離散時間非因果的周期時変スケーリングに基づく ロバスト安定化制御器設計

細 江 陽 平*・萩 原 朋 道*

Robust Stabilizing Controller Synthesis Based on
Discrete-time Noncausal Linear Periodically Time-varying Scaling

Yohei HOSOE* and Tomomichi HAGIWARA*

This paper discusses the application of noncausal linear periodically time-varying (LPTV) scaling to the design of discrete-time robust stabilizing controllers. Such a new type of scaling was introduced recently through the lifting technique, and has been shown to be effective for robust stability analysis in terms of reducing conservativeness. This paper thus discusses how and why one could exploit the desirable properties of noncausal LPTV scaling in the context of robust stabilizing controller design, and provides explicit steps for such design, including the suitable selection of the structure of noncausal LPTV scaling and LMI optimization of scaling as well as the controller. Numerical examples are also studied demonstrating that the noncausal LPTV scaling approach leads to less conservative design than the conventional scaling or μ -synthesis approach.

Key Words: robust stabilization, discrete-time lifting, periodic controllers, static separator, μ -synthesis

1. はじめに

実制御対象に対する数式モデルは、必ず何らかの不確かさを含んでしまう。したがって、ロバスト性、とくにロバスト安定性は、重要な制御要求の1つとなっており、 H_∞ 制御をはじめ従来より盛んに研究がなされてきた。とくに構造的な不確かさに対しては、 μ 解析¹⁾ が保守性を低減する点で有効である。しかし、 μ 解析は周波数に依存するスケーリングを要するため、厳密な解析を行なうことが困難である。つまり、構造的な不確かさを扱う場合、(μ 解析に限らず) 結局は何らかの十分条件的手法を用いることで、ある程度の保守性を残して解析せざるを得ないのが現状である。この保守性をいかに低減できるかが、ロバスト安定解析、さらにはロバスト安定化制御器設計における課題の1つといえる。

上記の課題に対し、 μ 解析などの従来の手法とは異なる新たなアプローチとして、離散時間非因果的周期時変スケーリングという考え方に基づくロバスト安定解析が提案された²⁾。非因果的周期時変スケーリングは、離散時間リフティング^{3), 4)}に基づいて定義されるが、その際、時間的な前後関係に関する因果性のある範囲で無視する形での解析を行なうものとな

る。それが非因果的なスケーリングと呼ばれる所以であると同時に、その新規性であるといえる。とくに、周波数に依存しない静的なスケーリングに限定した場合でも、従来の枠組みで解釈すればある種の動的スケーリングと同等の結果を与えるものとなっており²⁾、解析の保守性を低減する点で有効な一手法となっている。本論文では、この非因果的周期時変スケーリングをロバスト安定化制御器設計へ応用する。その際、制御器として周期時変なものを扱うことになるが、議論の焦点は決して制御器を単に(時変なものの中でも取り扱いの容易な)周期時変のものに拡張することによる性能向上にあるのではなく、非因果的周期時変スケーリングの制御器設計への応用の意義と方法について論じることにある。すなわち、非因果的周期時変スケーリングが制御器設計において果たす役割について述べ、その考え方に基づいて設計された周期時変制御器の利用により、より柔軟かつ、より大きな不確かさを許容するという意味において保守性の低減された設計が可能になることを述べる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、第2章では本論文で扱う問題の設定を行なう。また、周期時変制御器の取り扱いや非因果的周期時変スケーリングの導入に重要な役割を果たすリフティングについて紹介する。第3章では、非因果的周期時変スケーリングの概要とロバスト安定解析におけるその意義について述べる。第4章では、非因果的周期時変スケーリングを周期時変ロバスト安定化制御器設計へ適用するための基本的手順について述べる。さらに、非因果的周期

* 京都大学大学院工学研究科 京都市西京区京都大学桂

* Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto

(Received July 22, 2009)

(Revised February 18, 2010)

時変スケーリングに基づく手法であることが、どのような特徴を与えるか、詳しく検討する。第5章では数値例により、 μ 設計との比較も通して、非因果的周期時変スケーリングに基づく周期時変ロバスト安定化制御器設計の有効性を検証する。

2. ロバスト安定化問題とリフティング

本章では、本論文が対象とするロバスト安定化問題とそれにかかわる周期時変制御器に関して、離散時間リフティングに基づく取り扱いについて述べる。また、well-posed 性に関連した事項についても述べる。

2.1 ロバスト安定化問題

本節では、本論文で取り扱う問題、とくに一般化プラントと不確かさに関する設定を行なう。まず、Fig. 1 に不確かさを陽に含む制御対象を示す。ここで、 P はその状態空間表現が

$$P: \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

で与えられる時不変な一般化プラントを表わし、 Δ は以下の仮定 1 を満たす集合 Δ に属する不確かさを表わす。

[仮定 1] 任意の $\Delta \in \Delta$ は安定な有限次元線形時不変系で、 Δ は 0 を含む連結集合であるとする。

本論文では一般性を失うことなく $D_{22} = 0$ と仮定する。また、不確かさ $\Delta \in \Delta$ の(離散時間)伝達関数行列は正方で、以下の式で表わされる構造をもつと仮定する。

$$\Delta(z) = \text{diag}[\delta_1 I_{m_1}, \dots, \delta_S I_{m_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F, \Delta_1(z), \dots, \Delta_Z(z)] \quad (2)$$

ただし、 $\delta_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, S$), $\Delta_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ ($i = 1, \dots, F$), $\Delta_i(z) \in \mathbf{RH}_{\infty}^{l_i \times l_i}$ ($i = 1, \dots, Z$) であり、適当な $\bar{\delta} > 0$ に対して H_{∞} ノルム条件 $\|\Delta(z)\|_{\infty} < \bar{\delta}$ を満たすものとする。本論文の目的は、ロバスト安定解析における有効性が明らかにされている非因果的周期時変スケーリングの考え方²⁾に基づき、より大きな $\bar{\delta}$ のもとで閉ループ系をロバスト安定化する、与えられた周期 N の因果的周期時変出力フィードバック制御器 Ψ を設計することである (Fig. 2)。

2.2 リフティングと周期時変制御器

周期時変系の取り扱いにおいて、離散時間リフティングは重要な考え方であり、非因果的周期時変スケーリングを導入する上でも本質的な役割を果たす。本節では、離散時間リフティングの基本的な事項^{3), 4)}について述べる。

まず、次式のように系の入出力信号を Ψ の周期 N ごとにひとまとめにして表現する操作を、信号のリフティングという。

Fig. 1 Generalized plant with uncertainty Δ

Fig. 2 Feedback system with uncertainty

$$\hat{w}_{\nu} := [w_{\nu N}^T, w_{\nu N+1}^T, \dots, w_{\nu N+N-1}^T]^T \quad (3)$$

$$\hat{z}_{\nu} := [z_{\nu N}^T, z_{\nu N+1}^T, \dots, z_{\nu N+N-1}^T]^T \quad (4)$$

