マルチスケール画像解析にもとづく自己相似性の検出

亀 島 鉦 二*

Self-similarity Detection via Multi-scale Image Analysis

Kohji KAMEJIMA*

A dynamic scheme is presented for generating multi-scale images associated with self-similar patterns. By blurring with a small scale parameter, brightness distributions are extended to geometrically singular fractal patterns. Through weighted averaging with respect to scale factors, a multi-scale image is generated as a representation of the conditional probability for capturing unknown attractors. The local structure of the multi-scale image is analyzed to demonstrate the structural consistency of the capturing probability with respect to the imaging process associated with the attractor. By extracting stochastic features based on the capturing probability, a computational scheme is introduced for matching observed attractors with a preassigned dictionary of patterns. Proposed method was verified by simulation studies.

Key Words: Fractal Imaging Process; Conditional Probability; Self-Similarity; Pattern Detection

1. はじめに

画像中で注意を引く領域は、しばしば全体的な統一性を示し^{1),2)}、その統一性は、さまざまな普遍的規則により説明されている^{3),4)}。これらの知見は、さまざまな画像を少数の形態要素により生成できることを示唆し、知覚対象の表現^{5),6)}、操作対象の記号化^{7),8)}、パターンの符号化や構造化^{9),10)}、情景の命題的解析^{11),12)}などの分野で重要な役割を果たすと期待される。

対象を線分や矩形領域などの単純な要素に分解することにより、多様な形態を多次元文法として表現することができる^{13),14)}。実際、ひとつの文法はきわめて多くの“文”を生成する能力をもつ。ただし、文法的表現では事前に設定した形態要素により分解能が規定されるため、幾何学的に複雑な対象を記述することは容易ではない。また、文法規則はスケール情報を含まないため、抽出された文法はもとの画像を再生することはできない。したがって、形態の統一性を構文規則のみで表現することは実際的ではない。

さて、自然情景には、自己相似則に支配される形態が多く見られる^{15)~19)}。対象が自己相似則に従う場合には、形態自体がその構成要素となり、細部に至るまで再生される。つまり、自己相似則により、形態再生能力をもった手続きの構造表現を得ることができる。この点に着目して、本研究では対

Fig. 1 Self-similarity dynamics

象画像にもとづいて形態の形成手続きを推定することを目的とする。ただし、形成手続きは縮小画像群として表現されているものと仮定する。この仮定はそれほど制限的ではない。たとえば、画面内の縮小画像群はハウスドルフ距離の意味で収束し、フラクタル・アトラクターをつくり出すことが証明されている²⁰⁾。また、逆に、与えられた2次元集合を任意の精度で“フラクタル・コラージュ”する縮小画像群の存在も証明されている²¹⁾。

本研究の最終目的は Fig. 1 (a) に示するような複雑形態を生成する自己相似メカニズムを同定することである。このメカニズムは、(b) に示すように、形態自体の縮小-複製を繰り返し、その極限として複雑形態をつくり出す。すなわち、(b) のタイプのメカニズムは文法規則の生成性と厳格な幾何学的拘束性を併せもつ。この結果、自己相似形態に対しては、自己相似構造の検出問題と描画アルゴリズム設計問題は同時に解決されることになる。この点に着目して、本論文では、複雑形態の観測データにもとづいて縮小-複製パラメータを推定するアルゴリズムの導出を目指す。ただし、観測形態を生成

* 大阪工業大学情報科学部 枚方市北山 1-79-1

* Faculty of Information Science and Technology, Osaka Institute of Technology, 1-79-1 Kitayama, Hirakata
(Received April 13, 2009)

(Revised August 11, 2009)

する写像群の候補は‘辞書’として事前に入手可能とする．ところで、微小化-復元操作の結果として、安定な自己相似過程に対応する極限形態はきわめて複雑な幾何学構造をもつ．このため、観測データから未知写像群の入出力関係を決定論的に特定することは容易ではない．そこで、本研究では、未知写像群の構造を確率的に表現する特徴に着目する．具体的には、画像自体を自己相似運動にともなう不変測度と同一視し、未知アトラクターの捕獲確率を生成するとともに確率的特徴にもとづいて形態形成過程を同定する．本稿では、このようなアプローチの第一歩として未知形態の分布を評価する条件付き確率を可視化し、その構造的性質を調べる．以下、まず第 2 章では計算論的に規定されるフラクタル・アトラクターの確率的表現を導き、第 3 章で未知アトラクターの追尾過程を支配する遷移確率を求める．第 4 章では、この遷移確率の定常分布を生成する偏微分方程式を導出する．この偏微分方程式の解は、観測形態にもとづく未知アトラクターの捕獲確率を与え、マルチスケール画像として可視化できる．このマルチスケール画像にもとづいて未知アトラクターの確率的特徴を抽出し、この確率的特徴上での自己相似性を第 5 章で表現する．さらに第 6 章では、デジタル画像上で自己相似性を検出するアルゴリズムを構成し、最後に、第 7 章で、自己相似メカニズムの検出可能性および確率的特徴の計算効率ならびに頑健性に関する実験結果を示す．

2. 形態の動的定義と確率表現

2 次元平面 R^2 内の有界な開集合 Ω を (境界を除いた) 画面とよび、 Ω の部分集合からなる Borel 集合族を $\mathcal{F}[\Omega]$ と書く． $\mathcal{F}[\Omega]$ 上には確率測度 $P: \mathcal{F}[\Omega] \rightarrow [0, 1]$ を導入し、 $\mathcal{F}[\Omega]$ 上の測度を画像、測度の台を形態とそれぞれよぶ．このように定義される形態全体を $\mathcal{H}[\Omega]$ と書く．すなわち本研究では、本来抽象的な形態を可測集合上の明暗分布として可視化し、形態の可視性と可測性を同一視する．また、測度の台が Ω 内のコンパクト部分集合になることに着目し、 $\mathcal{H}[\Omega]$ にはハウスドルフ距離 $\eta: \mathcal{H}[\Omega] \times \mathcal{H}[\Omega] \rightarrow [0, \infty)$ を導入しておく．以下、 Ω から Ω への $\mathcal{F}[\Omega]$ 可測な縮小写像全体を $\mathcal{M}$ と書き、 $\mathcal{M}$ の有限部分集合 $\nu = \{\mu_i \in \mathcal{M}, i = 1, 2, 3, \dots, \|\nu\|\}$ をアルファベットとよぶ．ただし、 $\|(\cdot)\|$ は集合 $(\cdot)$ のサイズを表わす．このような縮小写像群に関して、つぎの事実が知られている²⁰⁾．

