 1** 参照)。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、2章において本論文で扱うシステムを定義し、そのシステムが適当なスケール変換を介した連続極限において、空間的に連続な拡散システムに漸近することを示す。つぎに3章では、その拡散システムの空間離散モデルの解析を行ない、その特性を帯域を限定して近似する関数を導出する。そして、その近似関数を用いて、モデル低次元化における誤差の評価を解析的に与え、提案手法の有効性を数値例により確認する。最後に、4章で本論文の結論を述べる。

2. システムの解析

2.1 対象とするシステム

本論文では、次式に示すような、スカラーの入力 U および出力 Y に対して、各要素が近傍の要素と相互作用を及ぼしあう安定な n 次線形カスケードシステム

* 東京工業大学大学院情報理工学研究科 東京都目黒区 2-12-1
* Graduate School of Information Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Meguro-ku, Tokyo
(Received April 26, 2010)

Fig. 1 Process for model reduction

Fig. 2 Example: Formation of the vehicles

$$\begin{cases} s\Theta_n = \kappa(U - 2\Theta_n + \Theta_{n-1}) \\ \vdots \\ s\Theta_i = \kappa(\Theta_{i+1} - 2\Theta_i + \Theta_{i-1}) \\ \vdots \\ s\Theta_1 = \kappa(\Theta_2 - \Theta_1) \end{cases} \quad (1)$$

$$Y = \eta \sum_{i=1}^n \Theta_i$$

を扱う。ただし、 s はラプラス変数、 Θ_i は要素 i の有する物理量、正定数 κ は状態間の相互作用の強さを表わしており、 $\eta > 0$ はある定数である。いま、この n 次システムの伝達関数を $G_n(s)$ と表わす。このシステムの一例を Fig. 2 に示す。この図は n 台のビークルのフォーメーションを表わしており、入力 U はリーダーの位置座標、出力 Y はフォロワーの重心座標 ($\eta := 1/n$)、 κ はビークル間の相互作用の強さを表わしている。

Fig. 3 に、 $\kappa = 3$ および $\eta = 2$ とした場合の、 $G_n(s)$ ($n = 10, 100, 500, 1000$) のボード線図を示す。この図から、次数 n を増加させることによってシステムのボード線図が低周波数側に移動し、ゲインが大きくなっていくようすがうかがえる。すなわち、このシステムは要素数を増加させるにつれて、システムがより遅く、大きく振る舞うようになることを意味している。この傾向は n をいかなる値にとった場合にも生じることから、 $n \rightarrow \infty$ において $G_n(s)$ の極限は存在しない。

2.2 スケール変換を介したシステムの連続極限解析

本節では、 $G_n(s)$ に対してあるスケール変換を施したシステムが、偏微分方程式によって記述される拡散システムを空間離散近似したシステムとして解釈できることを示す。

まず、複素空間において定義された解析的な関数 $f(s)$, $g(s)$ に対し、スケール変換 T_n および T_n^{-1} を

$$\begin{cases} T_n(f(s)) := \frac{1}{\eta n} f\left(\frac{\kappa}{n^2} s\right) \\ T_n^{-1}(g(s)) := \eta n g\left(\frac{n^2}{\kappa} s\right) \end{cases} \quad (2)$$

により定義する。明らかに、 $T_n^{-1}(T_n(f)) = T_n(T_n^{-1}(f)) = f(s)$ を満たす。このとき、スケール変換が施されたシステム $T_n(G_n(s))$ は、入力 u および出力 y に対して

$$\begin{cases} s\theta_n = n^2(u - 2\theta_n + \theta_{n-1}) \\ \vdots \\ s\theta_i = n^2(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \\ \vdots \\ s\theta_1 = n^2(\theta_2 - \theta_1) \end{cases} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i$$

によって定義されたシステムと一致する。ここで、この $T_n(G_n(s))$ は、空間的一次元拡散システム

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \\ \theta(x,t)|_{x=0} = u(t) \\ \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y(t) = \int_0^1 \theta(x,t) dx$$

の空間変数 $x \in [0, 1]$ を $x_i := i/n$ により定義される離散点 x_i ($i = 0, \dots, n$) に置き換えたものと解釈できる^{4)~8)}。したがって、スケール変換が施されたシステム $T_n(G_n(s))$ は、拡散システム (4) の一様な離散化幅による空間離散近似システムと捉えられる。ここで、この拡散システムの伝達関数は、(4) 式の時間変数に対してラプラス変換を施し、空間変数に関する常微分方程式の二点境界値問題を解くことによって

$$D(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s})} \quad (5)$$

と得られる^{4), 9)~11)}。ここで、Fig. 4 には $T_n(G_n(s))$ および $D(s)$ のボード線図を示しており、次数 n を増加することで $D(s)$ に漸近するようすがうかがえる。