$\hat{u}_{\nu}, \hat{y}_{\nu}$ も同様に定義される。さらに、これらの仮想的な入出力信号をもつ系としてもとの系を扱うことを、系のリフティングという。周期 N の周期時変系(特別な場合として時不変系を含む)をリフティング表現して得られる系は、時不変系となる。以下では、新たな状態変数 $\hat{x}_{\nu} := x_{\nu N}$ を定義し、リフティングされた一般化プラントを

$$\hat{P}: \begin{bmatrix} \hat{x}_{\nu+1} \\ \hat{z}_{\nu} \\ \hat{y}_{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\nu} \\ \hat{w}_{\nu} \\ \hat{u}_{\nu} \end{bmatrix} \quad (5)$$

と表わす ($\hat{P}$ の各係数行列は (1) 式の係数行列を用いて書き下せる^{3), 4)})。時不変な不確かさ Δ についても周期 N でリフティングを施すことで、そのリフティング表現 $\hat{\Delta}$ ならびにその伝達関数行列 $\hat{\Delta}(z)$ を得ることができる。以上のようにして、不確かさを含む Fig. 1 の制御対象は、リフティングにより、Fig. 3 で表わされる。

ここで、リフティング表現された Fig. 3 の制御対象に対する時不変なフルオーダー制御器 $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi}: \begin{cases} \bar{q}_{\nu+1} &= \bar{A}_{\Psi} \bar{q}_{\nu} + \bar{B}_{\Psi} \hat{y}_{\nu} \\ \hat{u}_{\nu} &= \bar{C}_{\Psi} \bar{q}_{\nu} + \bar{D}_{\Psi} \hat{y}_{\nu} \end{cases} \quad (6)$$

を考える (Fig. 4)。リフティングの性質から、 $\bar{\Psi}$ は、もとの Fig. 1 の制御対象に対する周期 N の適当な周期時変制御器 Ψ (Fig. 2) に対応していること、さらには、Fig. 4 の閉ループ系が安定であることと Fig. 2 の閉ループ系が安定であることが互いに等価となることがわかる。ただし、(6) 式で表現される一般の $\bar{\Psi}$ は、周期係数行列 $A_{\Psi k}, B_{\Psi k}, C_{\Psi k}, D_{\Psi k}$ により状態空間表現される通常の周期時変制御器をリフティング表現したものよりもさらに一般的な形のものとなる (Ψ の具体的な実装などについては付録 A に記す)。すなわち、(6) 式によって、より一般的な周期時変制御器を取り扱うことが

Fig. 3 Lifted generalized plant with uncertainty $\hat{\Delta}$

Fig. 4 Lifted feedback system with uncertainty

できる反面, Fig. 2 における対応する制御器 Ψ が非因果的なものとなり, 実装不可能になってしまうおそれがある. そのような状況を排除できるための必要十分条件に基づき, 以下では $\bar{D}_\Psi$ はベクトル u_k, y_k のサイズに応じて決まる構造のブロック下三角行列の集合として定義される $\mathcal{D}_l$ に属するものと仮定する.

2.3 直達行列 $\hat{D}_{22}$ の取り扱いについて

一般に $\hat{D}_{22}$ は零行列とはならないものの, $D_{22} = 0$ の仮定から, $\hat{D}_{22}$ は $\bar{D}_\Psi$ と類似の構造で対角ブロックが零行列のブロック下三角行列となる^{3), 4)}. したがって, $I + \bar{D}_\Psi \hat{D}_{22}$ は必ず正則となり, 制御器設計において直達行列 $\hat{D}_{22}$ と $\bar{D}_\Psi$ に関する well-posed 性の問題は生じない. 本論文では, 議論ならびに表記の簡単化のため, 制御器 $\bar{\Psi}$ の設計においてはあたかも $\hat{D}_{22} = 0$ であるものとみなし, 制御対象が

$$\hat{P}^0: \begin{bmatrix} \hat{x}_{\nu+1}^0 \\ \hat{z}_\nu^0 \\ \hat{y}_\nu^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_\nu^0 \\ \hat{w}_\nu^0 \\ \hat{u}_\nu^0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

で与えられるものとみなす. それは, 上記の $\hat{P}^0$ に対して $\bar{A}_\Psi^0, \bar{B}_\Psi^0, \bar{C}_\Psi^0, \bar{D}_\Psi^0$ で状態空間表現される制御器 $\bar{\Psi}^0$ を適用することは, 本来の制御対象 $\hat{P}$ に対して次式で状態空間表現される制御器 $\bar{\Psi}$ を適用することと等価であり, なおかつ, $\bar{D}_\Psi \in \mathcal{D}_l$ と $\bar{D}_\Psi^0 \in \mathcal{D}_l$ が互いに等価な条件となるからである.

$$\bar{A}_\Psi := \bar{A}_\Psi^0 - \bar{B}_\Psi^0 \hat{D}_{22} (I + \bar{D}_\Psi^0 \hat{D}_{22})^{-1} \bar{C}_\Psi^0 \quad (8)$$

$$\bar{B}_\Psi := \bar{B}_\Psi^0 - \bar{B}_\Psi^0 \hat{D}_{22} (I + \bar{D}_\Psi^0 \hat{D}_{22})^{-1} \bar{D}_\Psi^0 \quad (9)$$

$$\bar{C}_\Psi := (I + \bar{D}_\Psi^0 \hat{D}_{22})^{-1} \bar{C}_\Psi^0 \quad (10)$$

$$\bar{D}_\Psi := (I + \bar{D}_\Psi^0 \hat{D}_{22})^{-1} \bar{D}_\Psi^0 \quad (11)$$

以下では $\hat{P}$ と $\bar{\Psi}$ による閉ループ系の状態空間表現を

$$\hat{G}: \begin{cases} \hat{\xi}_{\nu+1} = \hat{A}\hat{\xi}_\nu + \hat{B}\hat{w}_\nu, & \hat{\xi}_\nu = [\hat{x}_\nu^T, \hat{q}_\nu^T]^T \\ \hat{z}_\nu = \hat{C}\hat{\xi}_\nu + \hat{D}\hat{w}_\nu \end{cases} \quad (12)$$

により表わし, その伝達関数行列を $\hat{G}(z)$ と表わす.

3. 非因果的周期時変スケーリング

Fig. 2, Fig. 4 において不確かさ Δ , $\hat{\Delta}$ を取り除いて得られる閉ループ系をそれぞれ $G, \hat{G}$ と表わすことにする. このとき, $\hat{G}$ は周期 N の周期時変系 G をリフティングして得られる時不変系にはかならない. 再びリフティングの性質から, G と Δ の閉ループの安定性と $\hat{G}$ と $\hat{\Delta}$ の閉ループの安定性は等

価である. 本章では, この閉ループのロバスト安定性に関して, 保守性を低減したロバスト安定解析の一手法である, 非因果的周期時変スケーリング²⁾の概要とその意義を紹介する.

3.1 非因果的周期時変スケーリングの定義

まず, 基本となる安定定理であるセパレータ型ロバスト安定定理⁵⁾を以下に示す.

