状態フィードバックによる H_∞ 制御の極限特性についての検討

鈴木 亮一*・谷 正史*・池本 元紀**・小林 伸明*

Limiting Property of Full Information H_∞ Control by State Feedback

Ryoichi SUZUKI, Masashi TANI, Motoki IKEMOTO and Nobuaki KOBAYASHI

In this paper, a limiting property of full information H_∞ control is discussed. Existence of a solution for full information H_∞ control problems and limiting properties of a closed-loop system i.e. disturbance attenuation and disturbance decoupling are proposed. Moreover, relationship between limiting properties of LQ control and full information H_∞ control is mentioned. The paper also gives numerical examples to verify the limiting properties of full information H_∞ control.

Key Words: H_∞ control, linear optimal regulator, decoupling control, disturbance attenuation

1. はじめに

外乱の影響を抑制する制御として H_∞ 制御があることはよく知られている。 H_∞ 制御は外乱の抑制を目的とするため、全状態の利用可能なフィードバック制御則により外乱から出力までの H_∞ ノルムを指定した値に抑制する場合、外乱がシステムに加わるようすを示す外乱項の係数が Riccati 方程式に陽に表われる。この点で LQ 制御と大きく異なる。このため、安定とする解が存在すれば、外乱から出力の伝達関数の H_∞ ノルムが指定した値 γ 未満に抑制されることが保証される。しかしながら、外乱の係数項が Riccati 方程式に加わるため、システムを安定とする解の存在については Riccati 方程式から直ちには判別しにくい。

一方、 LQ 制御は外乱抑制が直接の狙いではない。このため、Riccati 方程式に外乱の加わる項がないので、可制御性や可観測性などの条件だけで安定とする解の存在を保証することができる。全状態の利用が可能な状態フィードバックによる H_∞ 制御において、外乱抑制という条件を除く、すなわち外乱抑制の評価パラメータ γ を $\gamma \rightarrow \infty$ とすれば、 LQ 制御に漸近するので解の存在は保証される。しかし、 γ を有限値としたときやフィードバックゲインを調整するパラメータ ε を $\varepsilon \rightarrow 0$ に極限したときの解の存在とその条件は必ずしも明確なものではない。また、 LQ 制御の極限特性^{1)~3)} とのかかりについての議論もなされていない。極限特性に着目し

た外乱抑制制御にかかわる研究としては、たとえば文献 4), 5) および 6) が知られているが非干渉特性については議論されていない。

そこで、本論文では特に有限値 $\gamma > 0$ をできる限り小さくしても、閉ループ系を安定とする解が存在するためにはいかなる条件が成立すればよいか、そのとき ε をどのように選定すればよいかについて、状態フィードバックによる H_∞ 制御の設計パラメータ γ, ε にかかわる問題を扱う。ここでは LQ 制御の極限特性から上述の点を検討するとともに、 LQ 制御の極限から導出される近似非干渉特性、外乱除去特性^{3), 7), 8)} との類似点、相違点を明らかにし、これらの結果を数値例により確認する。

2. 問題設定

つぎのように外乱が加法的に加わるシステムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + D\xi \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、 $x \in R^n$ は状態ベクトル、 $u \in R^r$ は入力ベクトル、 $y \in R^m$ は出力ベクトル、 $\xi \in R^p$ はシステムに加わる外乱ベクトルであり、 (A, B, C) は可制御、可観測とする。

(1) 式に対する状態フィードバックによる H_∞ 制御問題において、制御則

$$F_\varepsilon = -\varepsilon^{-2} B^T X\tag{2}$$

$$XA + A^T X + C^T C - \varepsilon^{-2} X B B^T X + \gamma^{-2} X D D^T X = 0\tag{3}$$

により、閉ループ系を安定とする $X \geq 0$ が存在すれば

$$\|C(sI - A - BF_\varepsilon)^{-1} D\|_\infty < \gamma\tag{4}$$

を達成する。

しかしながら、(3) 式の Riccati 方程式の解の存在については、 γ の値に応じて ε を選定し解の存在性を確認せざるを

* 金沢工業大学工学部 石川県石川郡野々市町扇が丘 7-1

** CKD 株式会社 小牧市応時二丁目 250 番地

* College of Engineering, Kanazawa Institute of Technology, 7-1 Ohgigaoka, Nonoichi, Ishikawa

** CKD Corporation, 2-250, Ouji, Komaki

(Received August 10, 2009)

(Revised February 12, 2010)