2.3 新たな空間離散化モデルの導出

2.2 節では、スケール変換されたシステムが拡散システムを一様な離散化幅によって空間離散化されたシステムと一致することが示されているが、一方でその離散化幅は必ずしも一様である必要はなく、一般に空間的な変動が大きい箇所を細かく離散化することによって、システムの振る舞いをよく捉えられることが知られている^{4), 5)}。いま、(4) 式で定義されるシステムは、出力方程式が空間変数に関する一様な積分であるのに対して、入力 $u(t)$ は $x = 0$ のみに作用する境界値入力となっている。したがって、このシステムに対する有限次元近似においては、一様な離散化を施すよりも、物理量 θ の空間的な変動が大きい、入力に近い位置を細かく離散化す

Fig. 3 Bode diagram of $G_n(s)$ Fig. 4 Bode diagram of $T_n(G_n(s))$ and $D(s)$

ることで、よりよい近似結果が得られると考えられる^(注1)。いいかえれば、一様な離散化の場合と同程度の特性を、適切な離散化を行なうことによって、より少ない次数で実現するシステムを得ることができると考えられる。したがって、本節では、入力近傍を細かく離散化することによって、よりよく拡散システムの振る舞いを捉えた空間離散モデルの導出を行なう。

以下では、より一般的な拡散システムの空間離散化を考える。いま、 $x \in [0, 1]$ の連続変数を x_i^r ($i = 0, \dots, n$) の離散点に置き換える。ここで

$$x_i^r := \frac{r^i - 1}{r^n - 1}, \quad r \geq 1 \quad (6)$$

と定義する。ただし、 r は離散点の偏りを表わすパラメータであり

$$x_{i+1}^r - x_i^r = r(x_i^r - x_{i-1}^r) \quad (7)$$

を満たす。また

(注1) 実際に、入力から物理量の空間勾配までの伝達関数を調べることによって、空間的な変動の大きさを確かめることができる。

$$\frac{r^i - 1}{r^n - 1} = \frac{(r - 1)(r^{i-1} + \dots + 1)}{(r - 1)(r^{n-1} + \dots + 1)} \quad (8)$$

から、以下では、 $r = 1$ のとき $(r^i - 1)/(r^n - 1)$ は i/n で置き換えるものとする。このとき一様な離散化の場合と一致し、以降の議論も同様に成り立つ。一方、 $r > 1$ のときは非一様な離散化となる。

つぎに、 $\theta_i(t) := \theta(x_{n-i+1}^r, t)$ で定義する^(注2)と、(4)式は有限次元の安定な微分方程式系として

$$\begin{cases} s\theta_n = \frac{2}{r+1} \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)^2 \frac{ru - (r+1)\theta_n + \theta_{n-1}}{r} \\ \vdots \\ s\theta_i = \frac{2}{r+1} \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)^2 \frac{r\theta_{i+1} - (r+1)\theta_i + \theta_{i-1}}{r^{2(n-i+1)-1}} \\ \vdots \\ s\theta_1 = \frac{2}{r+1} \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)^2 \frac{r\theta_2 - r\theta_1}{r^{2n-1}} \end{cases} \quad (9)$$

で表わされる。また、出力は(4)式における $y(t)$ の積分を和算に置き換えることにより導出できるが、ここでは(4)式の両辺を $x \in [0, 1]$ で積分することにより得られる^{6)~8)}

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} dx &= \left[\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = - \left. \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \end{aligned}$$

の関係から

$$sy = - \frac{\theta_n - \theta_{n+1}}{x_1^r - x_0^r} = \frac{r^n - 1}{r - 1} (u - \theta_n) \quad (10)$$

により定義する。これは物理的には拡散物質の保存則を表わしている。Fig. 5に、このモデルの模式図を示している。また、Fig. 6は、この非一様な空間離散モデルに関して、パラメータ r を変化させたときのボード線図の変化を表わしている。図中では、 $n = 50$ として $r = 1.0, 1.05, 1.1, 1.2$ と変化させたときのボード線図を実線で示しており、点線で拡散システム(5)のボード線図を示している。この図から、パラメータ r を大きくとることで、拡散システムの特性を非一様な空間離散モデルがより高周波帯域まで表現できていることがわかる。しかし、 r を大きくとり過ぎた場合には、拡散システムとの低・中周波帯域における特性の誤差が大きくなるため^(注3)、所望の特性に合わせて適切に r を選定する必要がある。