《定理 1》 不確かさの集合 Δ が仮定 1 を満たし, 任意の $\Delta \in \Delta$ に対して $\hat{G}$ と $\hat{\Delta}$ からなる閉ループ系が well-posed とする. このとき, この閉ループ系がロバスト安定となるための必要十分条件は, 以下の不等式を満たすエルミート行列 $\hat{\Theta}(z) = (\hat{\theta}_{ij}(z))_{i,j=1,2}$, $z \in \partial\mathbf{D}$ が存在することである.

$$\begin{bmatrix} I & \hat{G}(z)^* \end{bmatrix} \hat{\Theta}(z) \begin{bmatrix} I \\ \hat{G}(z) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\forall z \in \partial\mathbf{D}) \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{\Delta}(z)^* & I \end{bmatrix} \hat{\Theta}(z) \begin{bmatrix} -\hat{\Delta}(z) \\ I \end{bmatrix} > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \forall \Delta \in \Delta, \\ \forall z \in \partial\mathbf{D} \end{array} \right) \quad (14)$$

ただし, $\partial\mathbf{D}$ は $|z| = 1$ を満たす複素数 z の集合とする.

(13), (14) 式において現れる $\hat{\Theta}(z)$ をセパレータと呼ぶ. 上記の定理から, (13), (14) 式を満たすセパレータ $\hat{\Theta}(z)$ を探索することでロバスト安定解析を行なうことが可能である.

つぎに, 定理 1 に関連する形で, 非因果的周期時変セパレータおよび非因果的周期時変スケーリングの定義²⁾を与える.

【定義】 セパレータ $\hat{\Theta}(z)$ が (15) 式で与えられるとき, $\hat{\Theta}(z)$ を非因果的周期時変セパレータと呼び, このセパレータ $\hat{\Theta}(z)$ を用いて Fig. 2 で表わされる系に対しリフティングを介してロバスト安定解析を行なうことを, 非因果的周期時変スケーリングによる解析と呼ぶ.

$$\hat{\Theta}(z) = \hat{V}(z)^* \Gamma \hat{V}(z) \quad (15)$$

ここで, $\Gamma = \Gamma^*$ は定数行列であり, $\hat{V}(z)$ は適当な伝達関数行列である.

$\hat{\Theta}$ が z に依存しないとき, これを静的な非因果的周期時変セパレータと呼ぶ. また, そのようなセパレータを用いた解析を, 静的な非因果的周期時変スケーリングによる解析と呼ぶ. 簡単のため, 本論文で扱う非因果的周期時変スケーリングは, とくに断らない限り静的なものとする.

(注意) 周期 N の周期系 V_1, V_2 のリフティング表現により $\hat{V}(z) = [\hat{V}_1(z), \hat{V}_2(z)]$ と表わされ, Γ がサイズの等しい N 個の行列からなるブロック対角行列のとき, $\hat{\Theta}(z)$ は因果的周期時変セパレータと呼ばれる²⁾. とくに V_1, V_2 が静的なときは静的な因果的周期時変セパレータと呼ばれる. 上記の静的な非因果的周期時変セパレータは, これよりも一般的である.

3.2 ロバスト安定解析における非因果的周期時変スケーリングの意義

本論文では, 次章以降において詳細に述べるとおり, 非因果的周期時変スケーリングを制御系設計においても適用することで, ロバスト安定化に関して優れた周期時変制御器を設計することを目的としている. ここで, 本論文の立場を明確にする上で, まずはロバスト安定解析における非因果的周期

時変スケーリングの意義、ならびに、非因果的周期時変スケーリングと呼ばれる所以について述べておくことは肝要である。そこで、まず特別な場合として、Fig. 2の制御系における制御器 Ψ が実際には時不変であった場合を考える。

このとき、本章の冒頭で定義した G は時不変系となるため、この G と時不変な不確かさ Δ の伝達関数行列 $G(z)$ と $\Delta(z)$ に対して成立する定理1と同等の定理を流用して（これは、定理1において $N=1$ とみることに相当する）ロバスト安定解析を行なうことも可能である（以降、これをリフティングを介さないロバスト安定解析と呼び、そのときに現われるセパレータを $\Theta(z)$ と表わすことにしておく）。その一方で、上記の議論にそのまま即してリフティングを施して得られる $\hat{G}$ 、 $\hat{\Delta}$ を用いて定理1をそのまま適用し、ロバスト安定解析を行なうことも可能である。(3)、(4)式からもわかるように、後者の扱いで現われる $\hat{G}(z)$ では、 G の入出力信号の時間的前後関係のある範囲で無視したことになり、(15)式における $\hat{V}(z)$ が特別な構造を有するものでない限り、前者の扱いと比して、ある種の因果性を無視した取り扱いに相当する。この事情は Ψ が周期 N の周期時変制御器である場合でも同じであり、そのため、 $\hat{G}(z)$ に基づく解析は、(周期時変性を有することはリフティングの性質から自明であるので)一般に非因果的周期時変スケーリングによる解析と呼ばれている²⁾。

さて、 Ψ が時不変の場合に関して興味深い問題は、上記のリフティングを介さないロバスト安定解析と、非因果的周期時変スケーリングに基づくそれとの間で、どちらが有効であるかという問題である。この問題について、以下の事実が明らかにされている²⁾。

(i)リフティングを介さない解析について条件を満足する静的なセパレータ $\Theta := (\Theta_{ij})_{i,j=1,2}$ が存在するならば、非因果的周期時変スケーリングによる解析においても次式のクロネッカ積で表わされる静的なセパレータが条件を満足する。

$$\hat{\Theta} = (I_N \otimes \Theta_{ij})_{i,j=1,2} \quad (16)$$

(ii)逆に、後者において((16)式の形と限らない)より一般的な静的なセパレータ $\hat{\Theta}$ が存在して条件を満足するならば、前者においては動的なセパレータ

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= T(z)^* \hat{\Theta} T(z), \quad T(z) = \text{diag}[T_p(z), T_p(z)] \\ T_p(z) &= \begin{bmatrix} I_p & zI_p & \cdots & z^{N-1}I_p \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (17)$$

も条件を満足する。ただし p は G の入出力数である。すなわち、静的な非因果的周期時変セパレータを探索することは、リフティングを介さない解析においてはある種の動的なセパレータを探索することに対応しているといえ、その分だけより有効（少なくとも同等）である。周期 N の周期時変系をとくにその整数倍の周期 νN の周期時変系とみなせば、上記の(i)、(ii)の性質は、周期時変系に対しても非因果的周期時変スケーリングが有効であることを意味している。

3.3 非因果的周期時変スケーリングと制御器設計

リフティングにより得られた(5)式ないし(7)式で表わさ

れる一般化プラントを単に離散時間系の1つとみなすだけの立場で考えたとすれば、静的な非因果的周期時変スケーリングは、ある意味では特別な形の離散時間系の通常の静的なスケーリングに過ぎない。しかし、非因果的周期時変スケーリングとロバスト安定性が織りなす問題は、実際にはそれほど単純ではない。それは、不確かさ Δ もリフティングされることで新たな構造をもつ $\hat{\Delta}$ となることに起因して、次章4.2節でも述べるように非因果的周期時変スケーリングを適用することならではのより柔軟なスケーリングが許容され、それが制御器設計でも大きな影響を及ぼすからである。さらには、周期 N を νN のように整数倍に変化させて制御器 Ψ を設計するときにロバスト安定化可能な不確かさの大きさ δ がどのように変化するかに着目する立場では、解析の際に非因果的周期時変スケーリングが有する上記の有望な性質（とくに(ii)）がどのように活かされ得るか、興味深い。そのような点に関する検討は、単なる静的スケーリングの枠を超え、非因果的周期時変スケーリング特有の本質的な問題として、意義深い。本論文ではこのような観点を念頭におき、非因果的周期時変スケーリングに基づく周期時変制御器の設計について論じる。