得ない。外乱の影響を小さくするためには γ を小さく設定できることが望ましいが、 $\gamma > 0$ を小さく設定した場合に、どのような条件の下で ε をどのように選定すれば、閉ループ系の安定性を保証できるか不明である。また LQ 制御の場合、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限において安定とする解の存在は保証されているが^{2),7)}、 H_∞ 制御の場合(4)式を達成するための $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限解の存在の議論はされていない。

そこで、本論文では制御則(2)式、(3)式について、

- (1) $\gamma(>0)$ をできる限り小さい値に指定したときに、いかなる条件の下で閉ループ系を安定とする解が存在するのか。
- (2) また、この場合にパラメータ ε をどのように選定すればよいか。
- (3) LQ 制御の極限特性との関係から、外乱除去(抑制)と非干渉特性のかかわりが導出されるのか。
- (4) そのときの LQ 制御と H_∞ 制御の相違点はどのような事柄か。

を検討し、その結果を明らかにする。

3. LQ 制御の極限特性

状態フィードバックによる H_∞ 制御の極限特性を考える前に、 LQ 制御の特性を示しておく、(2)式、(3)式において $\gamma \rightarrow \infty$ としたとき、 LQ 制御の解

$$F_\varepsilon^* = -\varepsilon^{-2} B^T X^* \quad (5)$$

$$A^T X^* + X^* A + C^T C - \varepsilon^{-2} X^* B B^T X^* = 0 \quad (6)$$

に漸近することは知られている。ここで $\gamma > 0$ の有限値としたとき、 LQ 制御とどのような関係になるかを検討するため、つぎの点に留意しておく。

まず、(2)式、(3)式の制御則において(3)式の両辺を ε^2 で割ると

$$\begin{aligned} & XA/\varepsilon^2 + A^T X/\varepsilon^2 + C^T C/\varepsilon^2 \\ & + X/\varepsilon^2 (\varepsilon^2/\gamma^2 DD^T - BB^T) X/\varepsilon^2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

である。ここで、 $X/\varepsilon^2 = \tilde{X}$ とおくと

$$F_\varepsilon = -B^T \tilde{X} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{X} A + A^T \tilde{X} + C^T C/\varepsilon^2 \\ & + \tilde{X} (\varepsilon^2/\gamma^2 DD^T - BB^T) \tilde{X} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。このことは、 $\gamma \rightarrow \infty$ としたときの LQ 制御に一致する。対応する LQ 制御問題は、

$$J_\varepsilon = \int_0^\infty (y^T y + \varepsilon^2 u^T u) dt \quad (10)$$

を評価関数とした場合の解(5)式、(6)式と

$$\varepsilon^{-2} J_\varepsilon = \int_0^\infty (\varepsilon^{-2} y^T y + u^T u) dt \quad (11)$$

を評価関数としたときの解は(8)式、(9)式で $\gamma \rightarrow \infty$ としたものであり、両者は相対的重みの付け方の違いはあるものの同じ問題であり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とした場合と同一の解を導く。すなわち、文献9)、10)と文献11)で異なるアプローチおよび性質について論じているが極限解は同じであり、同一の性質をもつことを注意しておく。

LQ 制御の極限について、(5)式、(6)式の $\varepsilon \rightarrow 0$ における極限解 X^* を X_ε^* とおくと、つぎの補題が成立する。

補題 1⁹⁾ LQ 制御において、(5)式、(6)式の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で、そのときの X^* を X_ε^* とすると

$$v_{bg}^* = \text{Ker } X_\varepsilon^* \quad (12)$$

となる。

ここで、 v_{bg}^* は

$$v_{bg}^* = v_g^* + S^* \quad (13)$$

であり、 v_g^* は $\text{Ker } C$ に含まれる最大の $A-B$ 不変部分空間 v^* のうち閉ループ系の特性根が複素平面の虚軸を含む右半平面にない部分空間であり、また、 S^* は $\text{Im } B$ を含む最小の $C-A$ 不変部分空間で、

$$S_0 = \text{Im } B \quad (14)$$

$$S_{i+1} = \text{Im } B + A(\text{Ker } C \cap S_i) \quad (15)$$

のアルゴリズムによって導出される。つまり(14)式、(15)式の逐次計算を経て導出される S^* は、出力挿入により得られる最小の可制御部分空間である(ある K に対して $(A+KC, B)$ なる可制御部分空間の最小のものを意味する)⁹⁾。□

補題1の条件を用いることで外乱除去可能な条件は、不変零点を使つたつぎの条件にいい換えることができる。

補題 2 システム (A, B, C) が右可逆で虚軸に零点をもたないとき、つぎの条件 i, ii は等価である。

i. $v_{bg}^* \supset \text{Im } D$

ii. システム (A, B, C) の不変零点からつぎの式を満たす z を除いたものがすべて安定である。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -zI + A & B & D \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} < n + m \quad (16)$$