3. 空間離散化モデルの解析とシステムの低次元化

3.1 空間離散化モデルの近似関数の導出

本節では、空間離散化モデルの解析を行なう。一般に、空間離散化モデルは空間微分を差分に置き換えることで容易に

(注2) 便宜上、 θ と x^r を逆にラベリングしている。

(注3) $r \neq 1$ のとき、たとえば $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r - x_{n-1}^r = 1 - 1/r$ となり、分割数を大きくとったとしても(一部の)微小要素の大きさが0に漸近しないことに起因する。

Fig. 5 Image of spatial discretized model

Fig. 6 Bode diagram of non-uniform discretized model

導出することができるが、一方で、その分割数に対する近似特性を厳密かつ解析的に評価することは難しい。したがって、本論文ではまず、空間離散化モデルの漸化式表現を導出し、その漸化式表現の近似的な固定点解析を行なう。その結果として、空間離散化モデルの周波数特性を帯域を限定して近似する関数が導出される。得られる近似関数は、空間離散モデルに比較して、解析的に扱いやすいため、後述するモデル低次元化における低次元化誤差の解析に利用できる。

まず 3.1.1 項で、議論の見通しをよくするため、一様な離散化である $r = 1$ の場合について述べる。また、非一様な離散化を含む $r \geq 1$ の場合への拡張も同様な議論によって可能であるため、3.1.2 項に結果のみを示す。

3.1.1 一様な離散化の場合

$r = 1$ のとき、出力 y は (10) 式より

$$sy = n(u - \theta_n) \quad (11)$$

を満たす。ここで、 $i < n - 1$ のとき (3) 式の各状態に関する方程式から $\theta_i = P_i(s)\theta_{i+1}$ を得る。ただし、 P_i は

$$P_{i+1}(s) = \frac{n^2}{s + 2n^2 - n^2 P_i(s)} \quad (12)$$

なる関係を満たす。また、 $i = n$ のとき

$$\theta_n = P_n(s)u \quad (13)$$

を得る。したがって、(11) および (13) 式より、システムの入出力関係は

$$y = \frac{n(1 - P_n(s))}{s}u \quad (14)$$

と表わされる。あらたに、 $X_i^{1,n}(s) = n(1 - P_i(s))/s$ と置き直すことで

$$\begin{cases} X_1^{1,n}(s) = \frac{1}{\frac{s}{n} + n} \\ X_{i+1}^{1,n}(s) = \frac{1}{\frac{s}{n} + \frac{n}{1 + nX_i^{1,n}(s)}} \end{cases} \quad (15)$$

$$y = X_n^{1,n}(s)u \quad (16)$$

なるシステムの漸化式表現を得る。ここで、一様に n 分割したモデルに対する漸化式であることを明示するため、添え字 n および $1 (= r)$ を付記している。

以降の議論のため、つぎの補題を用意する。

[補題 1] (1) 式によって定義される $G_n(s)$ と漸化式 (15) は、スケール変換 (2) に関して

$$\begin{cases} T_n(G_i(s)) = X_i^{1,n}(s) \\ G_i(s) = T_n^{-1}(X_i^{1,n}(s)) \end{cases} \quad (17)$$

を満たす。

(証明) システム $G_n(s)$ に関しても、同様にして

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{\eta\kappa}{s + \kappa} \\ G_{i+1}(s) = \frac{\eta\kappa}{s + \frac{\eta\kappa}{\eta + G_i(s)}} \end{cases} \quad (18)$$

$$Y = G_n(s)U \quad (19)$$

なる漸化式表現を得る。ここで、(18) 式に対してスケール変換 (2) を施すと

$$T_n(G_1(s)) = \frac{1}{\eta n \frac{\kappa}{n^2} s + \kappa} = \frac{1}{\frac{s}{n} + n} \quad (20)$$

および

$$\begin{aligned} T_n(G_{i+1}(s)) &= \frac{1}{\eta n \frac{\kappa}{n^2} s + \frac{\eta\kappa}{\eta + G_i(\frac{\kappa}{n^2} s)}} \\ &= \frac{1}{\frac{s}{n} + \frac{n}{1 + nT_n(G_i(s))}} \end{aligned} \quad (21)$$