4. 非因果的周期時変スケーリングに基づくロバスト安定化制御器設計の基本的手順とその適用意義

前章の最後で述べたとおり、非因果的周期時変スケーリングに基づく周期時変制御器設計に関して、その問題特有の本質的な点を考慮した議論を行なうことが重要である。ただし、その基礎を離散時間系の静的スケーリングに基づく制御器設計におくことになるのは当然である。そこで本章では、まず4.1節において一般的な（とくに (D, G) -scalingタイプ⁶⁾の）静的セパレータのもとでの離散時間制御器の設計法について述べる。4.2節においては、非因果的周期時変スケーリングのもとで不確かさ Δ がリフティングされて $\hat{\Delta}$ として扱われることが、セパレータの選定においてもつ意味について述べる。続いて4.3節では、非因果的周期時変スケーリングのもとで利用する際の (D, G) -scalingタイプのセパレータが、どのような具体的構造をもつべきかを示す。さらに4.4節において、ロバスト制御器設計へ非因果的周期時変スケーリングを応用することには、どのような理由からどのような意義があるか、詳しく述べる。

4.1 静的セパレータのもとでの離散時間制御器設計

よく知られているように、(13)式はセパレータ $\hat{\Theta}(z)$ の選び方に応じて、不確かさのない閉ループ系 $\hat{G}$ に対するさまざまな制約条件を表わすことができる。 H_∞ ノルム制約条件などのよく利用されるものについてはすでにLMIに基づく設計法が知られており、同様の手法を適用することで、一般的な静的セパレータ $\hat{\Theta}$ のもとでの設計法も導出できる。実際、文献7)で述べられている線形化手法、あるいは、文献8)で述べられている補助変数の導入法および線形化手法に基づく導出が可能であり⁹⁾、とくに本論文で扱う形の静的セパレータ

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 W_{\text{sq}} & X_G \\ X_G^T & W_{\text{sq}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{\text{sq}} := W^T W > 0, \\ \gamma > 0, X_G + X_G^T = 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

(ただし, W は正方行列) に関しては, 付録 B にそれぞれ示した定理 2, 定理 3 の形となる. ただし, 導出の都合上, 2.3 節で述べた考え方を利用し, さらに定理 1 の不等式 (13) から等号を除いた次式の厳密な不等式を扱っている.

$$\begin{bmatrix} I & \hat{G}(z)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma^2 W_{\text{sq}} & X_G \\ X_G^T & W_{\text{sq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \hat{G}(z) \end{bmatrix} < 0 \quad (\forall z \in \partial \mathbf{D}) \quad (19)$$

4.2 リフティングされた不確かさとセパレータの関係

本論文では不確かさ Δ が (2) 式で表わされる構造をもつことを踏まえ, このような不確かさを扱う上で都合のよい静的セパレータ $\hat{\Theta}$ として, すでに (18) 式で示した (D, G) -scaling タイプのものに限定して考える. その結果, 定理 1 の条件は当然十分条件となってしまうものの, 適当な仮定のもとで, リフティングされた不確かさ $\hat{\Delta}(z)$ に関する条件式 (14) がセパレータ $\hat{\Theta}$ によらない次式へ変形できるという利点がある.

$$\|\hat{\Delta}(z)\| < \frac{1}{\gamma} \quad (\forall z \in \partial \mathbf{D}) \quad (20)$$

$\|\Delta(z)\|_\infty = \|\hat{\Delta}(z)\|_\infty$ であるから^{3), 4)}, $\hat{G}(z)$ が (13) 式 (または (19) 式) を満たすならば, 2.1 節における不確かさの大きさ $\bar{\delta}$ として, 少なくとも $\bar{\delta} = 1/\gamma$ まで許容されることになる. したがって, (19) 式において, 条件を満たす W および X_G が存在する範囲で γ を最小化する制御器 $\bar{\Psi}$ を設計することが, より大きな不確かさを許容する制御器を設計することに対応する. 以下では, (D, G) -scaling に関してよく知られているこの事実, とくに (14) 式から (20) 式への帰着に関して, 非因果的周期時変スケーリングの枠組みでそれを利用する上での特徴に踏み込む形で少し詳しく述べておく.

まず, $N = 1$ の場合, すなわちリフティングを介さない取り扱いの場合を考える. このとき, (14) 式から (20) 式を得る際に, $W\Delta(z) = \Delta(z)W$ および $X_G^T \Delta(z) + \Delta(z)^* X_G = 0$ を仮定することになる. 後者は厳しい制約であり, X_G を (2) 式と同様のブロック対角行列とすると, $\delta_i I_{m_i}$ ($i = 1, \dots, S$) に対応するブロックは歪対称行列としつつ, それ以外のブロックは零行列とすることで, この制約を満たすという方針をとることになる. ただし, 「スカラの歪対称行列」は 0 に限ることから, $m_i \geq 2$ でなければ δ_i に対応した対角ブロックもやはり 0 とすることになり, 仮に $m_i = 1$ ($\forall i = 1, \dots, S$) という場合であれば結局 $X_G = 0$ とする方法 (すなわち D -scaling) と一致することになる.

一方で, $N \geq 2$ の場合には不確かさとしてリフティングされた $\hat{\Delta}(z)$ を考えることから, (D, G) -scaling タイプの非因果的周期時変セパレータにおける X_G の構造は, $N = 1$ でのそれと比べ, より柔軟に選ぶことができる. それは, $\Delta(z)$ 中の $\delta_i I_{m_i}$ に対応して, $\hat{\Delta}(z)$ 中には (適当に行と列を入れ換えれば) 必ず $\delta_i I_{m_i N}$ が含まれるため, これに対応する X_G の

ブロックとして, m_i の値によらず ($m_i N \geq 2$ より) 非零の歪対称行列を与えることが可能となるからである. このことは, (D, G) -scaling が本来もつ特徴をより有効に活用し得ることを示唆している. 実際, $N = 1$ のときのセパレータから (16) 式によって構成されるセパレータよりも一般的な $\hat{\Theta}$ を選んでいることに対応しており, 不確かさの取り扱いに関する保守性が低減できる. とくに, 3.2 節で述べた (ii) の性質から, $N = 1$ での時不変制御器に対しては, より有効と考えられる動的スケーリングを適用したことに対応する. したがって, μ 設計^{1), 10)}での基本的な考え方である D - K 反復法の観点でいえば, よりよいスケーリング (D) を求めたことに相当し, よって周期 N での周期時変制御器設計 (K) を行なえば, それは $N = 1$ での制御器設計よりも有効になることが期待できる. 同様に, $\nu \geq 2$ に対して, 周期 νN での周期時変制御器設計は, 3.2 節の性質 (ii) を適切に利用すれば, 周期 N でのそれよりも有効になると期待できる. この観点については 4.4 節でより詳細に検討し, 5.3 節で数値例により検証する.