[命題] 境界を含む画面を $\bar{\Omega}$ と書く．このとき、任意のアルファベット ν に対して $\bar{\Omega}$ 内につぎの不変性を満たす有界閉集合が存在する．

$$\Xi = \bigcup_{\mu_i \in \nu} \mu_i(\Xi), \quad (1)$$

このアトラクター Ξ は、 ν 上のすべての合成写像

$$\langle \mu_i \rangle_t = \mu_{i_1}^1 \mu_{i_2}^2 \mu_{i_3}^3 \cdots \mu_{i_t}^t, \quad \mu_{i_k}^k \in \nu,$$

に対する不動点

$$\omega^f = \langle \mu_i \rangle_t (\omega^f), \quad (2)$$

を含む．

(2) 式に考慮して、静的拘束 (1) を満たす集合 Ξ を次式により逐次近似することを考える．

$$\xi_{t+1} \in \bigcup_{\nu} \mu_i(\Xi_t), \quad (3)$$

ただし、 Ξ_t は

$$\begin{aligned} \Xi_t &= \{\xi_s, s \leq t\}, \quad t > 0, \\ \Xi_0 &= \left\{ \xi \in \Omega \mid \exists \mu_i \in \nu : \xi = \mu_i(\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる形態列である． Ξ_t を (4) 式のように定義することより、(2) 式における合成写像 $\langle \mu_i \rangle_t$ の網羅性が保証される．ここで、 $\mathcal{H}[\Omega]$ を自身に移す写像 $\bigcup_{\nu} \mu_i(\cdot)$ がハウスドルフ距離 η に関して縮小性をもつことに注意すると、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta[\Xi, \Xi_t] = 0$ が得られる．

以下各 $\xi_t \in \Xi_t$ に点画像 δ_{ξ_t} を与え、 Ξ_t に対応する画像列

$$\chi_{\Xi_t}^\delta = \frac{1}{\|\Xi_t\|} \sum_{\xi_t \in \Xi_t} \delta_{\xi_t}, \quad (5)$$

を考える．ここに $\delta_{(\cdot)}$ は画面内の位置 $(\cdot)$ に置かれた Dirac の Delta 関数である．ここで、 $\{\Xi_t, t = 1, 2, 3, \dots\}$ が単調増大列を与えること、ならびにすべての $t \geq 0$ に対して $\chi_{\Xi_t}^\delta$ の台がアトラクター Ξ に含まれることに注意すると、つぎの収束性が導かれる．

[命題] $\mathcal{F}[\Omega]$ 上の測度 χ_Ξ^δ が存在して、任意の Ω 上での可積分関数 f に対して、

$$\begin{aligned} \chi_{\Xi_t}^\delta(f) &\rightarrow \chi_\Xi^\delta(f), \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \\ \text{supp } [\chi_\Xi^\delta] &= \Xi, \end{aligned}$$

が成立する．ただし $\text{supp } [(\cdot)]$ は測度 $(\cdot)$ の台である．とくに、アルファベット ν が領域分離条件

$$\mu_i(\Xi) \cap \mu_j(\Xi) = \emptyset, \quad \mu_i, \mu_j \in \nu, i \neq j, \quad (6)$$

を満たし、(3) 式の各ステップで、 μ_i が確率 p_{μ_i} で選択される場合には、測度 χ_Ξ^δ はつぎの不変性を満たす．

$$\begin{aligned} \chi_\Xi^\delta[f(\cdot)] &= \sum_{\mu_i \in \nu} p_{\mu_i} \chi_{\mu_i(\Xi)}^\delta[f(\cdot)] \\ &= \sum_{\mu_i \in \nu} p_{\mu_i} \chi_\Xi^\delta[f(\mu_i^{-1}(\cdot))]. \end{aligned}$$

上式は、不変測度 χ_Ξ^δ を解析することにより ν を決定する手がかりが得られることを示唆する．ただし、領域分離条件 (6) を満たす ν はフラクタル次元をもつアトラクターを生成することが知られており²⁰⁾、形態 Ξ を高精度で観測することは容易ではない．また、アトラクター Ξ の幾何学的特異性を反映して、不変測度 χ_Ξ^δ もきわめて複雑な分布をもつため、その構造を正確に計算することも容易ではない．

ところで、通常のレンズを用いた撮像過程では、Gauss 分

Fig. 2 Gaussian convolution images associated with a point image

布型平滑処理を通した対象像が観測されることが知られている。また初期視覚では、Gauss 型平滑画像をもとに、物体の形状や運動が抽出される、との指摘もなされている²²⁾。これに着目して、以下、不変測度 χ_{Ξ}^{δ} は平滑化チャネル

$$g_{\tau} * \chi_{\Xi}^{\delta}(\omega) = \chi_{\Xi}^{\delta}(g_{\tau}(\omega - (\cdot))), \quad (7)$$

を通して取得されるものとする。ここに $g_{\tau}(\omega)$ は、スケール・パラメータ τ をもつ 2 次元ガウス型確率密度関数

$$g_{\tau}(\omega) = \frac{1}{2\pi\tau} \exp\left[-\frac{|\omega|^2}{2\tau}\right],$$

である。

この作用素 $g_{\tau}*$ による測度の平滑化を Fig. 2 に示す。ここでは、スケール・パラメータ $\tau = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$ をもつ g_{τ} を用いて点画像 δ_0 を平滑化している。