証明

システム (A, B, C) に対し、状態フィードバックおよび出力の直接挿入により $(A+BF+KC, B, C)$ が最大不可観測、最大不可制御なシステムとなるようにする。ついで、これを等価変換および入出力の正則変換したシステム行列 $P(s)$ は、

$$P(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 - sI & 0 & 0 & 0 & \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 - sI & 0 & 0 & 0 & \hat{B}_2 \\ 0 & 0 & \hat{A}_3 - sI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_4 - sI & 0 & 0 \\ \hat{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

のように表わすことができる¹²⁾。ここで、右可逆の条件の下では、 $P(s)$ に不可制御で可観測なモードは存在しないから

$$\tilde{P}(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 - sI & 0 & 0 & \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 - sI & 0 & 0 & \hat{B}_2 \\ 0 & 0 & \hat{A}_4 - sI & 0 & 0 \\ \hat{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる。このとき、システムの不変零点は $\hat{A}_4$ の固有値 $\sigma(\hat{A}_4)$ となる。 (A, B, C) の不変零点で C^+ に存在するもの s^+ として

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1 - s^+ I & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 - s^+ I & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_4 - s + I \end{bmatrix} v = 0 \quad (19)$$

上式を満足する v で構成される部分空間を v^* とする. v_{bg}^* の定義から $v_{bg}^* = v_g^* + S^*$ で(18)式のシステム行列のシステムにおいて, S^* は可制御部分空間であり, v_g^* は v^* のうち不安定極(不安定零点と一致)となる固有ベクトルで生成される部分空間となる. これより全空間 χ から v_g^* を除いた部分空間が $v_g^* + S^*$ であるから

$$\chi - v_g^* = v_{bg}^* \quad (20)$$

が成立する. したがって

$$v_{bg}^* \supset \text{Im } D \quad (21)$$

であることは, D の行列を付加したシステム行列 $\hat{P}(s)$ が

$$\hat{P}(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 - sI & 0 & 0 & 0 & \hat{B}_1 & 0 & D_1 \\ 0 & \hat{A}_2 - sI & 0 & 0 & 0 & \hat{B}_2 & D_2 \\ 0 & 0 & \hat{A}_4^+ - sI & 0 & 0 & 0 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_4^- - sI & 0 & 0 & D_4 \\ \hat{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

と書けることから, $D_3=0$ となる D が(21)式を満たすことを意味する. ただし, $\hat{A}_4$ の固有値のうち複素左半平面にあるモードを $\hat{A}_4^-$, 右半平面にあるモードを $\hat{A}_4^+$ とおいた.

不変零点は状態フィードバック, 出力の直接挿入および等価変換に対して不変であるから, $\hat{P}(s)$ で $D_3=0$ となることは条件 ii と等価である. $\square$

注意 補題2の条件は右可逆を制約するやや厳しい条件であるが, LQ 制御の極限においても外乱分離との関係はもともと右可逆の場合にしか明らかにされていないこと, 補題2をもとに定理および系を主張していることから, 本論文を通して右可逆システムに限定していることに注意されたい.

また, LQ 制御の(5)式, (6)式は $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限において前述したとおり(8)式, (9)式で $\gamma \rightarrow \infty$ とした場合と同じ特性をもつことから, つぎの2つの性質が知られている.

性質 1³⁾ 安定な外乱分離条件, すなわち補題2の ii の条件を満足するとき, (5)式で得られる LQ 制御の制御則 F_ε^* を(1)式のシステムに施した閉ループ系において

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(sI - A - BF_\varepsilon^*)^{-1} D = 0 \quad (23)$$

が成立する. $\square$

性質 2⁷⁾ $r=m$ の正方システム (A, B, C) がつぎの条件

A1. 非干渉化条件

$$\text{rank } B^* = m \quad (24)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1-1} B \\ \vdots \\ c_i A^{d_i-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m-1} B \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$d_i = \min[j | c_i A^{j-1} B \neq 0 \quad j=1, 2, \dots, n-1] \quad (26)$$

ここで, c_i は行列 C の i 番目の行ベクトルを表わす.