4.3 非因果的周期時変スケーリングにおけるセパレータの構造

前節では, 非因果的周期時変スケーリングの利用が制御器設計において果たす役割に関して, 効果をもっとも明らかな X_G に関する制約 $X_G^T \hat{\Delta}(z) + \hat{\Delta}(z)^* X_G = 0$ に着目して議論を行なった. 実際には, (14) 式が (20) 式に帰着されるためには, W に関して制約 $W\hat{\Delta}(z) = \hat{\Delta}(z)W$ が満たされると仮定することになる. 本論文ではこれらの制約を満たすべく, W および X_G は以下で与えられるものとする.

$$W = R_N^W \quad (R_N^W \in \mathcal{R}^W) \quad (21)$$

$$X_G = R_N^X - (R_N^X)^T \quad (R_N^X \in \mathcal{R}^X) \quad (22)$$

ただし, $\mathcal{R}^W$ は (2) 式の構造に対応して

$$R_{ij} = \text{diag}[R_{ij}^{(1)}, \dots, R_{ij}^{(S)}, r_{ij}^{(1)} I_{n_1}, \dots, r_{ij}^{(F)} I_{n_F}, \rho_{ij}^{(1)} I_{l_1}, \dots, \rho_{ij}^{(Z)} I_{l_Z}], \quad R_{ij}^{(k)} \in \mathbf{R}^{m_k \times m_k}, \quad k = 1, \dots, S \quad (23)$$

で表わされる構造の行列を用いて

$$R_N = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \quad (24)$$

と表わされる行列 R_N 全体の集合である $(\rho_{ij}^{(k)})$ ($k = 1, \dots, Z$) は $\rho_{ij}^{(k)} = 0$ ($i \neq j$) かつ $\rho_{11}^{(k)} = \rho_{22}^{(k)} = \dots = \rho_{NN}^{(k)}$ を満たすスカラ). また, $\mathcal{R}^X$ は (23) 式のかわりに

$$R_{ij} = \text{diag}[R_{ij}^{(1)}, \dots, R_{ij}^{(S)}, 0_{n_1}, \dots, 0_{n_F}, 0_{l_1}, \dots, 0_{l_Z}] \quad (25)$$

を用いて (24) 式で表わされる行列 R_N 全体の集合である.

本節で与えた構造の W, X_G から定まる静的セパレータ (18) のもとで 4.1 項で記した設計手法を適用することで, もっとも基本的な形での非因果的周期時変スケーリングに基づく制御器設計が可能となる (付録 C の手順の 1., 2. 参照). ただ

し、制御器設計においては、制御器のみならずスケーリングも同時に最適化することが重要であり、この点を考慮した設計手順としては、交互の最適化による繰り返し計算（詳細は付録 C の手順 2.~4.）によるものとする。

4.4 ロバスト制御器設計における非因果的周期時変スケーリングの適用意義

前章で述べた非因果的周期時変スケーリングの性質を踏まえ、本節では、それを制御器設計に適用する上での意義について論じる。とくに、非因果的周期時変スケーリングを適用することならではの特徴的で有効な制御器設計が、どのような理由により可能となるのかを述べる。

ロバスト安定解析においては、3.2 節で述べた性質 (i), (ii) から、非因果的周期時変スケーリングの有効性が明らかにされている。具体的には、時不変系に対する非因果的周期時変スケーリングに基づくロバスト安定解析では、探索するセパレータ $\hat{\Theta}$ を静的なものに限ったとしても、その解析結果はリフティングを介さない解析においてある種の動的スケーリングに基づくものと同等となるというものであった。同様のことは、 $\nu \geq 2$ を適当にとりて周期 N の周期系を周期 νN の周期系とみなして解析したときにも成立する。このような特徴に加えて、(ノミナルプラント側は考えずに) 不確かさの取り扱いに限定して考えたとしても、さらに 4.2 節で述べたような特徴がある。すなわち、不確かさをリフティングした $\hat{\Delta}(z)$ の形で扱うことになる非因果的周期時変スケーリングに基づくからこそ (D, G)-scaling を十分に活かすことができ、より柔軟な設計が可能となる。

以上のことから、周期時変スケーリングを制御器設計に適用することの有効性は明らかであろう。さらには、静的なスケーリングのみを用いることから、動的スケーリングを伴う方法と比して低次の制御器設計につながる利点もある。そのような有効性に関して理論的にもとくに明確化できるシナリオを以下では 1 つ与え、上記の有効性に関する主張の妥当性を示しておく。そこで、まず以下の手順を踏んだとする。

(A) $W = I$, $X_G = 0$ を初期値として周期 N の制御器設計を行なう。また、これに続く一連の手順としてつぎのものを想定してみる。

(B-1) $\nu \geq 2$ を適当に選び、(A) で得られた制御系を周期 νN の周期系とみなした上で、この制御系によりロバスト安定化可能な不確かさの大きさ $\bar{\delta}$ を非因果的周期時変スケーリングによって求める。

(B-2) 3.2 節で示した性質 (ii) により、(B-1) の解析で利用した周期 νN での非因果的周期時変スケーリングに対して、周期 N での解析における等価な動的な非因果的周期時変スケーリングが対応しているので、この動的スケーリングのもとの周期 N の制御器設計を行なう。

なお、手順 (B-2) における制御器設計は、スケーリングを固定した上で行なうものであるため、繰り返しにはならず一度限り行なわれるものと考えていることに注意しておく。このとき、(A) の設計で用いたセパレータは静的なものであ

るのに対して、(B-2) の設計では一般に動的なセパレータを用いたものとなっており、その分だけ保守性を低減した形で周期 N の制御器の設計ができる。実際、3.2 項で述べた性質 (i) から、(B-2) の設計結果は (A) の設計結果より少なくとも劣らないという保証を簡単に与えることができる。

一方で、手順 (A) に続く手順で上記とは異なるものとして、つぎのものを考える。

(C) (B-1) と同じ手順を踏んだ後、そこで得た非因果的周期時変スケーリングのもとで周期 νN の制御器設計を行なう。

(B-2) で得られる周期 N の制御器をとくに周期 νN の制御器のうちの（実質的な周期が N であるという）特別なものとみなせることに注意すれば、(C) により得られる制御器は、同等またはそれ以上の性能を達成するものとなる（固定したスケーリングのもとでの制御器設計に関しては、付録 B に示した方法により厳密な最適化が行なえることから明らかである）。しかも、静的スケーリングに基づくため、 νN の値があまり大きくない範囲では比較的低次（付録 A 参照）の制御器が得られる点でも (B-2) の手順より有利である。このことと、既述の (A) と (B-2) による設計結果の間の関係とから、(C) の設計手順を踏むことで、(A) で得たものと比べてロバスト安定化に関して（少なくとも劣るものとはならないことは明らかであり）より優れた制御器が得られることが期待できる。加えて、(C) の設計においては、付録 C の考え方に従って、スケーリング自体もさらに改善していくことを通してより優れた制御器を設計する繰り返し計算が可能である。