3. 自己相似形態の確率的追尾

2 次元ダイナミカル・システム (3) のふるまいを平滑化チャネル (7) を通して観測する状況を考える。問題は、ランダムダイナミクス (3) に従って生成される点列に適合する平滑化チャネルを見いだすことである。拘束条件 (1) は、自己相似領域 Ξ の点は非決定論的に選択される縮小写像 $\mu_i \in \nu$ によって領域内を移動しつつ、不変測度 χ_{Ξ}^{δ} として可視化される。この点に着目して、未知アトラクタ Ξ を彷徨点の集合とみなし、未知のアルファベット ν により初期位置 $\omega \in \Omega$ から t 時間後に未知領域 Ξ に移動する確率 $P_{\omega}^t(\Xi|\nu)$ を求める。

さて、分散 τ のもとで entropy を最大にする連続彷徨運動 $\omega \rightarrow \xi \in \Omega$ は、遷移密度関数 $g_{\tau}(\xi - \omega)$ をもつ Brown 運動により与えられる。ここで、 χ_{Ξ}^{δ} が未知アトラクターの構成点を捕獲する確率密度関数とみなせることに着目すると、彷徨運動のクラス $\omega \rightarrow \Xi$ は、遷移確率

$$P_{\omega}^{\tau}(\Xi) = \int_{R^2} g_{\tau}(\xi - \omega) dP_{\Xi}(\xi) = g_{\tau} * \chi_{\Xi}^{\delta}(\omega), \quad (8)$$

に従う。ここに、

$$dP_{\Xi}(\xi) = \chi_{\Xi}^{\delta} dP(\xi),$$

である。領域分離条件 (6) に着目するとつぎの分解が得られる。

$$P_{\omega}^{\tau}(\Xi) = \sum_{\mu_i \in \nu} g_{\tau} * \chi_{\mu_i(\Xi)}^{\delta}(\omega), \quad (9)$$

ただし

$$\begin{aligned} \chi_{\mu_i(\Xi)}^{\delta}(f) &= \chi_{\Xi}^{\delta}(f_{\mu_i}), \\ f_{\mu_i}(\omega) &= \begin{cases} f(\omega); & \omega \in \mu_i(\Xi), \\ 0; & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

である。さて、遷移確率 $P_{\omega}^{\tau}(\Xi)$ は Chapman の等式

$$P_{\omega}^{\tau}(\Xi) = \int_{R^2} P_{\xi}^{\tau}(\Xi) dP_{\omega}^0(\xi), \quad (10)$$

を満たさなければならない。彷徨点が連続移動する場合には、

$$dP_{\omega}^0(\xi|\mu_i) = \begin{cases} \delta(\omega - \mu_i(\xi)); & \mu_i^{-1}(\omega) \in \Xi, \\ 0; & \text{otherwise,} \end{cases}$$

が成り立つため、整合性 (10) は満足される。

ところで、自己相似形態の構成点は、領域縮小 $\Xi \rightarrow \mu_i(\Xi)$, $\mu_i \in \nu$ により、跳躍的に移動する。このような跳躍的な移動をとまなう場合には、整合性条件はつぎのように書き換えられる：

$$p_{\omega}(\gamma|\mu_i) = \chi_{\Xi}^{\delta}(\mu_i^{-1}(\gamma)) \cdot \delta(\gamma - \mu_i(\xi)), \quad (11)$$

ただし $p_{\omega}(\gamma|\mu_i)$ は、縮小写像 μ_i による跳躍的移動 $\omega \rightarrow \gamma$ にとまなう遷移確率密度関数を表す。写像 μ_i が確率 $P(\mu_i)$ で選択されるものとする、(8) と (11) 式の比較より、写像 $\mu_i \in \nu$ による領域縮小をとまなう彷徨運動の遷移確率がつぎのように得られる：

$$P_{\omega}^{\tau}(\Xi|\mu_i) = g_{\tau} * \chi_{\mu_i(\Xi)}^{\delta}(\omega).$$

未知写像群 ν に対しても entropy 最大化原理を適用し、

$$P(\mu_1) = P(\mu_2) = \cdots = P(\mu_{\|\nu\|}) = \frac{1}{\|\nu\|},$$

と考える。このようなランダム選択型領域縮小に対する遷移確率 $P_{\omega}^{\tau}(\Xi|\nu)$ は

$$P_{\omega}^{\tau}(\Xi|\nu) = \frac{1}{\|\nu\|} \sum_{\mu_i \in \nu} g_{\tau} * \chi_{\mu_i(\Xi)}^{\delta}(\omega),$$

のように求められる。

自己相似形態では、上記分割が繰り返される。Brown 運動では、分散 τ は時間経過に対応づけられる。この分割回数 t を尺度として時間経過を計るものとする、

$$P_{\omega}^t(\Xi|\nu) = \|\nu\|^{-t} \sum_{\mu_i \in \nu} g_t * \chi_{\mu_i(\Xi)}^{\delta}(\omega),$$

が得られる。ここで、測度 χ_{Ξ}^{δ} の再生性

$$\sum_{\mu_i \in \nu} g_{\tau} * \chi_{\mu_i(\Xi)}^{\delta}(\omega) = g_{\tau} * \chi_{\Xi}^{\delta}(\omega), \quad (12)$$

に注意すると、自己相似形態に対する遷移確率 $P_{\omega}^t(\Xi|\nu)$ が

Fig. 3 Multi-scale image

$$P_{\omega}^t(\Xi|\nu) = \exp[-\rho t] g_t * \chi_{\Xi}^{\delta}(\omega), \quad (13)$$

のように得られる. この $\rho = \log \|\nu\|$ は Kolmogorov の意味での写像過程の複雑さ²³⁾に対応する. 遷移確率の初期条件は, (8) 式より, $P_{\omega}^0(\Xi|\nu) = \chi_{\Xi}^{\delta}$ と定められる.