を得るが、この漸化式は $X_i^{1,n}(s)$ に関する漸化式 (15) と同一であることから求める結果が従う。

つぎに、空間離散モデルの漸化式表現 (15) を利用して、近似的に $n - 1$ 分割のモデル $X_{n-1}^{1,n-1}(s)$ と n 分割のモデル $X_n^{1,n}(s)$ の関係を導く。いま、補題 1 より

$$\begin{cases} X_{n-1}^{1,n-1}(s) = \frac{1}{\eta(n-1)} G_{n-1}\left(\frac{\kappa}{(n-1)^2} s\right) \\ X_n^{1,n}(s) = \frac{1}{\eta n} G_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n^2} s\right) \end{cases} \quad (22)$$

と表わされることから

$$\begin{aligned} nX_{n-1}^{1,n}(s) &= \frac{1}{\eta} G_{n-1}\left(\frac{\kappa}{n^2} s\right) \\ &= (n-1)X_{n-1}^{1,n-1}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 s\right) \end{aligned} \quad (23)$$

を得る。ここで、 $n \gg 1$ における高次の微小量を無視すると

$$\begin{aligned}
& (n-1) X_{n-1}^{1,n-1} \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 s \right) \\
& \simeq (n-1) X_{n-1}^{1,n-1} \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right) s \right) \\
& = (n-1) \left\{ X_{n-1}^{1,n-1}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k X_{n-1}^{1,n-1}}{\partial s^k} \left(-\frac{2}{n} s \right)^k \right\}
\end{aligned}$$

と評価できる. 特に, $X_{n-1}^{1,n-1}(s)$ は $n-1$ 次, 相対次数 1 のプロパーな有理関数であることから, $s=0$ および $|s| \rightarrow \infty$ で厳密に一致する. 第一項までを残して (15) 式に代入すれば, $n-1$ 分割のモデル $X_{n-1}^{1,n-1}(s)$ から n 分割のモデル $X_n^{1,n}(s)$ への漸化式を近似的に

$$\hat{X}_n^{1,n}(s) = \frac{1}{\frac{s}{n} + \frac{n}{1+(n-1)\hat{X}_{n-1}^{1,n-1}(s)}}, \quad n \gg 1 \quad (24)$$

と表現できる. ただし, $\hat{X}_n^{1,n}(s)$ は $X_n^{1,n}(s)$ の近似関数を表す. この漸化式は次数 n の増加にともなう空間離散モデル $X_n^{1,n}(s)$ の変動を表わす近似方程式と捉えられる. いま, $\Delta_n(s) := \hat{X}_n^{1,n}(s) - \hat{X}_{n-1}^{1,n-1}(s)$ を定義すると

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n(s)\|_{\infty} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{-\frac{s}{n^2}(n-1)(\hat{X}_{n-1}^{1,n-1})^2 - \frac{1}{n}(1+\frac{s}{n})\hat{X}_{n-1}^{1,n-1} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{s}{n^2} + \frac{s}{n}(n-1)\hat{X}_{n-1}^{1,n-1}} \right\|_{\infty} \\
& = 0
\end{aligned}$$

より, $n \gg 1$ のときこの漸化式を満たす関数列の変動は小さくなる. したがって, (24) 式において $\hat{X}_n^{1,n}(s)$ と $\hat{X}_{n-1}^{1,n-1}(s)$ をともに $\hat{X}_n^1$ に置き換えて得られる方程式

$$\hat{X}_n^1 = \frac{1}{\frac{s}{n} + \frac{n}{1+(n-1)\hat{X}_n^1}} \quad (25)$$

の解は $\hat{X}_n^{1,n}(s)$ とほとんど等しいと考えられる. したがって, 以下では $n \gg 1$ のとき $\hat{X}_n^{1,n}(s) \simeq \hat{X}_n^1(s)$ を仮定し, (25) 式の解 $\hat{X}_n^1(s)$ によって, 空間離散モデル $X_n^{1,n}(s)$ の特性を解析する. 実際, **Fig. 7** は $n=50$ のときの (25) 式の解 $\hat{X}_n^1(s)$ と空間離散モデル $X_n^{1,n}(s)$ のボード線図を示しており, 特に $s=0$ および $|s| \gg 1$ において両者がよく一致し, ゲイン特性にはほとんど差がないことがわかる.