上記の考え方の変種として、たとえば (B-1) の手順を踏まずに、(A) の設計で最終的に使われた非因果的周期時変スケーリングを (16) 式の関係により変換したものを直接考え、それを (C) の設計の初期値として用いることも可能である（この場合も、(C) の結果が (A) の結果と同等以上であることが保証できる）。あるいは、(C) の結果をもとに、より長い周期での制御器設計を適切に行なうという方法も可能である。このような考え方は、 μ 設計における $D-K$ 反復法の考え方にも通じるものとなっていることがわかる。

以上のような考え方はいずれも、非因果的周期時変スケーリングについて明らかになっている性質を応用するからこそ可能なものであり、新しい設計法として興味深いものである。すなわち、非因果的周期時変スケーリングを応用することは、単にリフティングと静的スケーリングの応用、あるいは、制御器の周期時変への拡張といった範疇にとどまるものではなく、適切な考え方を組み入れていくことで、さまざまな要因が相乗的な効果を生むことが期待される。

5. 非因果的周期時変スケーリングに基づく制御器設計の有効性検証

本章では数値例を用い、非因果的周期時変スケーリングに基づくロバスト安定化制御器設計の有効性を検証する。ただし、具体的な設計手法は付録 C に示す 4 種類の方法を考え、それらの比較も行なうこととする。

構造的な不確かさに対するロバスト安定化制御器設計手法として、 D - K 反復法を用いる μ 設計^{1), 10)}の有効性が知られている。しかし、本論文の設計手法は、(i) リフティングを介することで周期時変制御器を設計するものである点はもちろんのこと、(ii) 不確かさもリフティングされて扱われることに起因してより柔軟なスケールリングが適用可能となるような手法となっており、さらに、(iii) 制御器の周期 N を変化させた際には、 D - K 反復法的な考え方が自動的に組み込まれる形とすることもできる、などの特徴があることを述べてきた。これらのことから、 μ 設計と比して、より大きな不確かさを許容するという意味において優れた設計法となっていることが期待される。そこで本章では、 μ 設計による結果とも比較を行なう。ただし、 μ 設計と異なり、周期時変制御器を利用することに起因する問題点も考えられるため、その点についても触れる。

なお、周期時変制御器の設計という意味から重要な点として、「不確かさの構造が $S = F = 0, Z = 1$ の場合については、周期時変制御器を利用しても、時不変制御器による設計結果を越えることができない」ことがよく知られている¹¹⁾。しかし、本論文で扱っている一般状況はこれに当てはまらない。加えて、たとえば、 μ 設計の基盤となっている周波数依存スケールリングの適用が無意味な $S = 1, F = Z = 0, m_1 = 1$ という状況に関しても、上記(ii)の特徴が大きな効果を発揮することがロバスト安定解析においては知られている²⁾。 μ 設計との比較はこのような観点からも意義があるものといえる。

5.1 力学系の数値例

本節では、本章を通して扱う制御対象について述べる。力学系の例として、支点を中心に鉛直面で回転できる重さの無視できる棒を考える。棒の長さは $r = 0.2$ とし、その先端には質量 $M = 1$ の質点が付加されている。鉛直上方からの棒の傾き角度を θ と表わすとき、支点まわりに棒へ与えるトルク N_u により棒を $\theta = 0$ で倒立した状態に保つ制御を考える。このとき、支点まわりの運動方程式は次式ようになる。

$$N_u + Mgr \sin \theta = Mr^2 \ddot{\theta} \quad (26)$$

ただし、 $g = 9.8$ は重力加速度である。ここで、 $\theta \simeq 0$ を仮定することにより、線形化された状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Mr^2} \end{bmatrix} u \quad (27)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

を得る。ただし、 $x_1 := \theta, x_2 := \dot{\theta}, u := N_u$ とする。この状態空間表現より伝達関数を求め、それを0次ホールドを用いてサンプリング周期 $T_s = 0.1$ で離散化する。このように伝達関数ベースの離散化を行なった上でそれを実現することで、パラメータ r, M に関する扱いが比較的容易な以下の離散時間状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (29)$$

Table 1 Design results with noncausal LPTV scaling under $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_1, \delta_2]$

N	1	2	3	6
$\gamma^{(D,G)}$	6.1517	3.2035	2.8072	2.3738
γ_{anal}	3.1549	2.8218	2.6107	2.3685
$\gamma_{\text{aux}}^{(D,G)}$	4.5338	2.9553	2.4964	2.2720
γ_{anal}	3.7127	2.7747	2.4074	2.2718
γ^D	5.2090	3.9667	4.2149	3.3932
γ_{anal}	3.1170	3.3428	3.4130	3.1934
γ_{aux}^D	4.4973	3.8032	3.5801	3.3083
γ_{anal}	3.2445	3.0948	3.2560	3.1567

$$y_k = \begin{bmatrix} (\alpha - 2)\beta & (\alpha - 2)\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ただし、 $\alpha := e^{\sqrt{\frac{g}{r}}T_s} + e^{-\sqrt{\frac{g}{r}}T_s}, \beta := \frac{1}{2Mgr}$ とおいた。

5.2 複数の不確かな実パラメータを有する場合

前節の例において r, M に誤差がある場合、 α および β は不確かさをもつ。そこで、(29), (30) 式における α, β が不確かさ δ_1, δ_2 によって $(1 + 0.2\delta_1)\alpha_0, (1 + \delta_2)\beta_0$ と表わされたとすると (α_0, β_0 は $r = 0.2, M = 1$ に対応したノミナル値)、この不確かさを $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_1, \delta_2]$ として制御対象から分離することで、つぎの一般化プラント P を得る。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_0 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_0\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (\alpha_0 - 2)\beta_0 & (\alpha_0 - 2)\beta_0 & 0 & 0.2 & \alpha_0 - 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

以上の一般化プラント P および不確かさ Δ のもとで、まず μ 設計によりロバスト安定化制御器の設計を行なう。MATLAB の μ -Analysis and Synthesis Toolbox¹⁰⁾ では、 μ 設計の D - K 反復法を半自動的に解く `dkit` という関数が用意されている。本論文では Toolbox にあらかじめ用意されている標準的な設定のもと μ 設計を行なう。なお、`dkit` は連続時間系を対象としているので、本節で扱う離散時間系の問題を扱うために、仮想的なサンプリング周期を T_s とした双一次変換を介して連続時間系の問題に変換した後に設計することとした（設計された連続時間制御器を逆変換すれば所望の離散時間制御器が得られる）。その結果、許容できる最大の $\|\Delta\|_\infty$ (すなわち $\bar{\delta}$) の逆数を与える γ は 3.2372 となった。

つぎに、非因果的周期時変スケールリングに基づく4つの設計手法(付録C)により、周期を $N = 1, 2, 3, 6$ とした周期時変ロバスト安定化制御器を設計する。Table 1 が (μ 設計との比較を意識し) セパレータの初期値を $W_{\text{sq}} = I, X_G = 0$ として設計したときの結果である。ただし、表の各項目の意味はつぎのとおりである。 $\gamma^{(D,G)}, \gamma_{\text{aux}}^{(D,G)}, \gamma^D, \gamma_{\text{aux}}^D$ は各設計手法により達成された $\gamma = 1/\bar{\delta}$ であり、上つき添字は (D, G) -scaling または D -scaling のいずれのタイプの設計かを示し、また下つき添字の `aux` は補助変数を導入したタイプの設計、下つき