4. 条件付き確率のイメージ

縮小-再生を繰り返す領域上の彷徨運動のクラスを考える. このクラスに属する彷徨運動により未知アトラクター Ξ を最終的に捕獲する確率は, 遷移関数 $P_{\omega}^t(\Xi|\nu)$ のマルコフ・ポテンシャル

$$\varphi(\omega|\nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_t(\omega|\nu), \quad (14)$$

により与えられる. ここで

$$\begin{aligned} G_t(\omega|\nu) &= \rho \int_0^t P_{\omega}^{t-\tau}(\Xi|\nu) d\tau \\ &= \rho \int_0^t \exp[-\rho(t-\tau)] g_{t-\tau} * \chi_{\Xi}(\omega) d\tau, \end{aligned}$$

である. $G_t(\omega|\nu)$ が発展方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_t(\omega|\nu)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta G_t(\omega|\nu) + \rho[\chi_{\Xi} - G_t(\omega|\nu)], \quad (15) \\ G_0(\omega|\nu) &= 0, \end{aligned}$$

を満たすことから, 捕獲確率 φ は次式の解として求められる.

$$\frac{1}{2} \Delta \varphi(\omega|\nu) + \rho[\chi_{\Xi} - \varphi(\omega|\nu)] = 0. \quad (16)$$

点画像 δ_0 に対する捕獲確率は **Fig. 3** に示す. ここでは, スケール・パラメータ $\epsilon = 0.2$ に対応する測度 $g_{\epsilon} * \delta$ を観測画像 χ_{Ξ} としたときの (16) 式の解 $\varphi(\omega|\nu)$ の断面図を示している. ただし, 計算にあたっては $\rho = 4$ としている.

前章の結果と組み合わせると, アトラクター Ξ 上の彷徨運動は偏微分方程式 (16) の解として得られる捕獲確率 $\varphi(\omega|\nu)$ を通して観測できることがわかる. この φ にもとづいてつぎの点集合を定義する.

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \tilde{\theta} \in \Omega \mid \nabla \varphi(\tilde{\theta}|\nu) = 0, \det [\nabla \nabla^T \varphi(\tilde{\theta}|\nu)] > 0, \right.$$

$$\left. \Delta \varphi(\tilde{\theta}|\nu) < 0 \right\}. \quad (17)$$

定義より, $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ では, 未知アトラクター Ξ を未知写像群 ν を用いて捕獲する確率が極大となる. この意味で, $\tilde{\Theta}$ を Ξ の確率的特徴とよぶ. $\tilde{\Theta}$ は不変測度 χ_{Ξ} を確率的に離散化したイメージとなっている. したがって, $\tilde{\Theta}$ に含まれる ν の情報を抽出することにより, 描画過程 (3) を同定できるはずである. この観点から, 以下, 確率的特徴の構造を調べる.

5. 不変特徴の存在

自己相似性 (1) を確率特徴 $\tilde{\Theta}$ 上で評価することを考える. 縮小写像 μ_i を用いて定義される形態 $\mu_i(\Xi)$ に対して, 確率特徴 $\tilde{\theta}_i$ をつぎのように定義する.

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) &= 0, \\ \det [\nabla \nabla^T \varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i)] &> 0, \\ \Delta \varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) &< 0, \end{aligned} \quad (18)$$

ここに, $\varphi_i(\cdot|\mu_i)$ はつぎの偏微分方程式の解である.

$$\frac{1}{2} \Delta \varphi_i(\omega|\mu_i) + \rho[\chi_{\mu_i(\Xi)} - \varphi_i(\omega|\mu_i)] = 0. \quad (19)$$

形態 $\mu_i(\Xi)$ が Ξ の幾何学的縮小となっていること, および方程式 (19) と方程式 (16) が座標変換 μ_i により対応付けられることに注意すると, 分布 φ は, 逆写像 μ_i^{-1} による分布 φ_i の高分解能化に一致する (付録 A 参照). これより, つぎの再生性が導かれる.

[命題] $\varphi(\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu)$ は極大点である.

もとの形態 Ξ に関する方程式 (16) は縮小形態 $\mu_i(\Xi)$ に関する方程式 (19) を μ_i^{-1} の拡大率に応じた高解像度で表現する. この結果, $\tilde{\theta}_i$ は逆写像 μ_i^{-1} により, 捕獲確率 $\varphi(\omega|\nu)$ の極大点集合 $\tilde{\Theta}$ に移される. ただし, 変換 $\varphi(\cdot|\nu) \rightarrow \varphi_i(\cdot|\mu_i)$ にともなう解像度低下により, 確率特徴 $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ が部分集合 $\mu_i(\tilde{\Theta})$ に移るとは限らない. このように, 測度に関する再生性 (12) は必ずしも確率特徴の再生性を意味しない. ただし, 各縮小領域 $\mu_i(\Xi)$ が十分な広がりをも有し, 確率特徴の部分集合 $\mu_i(\tilde{\Theta})$ を分離する場合にはつぎの不変性が成り立つ.

[命題] 縮小形態 $\mu_j(\Xi)$, $\mu_j \in \nu$ に関する測度 $g_{\tau} * \chi_{\mu_j(\Xi)}$ が $\tilde{\theta}_i \notin \mu_j(\Xi)$ なる確率特徴 $\tilde{\theta}_i$ に関して測度分離条件

$$g_{\tau} * \chi_{\mu_j(\Xi)}(\tilde{\theta}_i) \simeq 0, \quad (20)$$

を満たすとき, 空でない部分集合 $\Theta \subset \tilde{\Theta}$ が存在し, つぎの再帰式を満たす.

$$\Theta = \left\{ \theta \in \tilde{\Theta} \mid \exists \mu_i \in \nu : \mu_i^{-1}(\theta) \in \Theta \right\}, \quad (21)$$

すなわち, 条件 (20) のもとで写像群 ν の検出は離散情報 (21) の計算に帰着する. この意味で, Θ を未知アトラクター Ξ の不変特徴とよぶ.