3.1.2 非一様な離散化への拡張

$r \geq 1$ の場合にも, 同様な議論により

$$\begin{cases} X_1^{r,n}(s) = \frac{1}{sR_n + \frac{r^{-2n+2}rC_0}{RR_n}} \\ X_{i+1}^{r,n}(s) = \frac{1}{sR_n + \frac{r^{-2n+2}rC_i}{RR_n + r^{-2n+2}C_i\hat{X}_i^{r,n}(s)}} \end{cases} \quad (26)$$

$$y = X_n^{r,n}(s)u \quad (27)$$

なるシステムの漸化式表現を得る. ただし

$$R := \frac{r+1}{2}, \quad R_n := \frac{r-1}{r^n-1}, \quad C_i := r^{2i-1} \quad (28)$$

である. また, 同様な評価を行なうことによって得られる方

Fig. 7 Bode diagram of $\hat{X}_n^1(s)$ and $X_n^{1,n}(s)$

Fig. 8 Bode diagram of $\hat{X}_n^r(s)$ and $X_n^{r,n}(s)$

程式

$$\hat{X}_n^r = \frac{1}{sR_n + \frac{1}{RR_n + \frac{rR_n}{R_{n-1}}\hat{X}_n^r}} \quad (29)$$

の解は $\hat{X}_n^{r,n}(s)$ とほとんど等しいことがわかる. したがって, 以下では同様に, $n \gg 1$ のとき $\hat{X}_n^{r,n}(s) \simeq \hat{X}_n^r(s)$ を仮定し, (29) 式の解 $\hat{X}_n^r(s)$ によって, 空間離散モデル $X_n^{r,n}(s)$ の特性を解析する. 実際, **Fig. 8** は $n=50$, $r=1.1$ としたときの解 $\hat{X}_n^r(s)$ と空間離散モデル $X_n^{r,n}(s)$ のボード線図を示しており, $s=0$ および $|s| \gg 1$ において両者がよく一致し, ゲイン特性にはほとんど差がないことがわかる.

3.2 モデル低次元化

3.1 節では, 方程式 (29) の解である近似関数 $\hat{X}_n^r(s)$ を調べることによって, $s=0$ および $|s| \gg 1$ における空間離散モデル $X_n^{r,n}(s)$ の周波数特性の解析が可能となることを述べた. 本節では, これを利用して, 対象とする n 次システム $G_n(s)$ に対する m 次の低次元システム $\hat{G}_m(s)$ の導出を行なう.

まず, 以下の補題を用意する.

[補題 2] ある自然数 n および m を与える. ただし, これらは

Fig. 9 Relation of n , m and δ

$$\frac{\log \{2(\sqrt{2}-1)n+1\}}{\log(2\sqrt{2}-1)} < m < n \quad (30)$$

を満たすものとする。いま、 r に関する方程式

$$\sum_{i=0}^{m-1} r^i - n = 0 \quad (31)$$

は、 $r > 0$ において実数解をひとつもち、正定数 δ を用いて $r = 1 + 2\delta$ と表わせる。このとき δ は

$$m = \frac{\log(1+2n\delta)}{\log(1+2\delta)} \quad (32)$$

の逆関数として得られ、 m に関して単調減少する。

(証明) まず、 $y(r) := \sum_{i=0}^{m-1} r^i - n$ とおくと、(30) 式のとおり、 $y(r)$ の単調増加性から (31) 式は $1 < r < 2\sqrt{2}-1$ において唯一の実数解をもつ。つぎに、(32) 式は $r = 1 + 2\delta$ を (31) 式に代入することでただちに得られ、 m が δ に関して単調増加であることから求める結果が従う。

この補題が示すように、ここで定義される δ は m に関して単調減少する。特に、 $n = 100, 1000$ のとき (32) 式の関係を示した Fig. 9 より、 $\delta = \sqrt{2}-1$ から m を増すことで δ は大きく減少することがわかる。このとき、以下の定理が成り立つ。

《定理 1》 (30) 式を満たす自然数 n および m を与える。いま、定数 $r > 0$ を (31) 式の実数解とし、正定数 δ を用いて $r = 1 + 2\delta$ と表わす。このとき、(34) および (35) 式の解 $\hat{x}_m^r(s)$ および $\hat{x}_n^1(s)$ は

$$\|\hat{x}_m^r(s) - \hat{x}_n^1(s)\|_\infty < \frac{2 + \frac{1}{n}}{2(1 - \frac{1}{n})} \delta + O(\delta^2) \quad (33)$$