Fig. 5 Robust stability domain for r and M

添字のないものはそれを導入しないタイプの設計であることを示している。繰り返し計算によるために各設計には保守性が残ることを踏まえ、得られたそれぞれの制御器によりロバスト安定化可能な不確かさの大きさ $\|\Delta\|_\infty$ の逆数 γ を事後の解析により求めた結果も、 γ_{anal} として同時に示している。具体的には、3.2 節で述べた性質 (i), (ii) を活用した、ロバスト安定解析において有効性が高いと考えられる方法として²⁾、 $N = 6$ とした (D, G) -scaling タイプの非因果的周期時変スケーリングをすべてのケースに適用することによった。また、以上の計算には MATLAB および SeDuMi を用いた。

Table 1 より、4つの設計法のいずれでも、設計完了時点で直ちにロバスト安定性を保証できている不確かさの大きさの逆数 $\gamma^{(D,G)}$, $\gamma_{\text{aux}}^{(D,G)}$, γ^D , γ_{aux}^D は、 $N = 1$ での結果に比べて $N \geq 2$ で常に小さくなっている。また、 (D, G) -scaling タイプの2つの設計手法については、 N の増加とともにその値が（設計完了後の解析を通してロバスト安定性が結果として保証できている不確かさの大きさの逆数 γ_{anal} も含めて）単調に小さくなっている。すなわち、非因果的周期時変スケーリングにより、基本的には周期 N を大きくすることでより大きな不確かさを許容できる制御器が設計できている。このことは、本章冒頭で述べた (i)~(iii) の特徴が有効性となって現われたものといえる。なお、4種類の設計手法間の比較としては、(付録Cで触れた期待どおり) 補助変数を導入した (D, G) -scaling タイプのものがもっともよい結果を与えていることがわかる。

この方法で $N = 6$ としたときの結果を μ 設計による既述の結果と比べると、かなりの改善が得られていることがわかる。ロバスト安定化が達成される r, M の範囲を $N = 6$ の結果から逆算して Fig. 5 に示す。この図に加えて、 μ 設計により得られた制御器の次数が42にも及ぶ点も踏まえて、非因果的周期時変スケーリングに基づく制御器設計の有効性がうかがえる。なお、以上の考察について、両設計法がいずれも繰り返し計算を用いていることから、その優劣を一般的に結論づけることはできないが、一般的な傾向として、そのほか多くの数値例で同じような結果となったことを付記しておく。

5.3 重複のない単一の不確かな実パラメータの場合

つぎに、同じ例において M のみに誤差がある場合を想定す

る。したがって、 β が不確かさ $\Delta = \delta_2$ によって $(1 + \delta_2)\beta_0$ と表わされるとすると、対応する一般化プラントは、(31) 式において第3, 4行および第3, 4列を取り除いたものとなる。この場合 Δ がスカラとなるので、 μ 設計は、いかなるスケーリングを用いてもそれはスケーリングを用いない設計と同じになるという意味において、意義を失う。しかしながら、非因果的周期時変スケーリングに基づく設計では、4章でも述べたとおり不確かさもリフティングして取り扱うことになるため $\hat{\Delta} = \delta_2 I_N$ となり、この $\hat{\Delta}$ がスカラ行列の形であることから (D, G) -scaling が大きな効果を発揮し（任意の歪対称行列 X_G が利用可能）不確かさの取り扱いに関する保守性低減を達成できる。

この点について検証するために、前節でもっとも高い効果を得た手法によりロバスト安定化制御器を設計した。初期値の設定を $W_{\text{sq}} = I$, $X_G = 0$ としたときの結果を Table 2 に示す。これより、 N を大きくすることで期待どおりより大きな不確かさに対するロバスト安定化が可能となっていること、とくに、($N = 1$ での設計が時不変制御器の設計に対応していることから) μ 設計では達成し得ない範囲の不確かさに対するロバスト安定化に成功していることがわかる。

また、4.4 節の議論にならい、 $N = 2$ での設計結果に対して $N = 6$ の非因果的周期時変スケーリングでロバスト安定解析し、得られたセパレータを初期値に利用して $N = 6$ での制御器を設計すると、そのときの $\gamma_{\text{aux}}^{(D,G)}$ は 1.3525, γ_{anal} は 1.3524 となった。 $N = 2$ での設計結果である 1.5927 からさらに値が改善されていることがわかる。これが非因果的周期時変スケーリングの特徴を活かした考え方に基づく設計であり、 μ 設計での $D-K$ 反復法に相当する形のものとして解釈できることは、すでに 4.2 節や 4.4 節でも触れたとおりである。そこでの議論の繰り返しになるが、このようにして周期を整数倍に変化させる設計を行なうことは、単に制御器の周期が大きくなり自由度が上がることに加えて、適切な初期値が利用できるという観点からも有用と考えられる。

以上のとおり、本論文の周期時変制御器設計法の有効性を検証してきたが、同時に以下の点にも注意しておきたい。まず、 μ 設計による制御器が高次になる点に関しては、ロバスト安定性を損なうことなくしばしばその低次元化が図れるということである。この点において、すでに述べた制御器の次数に関する比較は、とくに付録Aの議論とも絡んで、実用上の観点からは必ずしも十分に適切とはいえないが、ここではロバスト安定性の理論的保証を確保する設計という立場で議論を行なっている点を理解されたい。もう一点、周期時変制御器にしばしば見られる傾向として、制御入力がかかり振動的

Table 2 Design results with noncausal LPTV scaling under $\Delta = \delta_2$

N	1	2	3	6
$\gamma_{\text{aux}}^{(D,G)}$	2.0144	1.5929	1.4668	1.3551
γ_{anal}	2.0142	1.5927	1.4667	1.3550

となる問題点があるが、本論文の設計においても、大きな δ を達成するにつれてその傾向が顕著になってくる点に注意しておく。この点においても、 μ 設計に対する本論文の方法の優位性を単純に結論づけるのは妥当でない。しかしながら、一般によく知られているとおり、ロバスト安定化制御器の設計法に基づきロバスト性能を達成する制御器の設計法を構築することができ、本論文の方法に関してもそのことが示されている¹²⁾。そのような設計法を通して、 μ 設計ではロバスト安定化できない不確かさのもとで、実用上も許容されうるであろう設計を達成できることを確認済であることを付記しておく。

6. おわりに

本論文では、構造的な不確かさに対するロバスト安定化制御器設計への非因果的周期時変スケーリングの応用について考察し、その意義と方法について論じた。とくに、セパレータの構造や非因果的周期時変スケーリングの特徴に着目することで、そのような方法に基づく周期時変制御器設計においてどういった効果が期待できるのか詳しく述べた。たとえば、(i) 重複のないスカラからなる不確かさに関しては、既存の手法で不確かさの取り扱いに関する保守性を低減することは困難であるが、非因果的周期時変スケーリングを用いれば、 (D, G) -scaling の効果を発揮させることができその保守性の低減が図れることや、(ii) 制御器の周期 N を整数倍へ変化させていく際に非因果的周期時変スケーリングの特徴が本質的な形で利用でき、さらなる保守性の低減が望めることなどについて触れた。これらの効果も含めて、非因果的周期時変スケーリングに基づく周期時変制御器設計の有効性を数値例に基づき検証し、 μ 設計により得られる時不変制御器に比して、より大きな不確かさを許容する点に関し保守性低減となることを確認した。