A2. システム (A, B, C) の不変零点から, つぎの式を満足する z^+

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -z^+ I + A & B \\ c_i & 0 \end{bmatrix} < n+1 \quad (i=1, \dots, m) \quad (27)$$

を除いた零点がすべて安定であるとき, 制御則

$$u = F_\varepsilon^* x + G_\varepsilon^* w \quad (28)$$

$$G_\varepsilon^* = (C(-A - BF_\varepsilon^*)^{-1} B)^{-1} \quad (29)$$

を用いたときの閉ループ系は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(sI - A - BF_\varepsilon^*)^{-1} B G_\varepsilon^* = \text{diag}[\phi_1(s), \dots, \phi_m(s)], \phi_i(0)=1 \quad (30)$$

なる非干渉化を達成する. ただし, $\phi_i(s)$ は安定な有理式である. $\square$

4. 状態フィードバックによる H_∞ 制御の極限解とその特性

状態フィードバックによる H_∞ 制御の解の存在は, Riccati 方程式の安定化解の存在により γ, ε の値の決定によって左右される. ここでは, $\gamma > 0$ としたときにどのような ε で安定化解が存在するか, 特に $\varepsilon \rightarrow 0$ と極限するとき, どのような条件の下で解が存在するか, またそのときの特性を LQ 制御の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限解との関係から明らかにする.

まず, R, Q を実対称行列とした Riccati 方程式

$$XA + A^T X + XRX + Q = 0 \quad (31)$$

を考える. この方程式の解を X とし, 解のうち

$$A + RX \quad (32)$$

を安定にする X を安定化解と呼ぶ. (31)式において $R = -\varepsilon^{-2} B B^T + \gamma^{-2} D D^T$ とすると, (3)式の Riccati 方程式となる.

このとき(31)式の Riccati 方程式についてつぎの補題が成立している.

補題 3¹³⁾ (31)式の Riccati 方程式に対して A が実正方行列であれば, 唯一の安定化解が存在する.

これより, つぎの補題が導ける.

補題 4 システム (A, B, C) が右可逆で補題2の条件を満足し, γ を $\gamma > 0$ の任意の値に固定したとき状態フィードバックによる H_∞ 制御の解において, いかなる $\gamma > 0$ に対しても $\varepsilon \rightarrow 0$ と極限した場合に安定化解は存在し, (3)式の Riccati 方程式は $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限において LQ 制御の Riccati 方程式(6)式の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限解に漸近する.

証明

(3)式の Riccati 解は(9)式のように書ける. ここで, 補題2の条件の下で $\gamma > 0$ に対して, $\tilde{X} D D^T \tilde{X}$ を有限とする解 $\tilde{X}$ が存在すれば, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $\varepsilon^2 / \gamma^2 \tilde{X} D D^T \tilde{X}$ の項は零に漸近する. そこで, (A, B, C) が最小位相系なら

$$X^* A + A^T X^* + C^T C - \varepsilon^{-2} X^* B B^T X^* = 0 \quad (33)$$

の解に, 最小位相系でなく(16)式の条件下(非最小位相系の場合)では

$$X^*A + A^TX^* + H^TH - \varepsilon^{-2}X^*BB^TX^* = 0 \quad (34)$$

の解に一致する^{3),7)}。ただし、 H は

$$\begin{aligned} B^T(-sI - A^T)C^TC(sI - A)^{-1}B \\ = B^T(-sI - A^T)H^TH(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (35)$$

を満たす (A, B, C) の像システムとして得られる H で、 (A, B, H) は最小位相系である。

$\tilde{X}DD^T\tilde{X}$ が有限となる解 $\tilde{X}$ の存在については、(16)式の条件の下で、実際 LQ 制御の極限解 X_ε^* は補題 1 および補題 2 の結果から

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} X_\varepsilon^*D = 0 \quad (36)$$

が成立するので、 $X_\varepsilon^*DD^TX_\varepsilon^*$ は有限であり LQ 制御の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限解 X_ε^* が (3) 式の解として

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (X_\varepsilon^*A + A^TX_\varepsilon^* + H^TH \\ - \varepsilon^{-2}X_\varepsilon^*BB^TX_\varepsilon^* + \gamma^{-2}X_\varepsilon^*DD^TX_\varepsilon^*) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

を満足している。すなわち、 $\varepsilon \rightarrow 0$ において LQ 制御の極限解が (3) 式の安定化解として存在していることを示している。補題 3 から解は一意であるから補題 4 の結果が導ける。

□

以上の補題から、状態フィードバックによる H_∞ 制御の極限解としてつぎの定理を得る。

定理 1 システム (1) 式に対する状態フィードバックによる H_∞ 制御問題において、 (A, B, C) が右可逆で安定外乱分離条件 (16) 式を満足するとき、任意の $\gamma > 0$ に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ と極限すれば、(3) 式を満足する一意の安定化解が必ず存在する。また、得られる閉ループ系 $A + BF_\varepsilon$ は安定で LQ 制御の極限解に漸近する。

証明

補題 2 および補題 3 より、(16) 式の条件下で必ず $\varepsilon \rightarrow 0$ で

$$(A - \varepsilon^{-2}BB^TX + \gamma^{-2}DD^TX) \quad (38)$$

が安定となる一意解が存在しており、ここで、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D^TX = 0 \quad (39)$$