を満たす。

(証明) まず、(29) 式を展開すると

$$\begin{aligned} & \frac{rR_m}{R_{m-1}} s (\hat{x}_m^r)^2 + \left(sRR_m + \frac{1}{R_m} - \frac{r}{R_{m-1}} \right) \hat{x}_m^r - R = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{r-1}{r^m-1} \right) s (\hat{x}_m^r)^2 \\ & + \left(s \frac{r+1}{2} \frac{r-1}{r^m-1} + 1 \right) \hat{x}_m^r - \frac{r+1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

を得る。ただし、議論の便宜上、 n を m で置き換えている。特に $r = 1$ のとき

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right) s (\hat{x}_n^1)^2 + \left(s \frac{1}{n} + 1 \right) \hat{x}_n^1 - 1 = 0 \quad (35)$$

を得る。いま、(31) 式を満たす r は

$$\frac{r-1}{(r-1) \sum_{i=0}^{m-1} r^i} = \frac{1}{n} \quad (36)$$

より

$$\frac{r-1}{r^m-1} = \frac{1}{n} \quad (37)$$

を満たす。したがって、(34) 式における $(r-1)/(r^m-1)$ に $1/n$ を代入し各方程式を解くことによって、(34) および (35) 式の解 $\hat{x}_m^r(s)$ および $\hat{x}_n^1(s)$ は $s \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} \hat{x}_m^r(s) = \frac{-\left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{s} \right) + \frac{\delta}{n} \right\} + \sqrt{a(s) + 2b(s)\delta + \frac{\delta^2}{n^2}}}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ \hat{x}_n^1(s) = \frac{-\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{s} \right) + \sqrt{a(s)}}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \end{cases}$$

と得られる。ただし、根号は主値をとるものとし

$$\begin{cases} a(s) := \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{s} \right)^2 + \frac{4}{s} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ b(s) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{s} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \end{cases} \quad (38)$$

である。また、 $s = 0$ のときは

$$\begin{cases} \hat{x}_m^r(0) = 1 + \delta \\ \hat{x}_n^1(0) = 1 \end{cases} \quad (39)$$

と得られるため、(33) 式を満たす。したがって、以下では $s \neq 0$ の場合を考え、 $\omega \in (0, \infty)$ とする。ここで、任意の ω に対して、 $0 < \delta < \sqrt{2}-1$ のとき

$$\left| \frac{2b(j\omega)\delta + \frac{\delta^2}{n^2}}{a(j\omega)} \right| < 1 \quad (40)$$

が示される (付録 A 参照) ことから、 $s = j\omega$ において、二項定理より

$$\begin{aligned} & \sqrt{a(s) + 2b(s)\delta + \frac{\delta^2}{n^2}} \\ &= \sqrt{a(s)} \sqrt{1 + \left\{ \frac{2b(s)\delta + \frac{\delta^2}{n^2}}{a(s)} \right\}} \\ &= \sqrt{a(s)} \left\{ 1 + \frac{b(s)}{a(s)} \delta \right\} + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (41)$$

を得る。したがって、三角不等式より

$$\begin{aligned} & \|\hat{x}_m^r(s) - \hat{x}_n^1(s)\|_\infty \\ &= \left\| -\frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \frac{\delta}{n} + \frac{b(s)}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{a(s)}} \delta + O(\delta^2) \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \frac{\delta}{n} + \left\| \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{a(s)}} \frac{\delta}{n^2} \right\|_\infty \end{aligned}$$

$$+ \left\| \frac{2 - \frac{1}{n}}{2(1 - \frac{1}{n})s\sqrt{a(s)}} \delta \right\|_{\infty} + O(\delta^2) \quad (42)$$

を得るが、ここで、任意の ω に対して $|\sqrt{a(j\omega)}| > 1/n$ および $|j\omega\sqrt{a(j\omega)}| > 1$ が示される (付録 A 参照) ことから、求める結果が従う。□

この定理は、(30) および (31) 式を満たす n, m, r に対して、空間離散モデル $X_n^{1,n}(s)$ および $X_m^{r,m}(s)$ の特性を、帯域を限定して近似する関数 $\hat{X}_n^1(s)$ および $\hat{X}_m^r(s)$ の差が H_{∞} -ノルムの意味で小さくなることを示している。ここで、空間離散モデルとその近似関数の特性は、Fig. 7 および Fig. 8 が示すように、中周波帯域において差異が存在するが、実際にこの定理は空間離散モデルの特性解析にも有効である。なぜならば、空間離散モデルはその分割数 (次数) を増加させるとともに、低周波から高周波帯域にかけて順に拡散システムの特性に一致していくという特徴をもつためである (Fig. 4 参照)。したがって、ある程度次数が大きい場合には、 $X_n^{1,n}(s)$ および $X_m^{r,m}(s)$ の特性が高周波帯域において一致することが重要であり、実際 $\hat{X}_n^1(s)$ および $\hat{X}_m^r(s)$ は高周波帯域においてよい近似となっている。