6. デジタル画像上での不変特徴の検出

分解能 $N_i \times N_j$ で離散化したデジタル画面 $\Omega(N_i, N_j)$ を

2次元配列と同一視し、形態を $\omega = (i, j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N_i$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_j$ の画素で表現することを考える。光化学反応, あるいは, 光電変換をともなう撮像過程では, 到達光量は (i, j) 画素ごとの積分値として計測される。以下, (3) 式によるパターン形成を $t = 1, 2, \dots, T_{\max}$ の時間区間で実行するものとし, 遷移確率 $P_{\omega}^t(\Xi|\nu)$ を $\rho \sim 1/T_{\max}$ を単位として計量する。動的表現 (15) より, ρ はスケール $\sigma = (N_i \times N_j) / T_{\max}$ 画素単位で表現されることになる。

適切な前処理が施され, 形態の構成点分布が測度 χ_{Ξ} として観測されるものとしよう。微分作用素 $1/2\Delta$ の漸近安定性に着目し, 離散データ上で捕獲確率 $\varphi(\omega|\nu)$ をつぎのように逐次近似する。

$$\begin{aligned} \varphi(i, j) &\leftarrow \bar{\varphi}(i, j), \\ \bar{\varphi}(i, j) &= \frac{1}{2+\bar{\rho}} [2\bar{\varphi}(i, j) + \bar{\rho}\chi_{\Xi}(i, j)], \end{aligned} \quad (22)$$

ただし, $\varphi(i, j)$ は (i, j) 画素における捕獲確率 $\varphi(\omega|\nu)$ の値であり, $\bar{\varphi}(i, j)$ は次式で表わされる局所平均値である。

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(i, j) &= \frac{1}{4} [\varphi(i+1, j) + \varphi(i-1, j) \\ &\quad + \varphi(i, j+1) + \varphi(i, j-1)]. \end{aligned}$$

(22) 式では, 時空間の分解能を考慮して, パラメータ ρ を $\bar{\rho} = \rho/\sigma$ で置き換えている。

デジタル情報 $\varphi(i, j)$ 上で確率的特徴は次式で直接計算できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(i, j) &= \left\{ (i, j) \mid \varphi(i, j) > \varphi(i + \delta_i, j + \delta_j), \right. \\ &\quad \left. \delta_i, \delta_j = \pm 1 \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

(21) 式は, 縮小形態 $\mu_i(\Xi)$ の確率特徴点 $\tilde{\theta}_i$ がもとの形態の確率特徴 $\tilde{\Theta}$ の部分集合 Θ として再生されることを意味する。この不変特徴 Θ はつぎのアルゴリズムに従って計算することができる。

$$\Theta_{t+1} = \{\theta \in \Theta_t \mid \exists \mu_i \in \nu : \mu_i^{-1}(\theta) \in \Theta_t\}. \quad (24)$$

ただし初期値は $\Theta_0 = \tilde{\Theta}(i, j)$ であり, 停止条件は $\Theta_{t+1} = \Theta_t$ である。 Θ_0 の有限性および Θ_t の単調性 $\Theta_t \supset \Theta_{t+1}$ より, アルゴリズム (24) は必ず停止する。

(注意) 不変特徴 Θ はアルゴリズム (24) の停止解 Θ_{∞} を用いて $\Theta = \Theta_{\infty} \cup \Theta^o$ のように表現される。ただし, Θ^o は1回の写像 $\mu_i \in \nu$ により Θ_{∞} から到達する特徴点の集合, すなわち,

$$\Theta^o = \left\{ \theta^o \in \tilde{\Theta} \mid \exists \mu_i \in \nu : \mu_i^{-1}(\theta^o) \in \Theta_{\infty} \right\},$$

である。このように, Θ と Θ_{∞} は必ずしも一致しないが, $\Theta_{\infty} \neq \emptyset$ は Θ が存在するための十分条件を与える。また, Θ は, Θ_{∞} と同様, 写像群 ν に関して不変性を示す。すなわち, Θ_{∞} が検出できる場合には, これを手がかりに未知アトラクターを形成するアルファベットを見いだすことができる。

Table 1 Alphabet of contraction mappings

mapping	α_k	β_k	θ_k [deg]	a_k	b_k
μ_1	0.84	0.84	-3	0.04	0.17
μ_2	-0.33	0.33	65	0.30	0.61
μ_3	0.33	0.33	65	-0.30	-0.52
μ_4	0.09	0.18	0	0	-0.80
μ_5	0.50	0.50	0	0	0
μ_6	0.50	0.50	0	-0.45	-0.25
μ_7	0.50	0.50	0	0.45	-0.25
.....					
μ_{17}	0.33	0.33	65	0.34	-0.32

Fig. 4 Dictionary of patterns

7. 実験

上述の方法を用いた形態検出実験を行なった。実験の主要目標は, 不変特徴にもとづくアルゴリズムの検出能力, 計算効率および耐ノイズ性を確かめることである。本実験に用いた縮小写像を **Table 1** に示す。これら写像群からアルファベット ν を選択することにより, **Fig. 4** に示すアトラクターを生成できる。実験にあたっては, たとえば, **LEAVES**, **FERN**, **STREET** はそれぞれアルファベット $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, $\{\mu_5, \mu_6, \mu_7\}$ を用いたモンテカルロ・シミュレーションにより生成している。具体的には, $\mu_k \in \nu$ を確率 p_k , $\left(\sum_{i=1}^{\|\nu\|} p_k = 1\right)$, で選択しつつ, 形態構成点 $\omega = (i, j)$ を逐次計算する。

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \alpha_k \cos \theta_k & -\alpha_k \sin \theta_k \\ \beta_k \sin \theta_k & \beta_k \cos \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}. \quad (25)$$

この前進アルゴリズムは, (3) 式の手順とは一致しないが, 同一のアルファベット ν に対応するアトラクターを漸近的に生成することができる²¹⁾。本シミュレーションでは, 繰り返しごとに $[0, 1)$ の値をとる一様疑似乱数 r を発生させ, $r \in [P_k, P_k + p_k)$ のときに μ_k を選択する。ただし

$$P_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1} p_i; & 1 < k \leq \|\nu\|, \\ 0; & k = 1, \end{cases}$$