を考慮すれば

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A - \varepsilon^{-2}BB^TX + \gamma^{-2}DD^TX) \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A - \varepsilon^{-2}BB^TX) \end{aligned} \quad (40)$$

であるから、制御則 $u = F_\varepsilon x = -\varepsilon^{-2}B^TXx$ による閉ループ系は安定となる。また、 LQ 制御の極限解に漸近することは補題 4 より明らかである。

□

この定理は右可逆で安定な外乱分離条件を満たす場合、 H_∞ 制御の安定化解が、どのような γ の値に対しても ε を小さくすることにより必ず得られることを示しており、2 章の問題設定の検討課題 (1), (2) に対する解答を与えている。

より特殊な場合として、

$$\text{Im } B \supset \text{Im } D \quad (41)$$

が成立する場合を検討しておく。このとき、つぎの補題が成立する。

補題 5¹⁴⁾ $A = A^* > 0$, $B = B^* \geq 0$ であるとき、 $A > B$ となる必要十分条件は

$$\rho(BA^{-1}) < 1 \quad (42)$$

となることである。ただし、 $\rho(\cdot)$ は $(\cdot)$ 内の行列のスペクトル半径である。

□

この結果を利用すれば γ に応じて (3) 式を満足する安定化解を得るための ε を明確に決定でき、つぎのような結果が得られる。

系 1 外乱の加わる (1) 式のシステム (A, B, C, D) が (41) 式の条件を満足する。このとき (3) 式の Riccati 方程式に対して閉ループ系 $A + BF_\varepsilon$ を安定とする解 $X > 0$ が存在するためのパラメータ ε が存在し、 γ の値に応じ $\rho(GG^T) < \gamma^2/\varepsilon^2$ により ε を明確に決定できる。ただし G は $D = BG$ により与えられる。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とするとそれに応じて $\gamma \rightarrow 0$ とすることができる。

証明

条件 $\text{Im } B \supset \text{Im } D$ であるから $D = BG$ とする G が必ず存在する。この G を用いて Riccati 方程式は

$$\begin{aligned} XA + A^TX + C^TC \\ - \varepsilon^{-2}XBB^TX + \gamma^{-2}XBGG^TBX = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

とおける。これより

$$XA + A^TX + C^TC + XB(\varepsilon^{-2}I - \gamma^{-2}GG^T)B^TX = 0 \quad (44)$$

において $\varepsilon^{-2}I - \gamma^{-2}GG^T > 0$ であれば、 $X > 0$ が存在する。

補題 5 より

$$\rho(GG^T) < \gamma^2/\varepsilon^2 \quad (45)$$

が成立すれば $\varepsilon^{-2}I - \gamma^{-2}GG^T > 0$ となるから指定された γ に対し、上式を満足する ε を選定できる。すなわち指定された γ に対し、安定化解が存在する ε を決定できる。

つぎに $X > 0$ の一意解が存在すれば

$$\begin{aligned} X(A - \varepsilon^{-2}BB^TX) + (A^T - \varepsilon^{-2}XBB^T)X \\ = -C^TC - XB(\varepsilon^{-2}I + \gamma^{-2}GG^T)B^TX \end{aligned} \quad (46)$$

であるからリアプノフ方程式の性質により、 $A - \varepsilon^{-2}BB^TX$ は安定である。

以上のことから、 γ をどれだけ小さく選定しても (45) 式を満たすよう小さく ε を選定すれば

$$\|C(sI - A - BF_\varepsilon)^{-1}D\|_\infty < \gamma \quad (47)$$

とすることができる。

□

$\text{Im } B \supset \text{Im } D$ という条件は特殊であるが、メカニカル系においてセンサノイズ以外の確定的未知外乱が加わるシステムではこの条件を満たすものが比較的多く存在する (最小位相系ではあるがたとえば文献 15)~17) の制御対象は条件 $\text{Im } B \supset \text{Im } D$ を満足するメカニカルシステムである)。

(41) 式の条件は補題 2 の条件に含まれる特殊な条件であることはいうまでもない。この場合の結果として意味があると考えられるのは、 γ に対して ε をどの程度小さくすれば安定化解が得られるかを (45) 式を用いて明確に導出することができる点と、ここでは割愛するが、状態推定問題には (41) 式の条件を緩めた形で応用できる点にある。

また、定理 1 は安定な外乱分離条件 (16) 式が成立する条件下において、 γ に対して ε をどの程度小さくすれば解が存在

するかという明確な値を与えることはできないが、 ε を小さくしていけば閉ループ系を安定とする解は必ず存在し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限において LQ 制御の極限解と一致することを示した。