さて、3.1 節の議論から、システム (1) は $G_n(s) = T_n^{-1}(X_n^{1,n}(s))$ と表わされることがわかる。したがって、(31) 式を満たす $r > 1$ を用いて、 m 次の低次元システム $\hat{G}_m(s)$ は

$$\hat{G}_m(s) = T_n^{-1}(X_m^{r,m}(s)) \quad (43)$$

で与えられる。ただし、次数 m は (30) 式を満たすものとする。ここで得られた低次元システムは、空間離散モデルの定義式 (9) より、システム (1) が本質的に有する拡散的な構造を保存した表現であることがわかる。また、すべての m および $r > 0$ に対して $X_m^{r,m}(s)$ が安定であることから、安定性も保存した低次元化となっている。

(注意 1) 一般のシステムに対して、大域的に $\|G_n - \hat{G}_m\|$ を最小化する低次元システム $\hat{G}_m(s)$ を求めることは難しい。一方で、本論文における低次元化では、システム (1) が本質的に有する拡散的な構造に注目することによって、低次元システムの構造を、 r なるひとつのパラメータで限定することを可能にしており、また局所的な (高周波帯域) 解析によって、大域的な特性の近似が達成されているといえる。

(注意 2) 定理 1 は解析的に n, m, r の関係を与えていることから、計算機の性能とは無関係に、非常に大規模なシステムに対しても適用可能である。

3.3 数値例

本節では、数値例を用いて、定理 1 を用いたモデル低次元化の有効性を示す。100 次のシステム (1) を 30 次の低次元システムで近似することを考える。いま、 $n = 100$ および $m = 30$ のとき、(31) 式より $r = 1.076$ ($\delta = 0.038$) と得られる。このとき、Fig. 10 には、方程式 (29) の解として得られる近似関数 $\hat{X}_n^1(s)$ および $\hat{X}_m^r(s)$ のボード線図をそれぞれ ×, ○

Fig. 10 Bode diagram of $\hat{X}_n^1(s)$, $\hat{X}_m^r(s)$, $X_n^{1,n}(s)$ and $X_m^{r,m}(s)$

で示し、(9) 式で与えられる空間離散モデル $X_n^{1,n}(s)$ および $X_m^{r,m}(s)$ のボード線図を実線で示している。この図から、定理 1 によって得られる r を用いることによって、ふたつの近似関数の特性がほとんど一致し、空間離散モデルとも低・高周波帯域で一致していることがわかる。また、ふたつの空間離散モデルもほとんど特性が一致していることがうかがえる。したがってこれらの結果から、定理 1 が近似関数 $\hat{X}_n^1(s)$, $\hat{X}_m^r(s)$ だけでなく、空間離散モデル $X_n^{1,n}(s)$, $X_m^{r,m}(s)$ に対しても有効であることがわかる (注 4)。

4. おわりに

本論文では、対象とするカスケードシステムが、スケール変換を介した連続極限において偏微分方程式で記述される拡散システムに漸近するという性質を利用することによって、システムの低次元化を行なう新たな手法を提案した。こうして得られた低次元システムは、もとのシステムが有する拡散的な構造と安定性を保存し、かつ低次元化によって生じる入出力特性の誤差の評価が解析的に与えられる。ただし、それはシステムの近似関数に対する評価であるため、今後は直接的に入出力特性の誤差を評価する手法の開発が重要である。

本論文で扱ったシステムと同様に、適当な連続極限において、偏微分方程式で記述されるような連続体に漸近する大規模システムは、ほとんど連続体とみなして解析を行なうことができると考えられる。本手法の他の大規模システムに対する適用可能性の検討は今後の課題となっている。

参考文献

- 1) W.H.A. Schilders and H.A. van der Vorst: *Model Order Reduction*, Springer (2008)
- 2) A.C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, Society for Industrial Mathematics (2005)
- 3) A.C. Antoulas: An overview of approximation methods for