Fig. 5 Invariant features associated with FERN

Fig. 6 Effective features associated with FERN

である。

Fig. 4 の辞書を用いた実験はつぎの手順で行なった。まず、デジタル画像として観測された $\chi_{\Xi}(i, j)$ にもとづいて離散版捕獲確率 $\varphi(i, j)$ および確率的特徴 $\hat{\Theta}(i, j)$ を生成する。ついで、このような bottom-up 情報に対して辞書中の全アルファベットの順次適用し、アルゴリズム (24) の停止解 Θ_{∞} を求める。最後に、 $\Theta_{\infty} \neq \emptyset$ を満たすアルファベットを特定し、辞書を top-down 情報とした自己相似性の検出結果とする。この結果にもとづき、不変特徴にもとづく形態識別能力、デジタル画像上での計算効率ならびに耐ノイズ性の観点から、アルゴリズムの検出能力に関する検討を行なう。

(22) から (24) 式を用いた検出結果の一例を Fig. 5 および Fig. 6 に示す。ここでは、 $N_i = N_j = 32$, $T_{\max} = 30$ としている。ここでの問題は、点集合として観測されるアトラクター $\Xi_{T_{\max}}$ にもとづいて Table 1 および Fig. 4 で与えられた写像群中のアルファベット ν を検出することである。検出結果の妥当性は、 ν を用いて再生される形態と観測されたアトラクターを比較することにより確認する。Figs. 5, 6 で、Observation 領域には (25) 式を用いて生成された点集合を示し、Features 領域には、(16) および (17) 式を用いて計算される確率特徴 $\hat{\Theta}$ の分布状況を示す。これらの図に示すように、特徴点は、小サイズの離散集合 $\hat{\Theta}$ として検出され、縮小アルゴリズム (24) により、不変集合 $\hat{\Theta}$ を形成する写像群 $\hat{\nu} = \{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \dots\}$ が特定される。図中の Coding 領域に

Fig. 7 Convergence of digitized φ and $\hat{\Theta}$

は、 $\hat{\Theta}$ の構成点と $\hat{\Theta}$ 上に形成されるリンク $\hat{\theta} \rightarrow \hat{\mu}_i(\hat{\theta})$, $\hat{\theta} \in \hat{\Theta}$, $\hat{\mu}_i \in \hat{\nu}$, をあわせて示している。このように検出された写像群 $\hat{\nu}$ は (25) 式の描画メカニズムを制御し、Restoration 領域に示すようなアトラクター $\hat{\Xi}$ を再生する。

ただし、不変特徴 $\hat{\Theta}$ の存在は必ずしも一致性 $\hat{\nu} = \nu$ を意味しない。すなわち、 $\hat{\Theta} \neq \emptyset$ の条件のみでは、Fig. 5 に示すように、複数の写像群が同定されることもありうる。ここでは、観測された FERN 形態に対して、LEAVES, STREET アルファベットも不変特徴を生成し、TREE, GASKET, CARPET アルファベットは不変特徴を生成していない。これは、観測された FERN 形態に対して、LEAVES, STREET も自己相似性の記述候補として検出されることを意味する。この候補を絞りこむことを目的に、Fig. 6 では、つぎの条件を付加している。

$$\forall \hat{\mu}_i \in \hat{\nu} \implies \exists \hat{\theta}_i^o, \hat{\theta}_i^d \in \hat{\Theta} : \hat{\mu}_i^{-1}(\hat{\theta}_i^d) \in d(\hat{\theta}_i^o). \quad (26)$$

この結果、図に示すように、不一致アトラクター STREET が除去されている。条件 (26) はアルファベット $\hat{\nu}$ を構成するすべての縮小写像が特徴点 $\hat{\Theta}$ 上のリンク形成に寄与することを求めている。

さて、アトラクターの構成 (2) に注意すると、 $\nu_1 \subset \nu_2$ なる写像群 ν_1, ν_2 に対して、

$$\bigcup_{\nu_1} \mu_i(\Xi_1) = \Xi_1 \subset \Xi_2 = \bigcup_{\nu_2} \mu_i(\Xi_2), \quad (27)$$

が成立する。この単調性より、FERN パターンの特徴点上に LEAVES 写像群に関する不変集合 $\hat{\Theta}$ は存在しうる。実際 Fig. 6 では両者が検出され、包含関係 (27) を満たさない STREET は排除されている。

繰り返し計算 (22) 中の φ および対応する $\hat{\Theta}$ の変化を Fig. 7 に示す。ただし

$$e_{\varphi} = \max_{(i,j) \in \Omega(N_i, N_j)} |\varphi(i, j) - \hat{\varphi}(i, j)|,$$

であり、 $\delta \hat{\Theta}$ は φ および $\hat{\varphi}$ に対応する確率特徴間のハウスドルフ距離である。本図より、確率的特徴 $\hat{\Theta}$ は捕獲確率 φ に先行して収束することがわかる。これは、計算過程 (24) が拡散過程 (22) に比べて十分早く実行できる場合には、画像レベ