以上のことから状態フィードバックによる H_∞ 制御の極限ゲインを用いた場合の近似非干渉特性について、状態フィードバックによる LQ 制御の場合と類似の結果を導出できる。

定理2 状態フィードバックによる H_∞ 制御の極限特性

つぎの条件 I, II, III

I : 性質2の条件 A1

II : 性質2の条件 A2

III : 補題2の条件 ii

を満足するとき、 $\gamma > 0$ に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ と選定すると安定とする解は必ず存在し、制御則

$$u = F_\varepsilon x + G_\varepsilon w \quad (48)$$

$$G_\varepsilon = (C(-A - BF_\varepsilon)^{-1}B)^{-1} \quad (49)$$

により得られる閉ループ系は非干渉系に漸近する。

証明

定理1および LQ 制御の性質2より明らかである。□

定理2の結果は、状態フィードバックの LQ 制御と H_∞ 制御の極限特性についてIIIの条件を満足する場合に限り一致する。すなわち、つぎの主張を得る。

主張 状態フィードバックによる H_∞ 制御では、外乱項を抑制するという条件が加わるため、定理2の条件IIIの安定な外乱分離条件を満足していなければ、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で非干渉化を達成する制御則が得られるとは限らない。しかしながら、条件IIIを満足している場合には $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることで、非干渉化と外乱抑制を同時達成し、閉ループ系を安定化する解が存在する ε を決定できれば、そのときの γ により外乱から出力までの伝達関数の H_∞ ノルムを γ 以下とすることが保証できる。

一方、 LQ 制御では $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、条件IIIは満足していなくても非干渉化を達成する解は得られる。しかし、このときの外乱抑制については何ら指標を与えるものではない。また条件IIIを満足していれば、極限解は同じものに漸近しており外乱から出力までの伝達関数 $H_{y\varepsilon} = C(sI - A - BF_\varepsilon)^{-1}D$ を $H_{y\varepsilon} \rightarrow 0$ とできる。しかしながら、 H_∞ 制御の場合と異なりどの程度抑えられるかは改めて評価する必要がある点に差異がある。

この主張が LQ 制御、 H_∞ 制御の極限の性質として本論文で強調しておきたい点である。

5. 数 値 例

定理1, 2の結果を検討するためつぎの外乱が加わるシステムを考える。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xi$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

外乱の加わるシステム (A, B, C, D) は可制御、可観測、定理2の条件 I, II, IIIを満たしていることが容易に確かめられる。このシステムに対し、外乱として $\xi = 10 \sin 5t$ 、目標値 $w = [w_1 \ w_2]^T$ として時刻1秒目から w_1 に単位ステップ入力、 w_2 に零を入力したとき、つぎのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインにより、状態フィードバックによる H_∞ 制御においても LQ 制御と同等の非干渉系を構成することをシミュレーションにより検証する。

Controller I

$$H_\infty \text{ 制御: } \gamma = 1.0, \varepsilon = 1/\sqrt{0.5}$$

$$F_\varepsilon = \begin{bmatrix} -2.644 & -1.058 & -0.321 \\ -1.058 & -2.835 & -0.821 \end{bmatrix}$$

$$G_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.644 & 1.219 \\ 0.058 & 1.746 \end{bmatrix}$$

$$LQ \text{ 制御: } \varepsilon = 1/\sqrt{0.5}$$

$$F_\varepsilon^* = \begin{bmatrix} -2.579 & -0.899 & -0.271 \\ -0.899 & -2.447 & -0.700 \end{bmatrix}$$

$$G_\varepsilon^* = \begin{bmatrix} 1.577 & 1.030 \\ -0.102 & 1.297 \end{bmatrix}$$

Controller II

$$H_\infty \text{ 制御: } \gamma = 0.03, \varepsilon = 1/\sqrt{1000}$$

$$F_\varepsilon = \begin{bmatrix} -32.651 & -0.517 & -0.030 \\ -0.517 & -32.683 & -0.987 \end{bmatrix}$$

$$G_\varepsilon = \begin{bmatrix} 31.651 & 0.532 \\ -0.483 & 31.656 \end{bmatrix}$$

$$LQ \text{ 制御: } \varepsilon = 1/\sqrt{1000}$$

$$F_\varepsilon^* = \begin{bmatrix} -32.651 & -0.516 & -0.029 \\ -0.516 & -32.665 & -0.977 \end{bmatrix}$$

$$G_\varepsilon^* = \begin{bmatrix} 31.651 & 0.531 \\ -0.484 & 31.654 \end{bmatrix}$$