(注 4) ボード線図上では、(2) 式によるスケール変換は平行移動に対応するため、 $G_n(s)$ および $\hat{G}_m(s)$ のボード線図は特に示していない。

large-scale dynamical systems, *Annual Reviews in Control*, **29**, 181/190 (2005)

- 4) 阿部, 児島: むだ時間・分布定数系の制御, コロナ社 (2007)
- 5) 高見, 川村: 偏微分方程式の差分法, 東京大学出版会 (1994)
- 6) J. Crank: *The Mathematics of Diffusion*, OXFORD UNIVERSITY PRESS (1973)
- 7) W.M. Deen: *Analysis of Transport Phenomena*, OXFORD UNIVERSITY PRESS (1998)
- 8) H.S. Carslaw and J.C. Jaeger: *Conduction of Heat in Solids*, OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS (1986)
- 9) R. Curtain and H. Zwart: *An Introduction to Infinite-Dimensional Control Theory*, Springer (1995)
- 10) R. Curtain and K. Morris: Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial, *Automatica*, **45**, 1101/1116 (2009)
- 11) R. Padhi and S.F. Ali: An account of chronological developments in control of distributed parameter systems, *Annual Reviews in Control*, **33**, 59/68 (2009)

《付 録》

A. 定理 1 証明内の不等式の導出

定理 1 の証明に必要な各不等式は, それぞれ以下のように得られる. いま, 任意の $\omega \in (0, \infty)$ に対し

$$\begin{aligned} |a(j\omega)|^2 &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\omega} j \right)^2 - \frac{4}{\omega} \left(1 - \frac{1}{n} \right) j \right|^2 \\ &= \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2 \omega^2} + \frac{16}{n \omega^2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{16}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

より $|\sqrt{a(j\omega)}| > 1/n$ を得る. 同様に

$$\begin{aligned} |(j\omega)^2 a(j\omega)|^2 &= \left| -\left(\frac{\omega}{n} - j \right)^2 + 4\omega \left(1 - \frac{1}{n} \right) j \right|^2 \\ &= 1 + \frac{2\omega^2}{n^2} + \frac{\omega^4}{n^4} + 16\omega^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

より $|j\omega \sqrt{a(j\omega)}| > 1$ を得る. 最後に

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2b(j\omega)\delta + \frac{\delta^2}{n^2}}{a(j\omega)} \right|^2 \\ &= \frac{\left| \left(\frac{2\delta}{n^2} + \frac{\delta^2}{n^2} \right) - \frac{1}{\omega} \left(2 - \frac{1}{n} \right) j \right|^2}{\left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\omega} j \right)^2 - \frac{4}{\omega} \left(1 - \frac{1}{n} \right) j \right|^2} \\ &= \frac{\frac{(2\delta + \delta^2)^2}{n^4} + \frac{1}{n^2 \omega^2} - \frac{4}{n \omega^2} + \frac{4}{\omega^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2 \omega^2} + \frac{16}{n \omega^2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{16}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2} \end{aligned}$$

が成り立ち, $0 < \delta < \sqrt{2} - 1$ のとき $2\delta + \delta^2 < 1$ であることから $|2b(j\omega)\delta + \frac{\delta^2}{n^2}| / |a(j\omega)| < 1$ を得る.

[著 者 紹 介]

石 崎 孝 幸 (学生会員)

2008 年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業. 2009 年同大学大学院情報理工学研究科修士課程修了, 同年同大学大学院情報理工学研究科博士課程進学, 現在に至る. IEEE の会員.

加 嶋 健 司 (正会員)

2002 年京都大学大学院情報学研究科修士課程修了. 2005 年同大学大学院情報学研究科博士課程修了, 同年同大学大学院情報学研究科特任助手, 同年東京工業大学大学院情報理工学研究科助手, 2007 年より助教となり現在に至る. 2008 年本会制御部門より部門大会賞受賞. 無限次元システムおよび確率システムの制御理論およびその応用に関する研究に従事. 博士 (情報学). システム制御情報学会, IEEE の会員.

井 村 順 一 (正会員)

1990 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 92 年同大学大学院工学研究科博士課程中途退学, 同年同大学工学部機械工学科助手. 96 年広島大学工学部助教授, 2001 年東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授, 2004 年同教授, 現在に至る. 98 年より 1 年間 Twente 大学客員研究員. 非線形システム, ハイブリッドシステムの制御の研究に従事. 博士 (工学). システム制御情報学会, 日本ロボット学会, 日本鉄鋼協会, IEEE などの会員.