ルでの決定を待たずに構造情報を検出できることを意味する。

本論文で述べた形態検出方法の耐ノイズ性を実験的に検討した。実験結果の一例を Fig. 8 および Fig. 9 に示す。ここでは、 $(N_i, N_j) = (640, 480)$, $T_{\max} = 10,000$ としている。また、ノイズとしては、 $4 \times T_{\max}$ 個の 2 次元一様乱数 $\omega_r = (r_x, r_y)$ に対応する画素に点画像 δ_{ω_r} を描画し、 $\Xi_{T_{\max}}$ に重畳している。ただし Fig. 9 の CARPET は、高さを 5/9 に圧縮している。各図で、(a) は一様乱数に埋もれたアトラクター Ξ を、(b) はノイズにより乱された捕獲確率 φ を、(c) は検出された写像群にもとづいて再生されたフラクタルパターン $\hat{\Xi}$ を、それぞれ示す。Fig. 8(b), 9(b) より、画像 $\chi_{\Xi_i}^{\delta}$ および捕獲確率 φ の生成過程 (5) および (15) を通してフラクタル・アトラクターと一様背景雑音が効果的に分離されていることがわかる。この結果、各図 (c) に示すように雑音に埋もれていたアトラクター FERN および CARPET を検出、再生している。これら (c) には、再生されたアトラクターをシルエットで示すとともに、自己相似性検出の根拠を与える不変特徴を点集合 Θ とリンク $\hat{\theta} \rightarrow \hat{\mu}_i(\hat{\theta})$, $\hat{\theta} \in \hat{\Theta}$, $\hat{\mu}_i \in \hat{\nu}$ から構成されるグラフ構造として表示している。Fig. 8, 9 は、捕獲確率の生成を通してかなりのノイズ抑制が可能なこと、および、自己相似性の検出アルゴリズム (24) は推定された捕獲確率に残存するノイズ成分にほとんど影響を受けないことを意味している。

8. 検 討

与えられた画像から自己相似規則を求める問題はフラクタル符号化の重要課題としても研究がなされている²⁴⁾。従来の定式化では、対象領域と相似な領域を画面内で探索する方法が用いられてきた。この候補領域を、たとえば、長方形のような単純な形状に定めると複雑な画像にあてはめる際の誤差が大きくなる。一方候補領域を複雑な形状にした場合には、膨大な記憶容量と、複雑な領域判定が必要となる。これはフラクタル符号化の隘路として認識され、照合効率を向上させるための研究が進められている²⁵⁾。これに対して本論文で述べた方法では、未知形態の生成情報を含む確率的特徴を自己相似則検出の手がかりとして用いる。このような対象依存型の特徴点上で自己相似性をテストする結果として、探索領域は bottom-up 画像処理の結果として定まることになる。また、関連計算は離散集合上での照合判定に置き換えられている。

(22) および (23) 式が局所並列実行可能であること、および特徴点が自己相似構造を保存しつつアトラクターを高効率で圧縮していることに着目すると、不変性テストにもそれほど大きな計算パワーを必要としない。このような特徴は、複雑パターンの圧縮表現、情景解析などの応用を考える際のメリットとなる。実際、(27) 式に示す推論可能性、(25) 式に示す描画性、Figs. 8, 9 に示す耐ノイズ頑健性は、とくにインタラクティブな対象指示・認識システムのための形態表現に不可欠の要件といえる。また、Fig. 7 に示される計算過程の先行性は、移動視覚などで知覚系と制御系を実時間統合する

(a) Fern attractor corrupted by uniform random noise

(b) Capturing probability distribution

(c) Invariant feature on regenerated attractor

Fig. 8 FERN in noisy background

際有利となる。

特徴点上での不変性テストは、必ずしも写像群を一意に特定しない。これは、原理的に‘真の形成メカニズム’を知りえない自然物体に対するデザイン・アプローチ²⁶⁾および背景ノイズ中の対象パターンを選択的に検出するメカニズムに検証基準を与えられることを意味し、実世界で人間と協調する認

(a) Carpet attractor corrupted by uniform random noise

(b) Capturing probability distribution

(c) Invariant feature on regenerated attractor

Fig. 9 STRIP in noisy background

識・制御システム^{27), 28)}実現に有効と思われる。ただし、一意性が求められた場合の写像群選択尺度の設計は検討課題として残されている。

9. おわりに

自己相似形態とその観測画像を結びつける条件付き確率を

導入した。この条件付き確率はマルチスケール画像として表現され、描画過程に対して不変な特徴点を生成する。この特徴点集合にもとづくフラクタル・パターン検出アルゴリズムを導出し、その妥当性を確かめた。上記マルチスケール画像はKolmogorov複雑さをパラメータとする拡散システムの解過程として形成できる。また、不変特徴の一致性は、自己相似形態を生成する写像の寄与度により評価できる。ただし現段階の検出アルゴリズムを起動するためには、真のアルファベットを含む写像候補を事前に定めておく必要がある。この前提条件を緩和すること、たとえば先験的なアルファベットを検出された特徴点集合に適応させることは今後の課題である。

参考文献

- 1) J.J. Gibson: *The Ecological Approach to Visual Perception*, Houghton Mifflin Company, Boston, Massachusetts (1979)
- 2) G. Kanizsa: *Organization in Vision: Essays in Gestalt Perception*, Praeger, New York, New York (1979)
- 3) K.T. Spoeher and S.W. Lehmkuhle: *Visual Information Processing*, W.H. Freeman and Company, New York, New York (1982)
- 4) M.C. Escher: *Escher on Escher—Exploring the Infinite—*, Harry N. Abrams, Inc., New York, New York (1989)
- 5) Y. Miyashita and H.S. Chang: Neural correlate of pictorial short-term memory in the primate temporal cortex, *Nature*, **331**-7, 568/570 (1988)
- 6) I. Fujita, K. Tanaka, M. Ito and K. Cheng: Columns for visual features of objects in monkey inferotemporal cortex, *Nature*, **360**-26, 343/346 (1992)
- 7) T. Hamada, K. Kamejima and I. Takeuchi: Image based operation for human-robot interaction, *IEEE Control Systems Magazine*, **10**, 24/26 (1990)
- 8) K. Kamejima, R. Dennert and Y.C. Watanabe: Open logic machine—an interactive perception architecture for unstructured scene analysis—, *Advanced Robotics*, **8**, 385/411 (1994)
- 9) A.E. Jacquin: Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations, *IEEE Transactions on Image Processing*, **IP-1**-1, 18/30 (1992)
- 10) L. Lewinson: Fractal database—new horizons in database management, *PC AI*, **3**-2, 30/32 (1994)
- 11) Y.C. Ogawa, K. Kamejima and Y. Nakano: Syntactic image analysis for environment understanding, *Proceedings of IEEE International Workshop on Industrial Applications of Machine Vision and Machine Intelligence*, 266/271, IEEE, Tokyo, Japan (1987)
- 12) K. Kamejima, T. Hamada, M. Tsuchiya and Y.C. Watanabe: From self navigation to driver's associate: an application of mobile robot vision to a vehicle information system, I. Masaki, editor, *Vision-based Vehicle Guidance*, 173/203, Springer-Verlag, New York, New York (1992)
- 13) K.S. Fu: *Syntactic Pattern Recognition and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1982)
- 14) B. Xiang and L.J. Latecki: Path similarity skeleton graph matching, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **PAMI-30**-7, 1282/1292 (2008)
- 15) B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, New York, updated and augmented edition (1983)
- 16) M. McGuire: *An Eye for Fractals -a graphic and photographic essay*, Addison-Wesley, Redwood City, California