Controller I と II を用いたときの閉ループ系の応答を Fig. 1 に示す。条件IIIである安定外乱分離条件を満足するシステムに対し、 H_∞ 制御では γ を 1.0 と大きな値を選定すると ε はそれほど小さくしなくとも安定とする解が存在し、

Fig. 1 Step responses for closed-loop system by Controller I and Controller II

Fig. 2 Singular value responses of $H_{y\xi}$ by Controller I & II

Controller I の制御則が得られる。しかし、この ε の値では、出力には互いの入力の影響とともに外乱の影響が残る。また、 LQ 制御の制御則と比較しても違いが生じている。

つぎに、 $\gamma=0.03$ と指定した場合には、それに伴い相対的に小さな $\varepsilon=1/\sqrt{1000}$ を選ぶことで安定とする解が得られ Controller II のような制御則が導出できる。このとき、 ε をさらに零に近づけたことで H_∞ 制御と LQ 制御のフィードバックゲインは近い値となり非干渉化と外乱抑制を達成している。

また、Fig. 2 はすべての Controller に対する外乱から出力までの特異値応答を描いたものである。この図より、すべての Controller は外乱出力間の伝達関数の H_∞ ノルムを、それぞれ指定した γ 未満に抑制することが確認できる。

つぎに主張で述べたことを確認するため、つぎのような外乱が加わる別のシステムを考える。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xi$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

外乱の加わるシステム (A, B, C, D) は非最小位相系で可制御、可観測かつ定理 2 の条件 I, II を満足しているが、条件 III を満たしていない。このシステムに対し、外乱として $\xi=5\sin 5t$ 、目標値 $w=[w_1 \ w_2]^T$ として時刻 1 秒目から w_1 に単位ステップ入力、 w_2 に零を入力し、つぎのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインを用いたとき、 H_∞ 制御と LQ 制御の相違点をシミュレーションにより確認する。

Controller III

H_∞ 制御: $\gamma=1.0, \varepsilon=1/\sqrt{1000}$

$$F_\varepsilon = \begin{bmatrix} -32.644 & -0.061 & -14.826 \\ -0.066 & -1.998 & 999.968 \end{bmatrix}$$

$$G_\varepsilon = \begin{bmatrix} 31.644 & 14.886 \\ -0.939 & 1001.967 \end{bmatrix}$$

LQ 制御: $\varepsilon=1/\sqrt{1000}$

Fig. 3 Step responses for closed-loop system by LQ Controller III

$$F_\varepsilon^* = \begin{bmatrix} -32.651 & -0.546 & -0.999 \\ -0.546 & -34.664 & -66.284 \end{bmatrix}$$

$$G_\varepsilon^* = \begin{bmatrix} 31.651 & -0.454 \\ -0.454 & -31.620 \end{bmatrix}$$

まず、 ε をかなり小さくしても、外乱分離条件を満足していないので、 H_∞ 制御と LQ 制御から得られる制御則が異なるものになっていることに気づく。このとき、Controller III における H_∞ 制御による制御則を用いたときの閉ループ系はこの系では不安定である。

つまり、状態フィードバックによる H_∞ 制御では条件 III の安定な外乱分離条件を満たしていないシステムに対しては、 $A + (-\varepsilon^{-2}BB^T + \gamma^{-2}DD^T)X$ という閉ループ系を安定にするための制御則は得られるが、外乱の加わる端点にフィードバック入力を加えることは実際には不可能であるため、得られる解は $A + BF_\varepsilon$ を安定にするものとは限らない。

また、Fig. 3 は Controller III における LQ 制御により得られる制御則を用い、外乱を加えた場合と加えなかった場合の閉ループ系の応答を示したものである。Fig. 3 から明らかに、 LQ 制御では $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると条件 III は満たしてなくても条件 I, II を満足することで非干渉化を達成する安定な制御則は得られるが、このとき外乱をどの程度抑制できるかは得られた結果を評価するしかない。

6. おわりに

本論文では、全状態をフィードバックする H_∞ 制御の Riccati 方程式に表われるパラメータ γ に応じた解の存在と、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限での特性を LQ 制御との関係から検討し、つぎのことを明らかにした。

まず状態フィードバックによる H_∞ 制御において、やや限定される条件ではあるが、安定な外乱分離条件を満足する条件の下で Riccati 方程式の解については、任意の γ に対して ε を小さく選定すれば安定となる解が得られ、特に γ を小さくしても $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることで安定となる解が必ず存在することを示した。また、特別アクチュエータが多く存在するメカニカル系のように $\text{Im } B \supset \text{Im } D$ の条件を満たせば γ に対し、

ε をどのように選定すればよいか明確に決定できることを示した。

さらに安定な非干渉条件を満足し、安定外乱分離条件を満たしている場合には、 $\varepsilon \rightarrow 0$ で LQ 制御の解に漸近することから近似的な非干渉化と外乱抑制を同時に達成することを明らかにした。しかしながら安定外乱分離条件を満足しない場合は両者の極限解は異なる。これらのことを理論的に明らかにするとともに数値例により確認した。

参考文献

- 1) H. Kimura: A New Approach to the Perfect Regulation and the Bound Peaking in Linear Multivariable Control System, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **26**-1, 253/270 (1981)
- 2) 中溝, 小林: Kalman フィルタの極限形式としての未知外乱系の状態推定, 計測自動制御学会論文集, **18**-12, 1125/1131 (1982)
- 3) 小林, 櫻井, 中溝, 矢野: 最適レギュレータの極限形式と外乱分離問題, 計測自動制御学会論文集, **34**-6, 563/570 (1998)
- 4) M. Fujita, K. Uchida and F. Matsumura: Asymptotic H_∞ Disturbance Attenuation Based on Perfect Observation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **36**-7, 875/880 (1991)
- 5) 相楽, 森山, 川口, 石松: 計測不可能な入力の推定機構をもつオブザーバ(ボイラ伝熱面のオブザーバの構成について), 日本機械学会論文集C編, **63**-605, 121/127 (1997)
- 6) 不破, 成清, 神藤: 計測不可能な入力の推定機能をもつオブザーバを用いた外乱抑制制御系, 電気学会論文誌C編, **127**-11, 1918/1927 (2007)
- 7) R. Suzuki, N. Kobayashi and M. Fujita: Decoupling Control with a Limiting Form of Linear Optimal Regulator for a Non minimum Phase System, *Electrical Engineering in Japan*, **132**, 49/56 (2000)
- 8) M. Sakurai, N. Kobayashi, R. Suzuki and T. Nakamizo: Decoupling Properties of Singular LQ Regulation Problem, *Int. J. Contr.*, **75**-6, 434/442 (2002)
- 9) B. A. Francis: The Optimal Linear-Quadratic Time-Invariant Regulator with Cheap Control, *IEEE Trans. Automatic Contr.*, **24**-4, 616/621 (1979)
- 10) A. Saberi and P. Sannuti: Cheap and Singular Controls for Linear Quadratic Regulators, *IEEE Trans. Automatic Contr.*, **32**-3, 208/219 (1987)
- 11) B. Friedland: Limiting forms of optimal stochastic linear regulators, *Trans. ASME*, **93**, 134/141 (1971)
- 12) A. S. Morse: Structural Invariants of Linear Multivariable Control Systems, *SIAM J. Contr.*, **11**, 446/465 (1973)
- 13) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂(1994)
- 14) K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice-Hall Inc. (1996)
- 15) 小林, 川嶋, 櫻井, 神崎: 連続時間最適レギュレータによる非

干渉化と指南車への応用, システム制御情報学会論文集, **11**-11, 608/615 (1998)

- 16) 谷, 鈴木, 古屋, 小林: 歩行車の速度制御補助装置の設計開発(サーボ特性を持つ内部モデル制御と最適制御の併用による速度制御), 日本機械学会論文集C編, **71**-712, 3452-3457 (2002)
- 17) 谷, 鈴木, 鳥田, 藤木, 小林: 一般化安定化補償器による反力推定を利用したロボットハンドの把持機構の制御, 日本機械学会論文集C編, **73**-726, 504/511 (2007)

[著者紹介]

鈴木 亮一 (正会員)

1999年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了。99年～2001年日本学術振興会研究員などを経て、現在、金沢工業大学准教授。2005年～2006年ドイツツルム大学計測制御マイクロ技術研究所留学。制御理論応用に関する研究に従事。博士(情報科学)。日本機械学会、IEEEの会員。

谷 正史 (正会員)

1982年金沢工業大学機械工学科卒業。82年～93年(社)石川県自動車整備振興会勤務。93年金沢工業大学夢考房技師。99年同主任技師。2003年同上席技師。現在、産学連携機構産学連携推進部長。博士(工学)。日本機械学会、日本自動車技術会などの会員。

池本 元紀

2004年金沢工業大学機械システム工学科卒業。2006年同大学院機械工学専攻修了。同年CKD株式会社入社。現在に至る。

小林 伸明 (正会員)

1976年熊本大学大学院修士課程(機械工学)修了。防衛大学研究生。東京工業大学研究生。防衛庁技術研究本部などを経て、現在、金沢工業大学教授。多変数制御理論に関する研究に従事。工学博士。システム制御情報学会などの会員。