- (1991)
- 17) A.P. Pentland: Fractal-based description of natural scenes, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **PAMI-6-6**, 661/674 (1984)
 - 18) Tan T. and H. Yan: Face recognition using the weighted fractal neighbor distance, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Review*, **SMC-35-4**, 576/582 (2005)
 - 19) M.F. Barnsley: *Superfractals*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2006)
 - 20) J.E. Hutchinson: Fractals and self similarity, *Indiana University Mathematical Journal*, **30**, 713/747 (1981)
 - 21) M.F. Barnsley: *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, California (1988)
 - 22) D. Marr: *Vision—A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, California (1982)
 - 23) A.N. Kolmogorov: Three approaches to the quantitative definition of information, *Problems in Information Transmission*, **1**, 1/7 (1965)
 - 24) M.F. Barnsley and L.P. Hurd: *Fractal Image Compression*, AK Peters, Wellesley, Massachusetts (1993)
 - 25) R. Distasi, M. Nappi and D. Riccio: A range/domain approximation error-based approach for fractal image compression, *IEEE Transactions on Image Processing*, **IP-15-1**, 89/97 (2006)
 - 26) K. Kamejima: Stochastic design of imaging parameters for self-similar patterns, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **30-4**, 2231/2236 (1997)
 - 27) M. Pi, M.K. Mandal and A. Basu: Image retrieval based on histogram of fractal parameters, *IEEE Transactions on Multimedia*, **MM-7-4**, 597/605 (2005)
 - 28) M. Ghazel, G.H. Freeman and E.R. Vrscay: Fractal-wavelet image denoising revisited, *IEEE Transactions on Image Processing*, **IP-15-9**, 2669/2675 (2006)

《付 録》

A. $\varphi(\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu)$ の極大性

形態 $\mu_i(\Xi)$ が Ξ の幾何学的縮小となっていること、および方程式 (19) と方程式 (16) が座標変換 μ_i により対応付けられることに注意すると、分布 φ は、逆写像 μ_i^{-1} による分布 φ_i の高分解能化に一致する。すなわち、分布 φ_i を写像 μ_i による縮小スケールで再評価することにより

$$\begin{aligned}\nabla_{\omega}\varphi(\omega|\nu) &= J_{\mu_i^{-1}}(\omega)\nabla_{\zeta}\varphi_i(\zeta|\mu_i), \\ \Delta_{\omega}\varphi(\omega|\nu) &= \nabla_{\zeta}^T \left[J_{\mu_i^{-1}}^T J_{\mu_i^{-1}} \right]_{\omega} \nabla_{\zeta}\varphi_i(\zeta|\mu_i) \\ &\quad + \left[\nabla_{\omega}^T J_{\mu_i^{-1}}(\omega) \right] \nabla_{\zeta}\varphi_i(\zeta|\mu_i),\end{aligned}$$

なる対応付けが得られる。ただし、 $\zeta = \mu_i(\omega)$ である。また、 $J_{\mu_i^{-1}}$ は逆写像 μ_i^{-1} の関数行列 (Jacobian Matrix) を表わす。縮小写像 $\mu_i \in \nu$ に対して

$$\left[J_{\mu_i^{-1}}^T J_{\mu_i^{-1}} \right]_{\omega} - I \geq 0, \quad (\text{A.1})$$

が成り立つことに注意すると、とくに $\zeta = \tilde{\theta}_i$, ($\omega = \mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)$), のときには、定義 (18) より、

$$\nabla_{\omega}\varphi[\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu] = J_{\mu_i^{-1}}(\omega)\nabla_{\zeta}\varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\omega}\varphi[\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu] &= \nabla_{\zeta}^T \left[J_{\mu_i^{-1}}^T J_{\mu_i^{-1}} \right]_{\omega} \nabla_{\zeta}\varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) \\ &\quad + \left[\nabla_{\omega}^T J_{\mu_i^{-1}}(\omega) \right] \nabla_{\zeta}\varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) \\ &= \nabla_{\zeta}^T \left[J_{\mu_i^{-1}}^T J_{\mu_i^{-1}} \right]_{\omega} \nabla_{\zeta}\varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) \\ &\leq \frac{1}{2}\Delta_{\zeta}\varphi_i(\tilde{\theta}_i|\mu_i) < 0, \quad (\text{A.3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\det \left[\nabla_{\omega}\nabla_{\omega}^T \varphi \right] [\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu] \\ &= \det \left[J_{\mu_i^{-1}}(\omega)\nabla_{\omega} \left[J_{\mu_i^{-1}}(\omega)\nabla_{\omega} \right]^T \varphi \right] [\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu] \\ &= \det \left[J_{\mu_i^{-1}}(\omega) \right]^2 \cdot \det \left[\nabla_{\zeta}\nabla_{\zeta}^T \varphi_i \right] (\tilde{\theta}_i|\mu_i) > 0\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となり、 $\varphi(\mu_i^{-1}(\tilde{\theta}_i)|\nu)$ の極大性が導かれる。

[著 者 紹 介]

亀 島 鉦 二 (正会員)

1949 年 2 月 7 日生。73 年京都工芸繊維大学工学研究科修士課程修了。同年 (株) 日立製作所中央研究所入社。同社機械研究所主任研究員を経て 94 年より大阪工業大学教授。工学博士。SIAM, IEEE, システム制御情報学会, 機械学会などの会員。