一方で、周期時変制御器にしばしば見られる制御入力の大いなる振動に関して、本論文の設計法を直接利用した場合にそれが回避される保証がないことも付記しておく。ただし、この点については、(2)式における動的な不確かさのブロックに関して(23)式で $\rho_{11}^{(k)} = \dots = \rho_{NN}^{(k)}$ と制限していることから、リフティング後に時不変となる動的な不確かさのブロック $\hat{\Delta}_k$ も考慮できることが重要な意味をもつ。すなわち、このことを通して、いわゆるメインループ定理に基づき、ロバスト安定化のみならずロバスト H_∞ 性能に対する制御器設計問題へも直ちに適用可能であり¹²⁾、そのような設計により制御入力の振動を抑制できることを確認している。したがって、本論文は、周期時変制御器をより実用的なものとするための設計法について、今後のさらなるさまざまな発展を支える1つの理論基盤として大きな意義をもつものと考えられる。

参考文献

- 1) K. Zhou and J.C. Doyle: *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall (1998)
- 2) T. Hagiwara and Y. Ohara: Noncausal linear periodically time-varying scaling for robust stability analysis of discrete-time systems: frequency-dependent scaling induced by static separators, *Automatica*, **46**-1, 167/173 (2010)
- 3) S. Bittanti and P. Colaneri: Analysis of discrete-time linear periodic systems, *Control and Dynamics Systems*, **78**, 313/339 (1996)
- 4) S. Bittanti and P. Colaneri: Invariant representations of discrete-time periodic systems, *Automatica*, **36**-12, 1777/1793 (2000)
- 5) T. Iwasaki and S. Hara: Well-posedness of feedback systems: Insights into exact robustness analysis and approximate computations, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **43**-5, 619/630 (1998)
- 6) M.K.H. Fan, A.L. Tits and J.C. Doyle: Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36**-1, 25/38 (1991)
- 7) C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **42**-7, 896/911 (1997)
- 8) M.C. de Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernussou: Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *Int. J. Control*, **75**-9, 666/679 (2002)
- 9) 細江, 大原, 蛸原, 萩原: 静的セパレータにより表現される不等式制約を満たす離散時間コントローラの設計, 計測自動制御学会関西支部若手研究発表会, 9/12 (2009)
- 10) G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith: μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, MUSYN Inc. and MathWorks (1994)
- 11) A. Feintuch and B. Francis: Uniformly optimal control of linear time-varying systems, *Systems & Control Letters*, **5**-1, 67/71 (1984)
- 12) 細江, 萩原: 離散時間非因果的周期時変スケーリングに基づくロバスト制御器設計手法の性質とその応用, 第38回制御理論シンポジウム, 195/200 (2009)

《付 録》

A. $\bar{\Psi}$ の周期時変制御器 Ψ としての実装について

$\hat{y}_\nu^{(i)} = [y_{\nu N}^T, \dots, y_{\nu N+i}^T]^T$ ($i = 0, \dots, N-1$) とおくと、ブロック下三角制約 $\bar{D}_\Psi \in \mathcal{D}_l$ から、(6) の第2式より $u_{\nu N+i} = [\bar{C}_\Psi]_i \bar{q}_\nu + [\bar{D}_\Psi]_i \hat{y}_\nu^{(i)}$ を得る。ただし、 $[\bar{C}_\Psi]_i$ は $\bar{C}_\Psi$ の上から $i+1$ 番目のブロック行を取り出したもの、 $[\bar{D}_\Psi]_i$ は $\bar{D}_\Psi$ の上から $i+1$ 番目のブロック行のうち、左から $i+1$ 番目までのブロック列を取り出したものである。時刻 $k = \nu N$ における $\bar{q}$ の更新を意味する (6) の第1式と、上式を実行することで、 $\bar{\Psi}$ は周期時変制御器 Ψ として実装できる。このことは、制御器が保持しておくべきパラメータが時不変制御器よりかなり多くなること、 $y_{\nu N+i}$ ($i = 0, \dots, N-2$) も制御器内にメモリーとして保持しておくべくことを意味している。とくに後者は、制御器の次数が見かけの次数 ($\bar{q}$ の次数) よりも高くなっていることを意味している。実際には、各時刻 k における計算量のばらつきを減らすための並行的な処理を導入するなどの工夫が使用メモリー量とのトレードオフのもとで可能であるが、詳細は紙面の都合により割愛する。

B. (D, G) -scaling に基づく制御器設計のための LMI 条件

本章では、 $\hat{P}$ に対する閉ループ系が制約条件 (19) を満た

すフルオーダーコントローラ $\bar{\Psi}$ を設計する方法を 2 つ示す⁹⁾. 1 つめは補助変数を導入しない手法によるものであり, 2 つめは補助変数を導入した手法によるものである.

《定理 2》 (12) 式の $\hat{A}$ が安定となり $\hat{G}(z)$ が (19) 式を満たすようなフルオーダーの出力フィードバック制御器 $\bar{\Psi}$ が存在するための必要十分条件は, つぎの LMI を満たす実対称行列 X, Y および実行列 $R \in \mathcal{D}_l, Q, F, L$ が存在することである.

$$\begin{bmatrix} X & I & \hat{A}X + \hat{B}_2L & \hat{A} + \hat{B}_2R\hat{C}_2 \\ * & Y & Q & Y\hat{A} + F\hat{C}_2 \\ * & * & X & I \\ * & * & * & Y \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline \hat{B}_1 + \hat{B}_2R\hat{D}_{21} & & & 0 \\ Y\hat{B}_1 + F\hat{D}_{21} & & & 0 \\ -(\hat{C}_1X + \hat{D}_{12}L)^T X_G^T & & (\hat{C}_1X + \hat{D}_{12}L)^T W_{sq} \\ -(\hat{C}_1 + \hat{D}_{12}R\hat{C}_2)^T X_G^T & & (\hat{C}_1 + \hat{D}_{12}R\hat{C}_2)^T W_{sq} \\ \gamma^2 W_{sq} - \mathcal{H} & & (\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})^T W_{sq} \\ * & & W_{sq} \end{bmatrix} > 0, \quad \mathcal{H} = \text{He}\{X_G(\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})\} \quad (\text{B.1})$$

このとき, $I - YX$ は正則行列となり, $VU = I - YX$ を満たす正則行列 V, U が存在する. そのような任意の V, U を用いて, 所望の条件を満たすフルオーダー制御器 $\bar{\Psi}$ の 1 つは,

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\Psi^0 & \bar{B}_\Psi^0 \\ \bar{C}_\Psi^0 & \bar{D}_\Psi^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}Y\hat{B}_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - Y\hat{A}X & F \\ L & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -\hat{C}_2XU^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

を (8)~(11) 式に代入することで与えられる.

《定理 3》 (12) 式の $\hat{A}$ が安定となり $\hat{G}(z)$ が (19) 式を満たすようなフルオーダーの出力フィードバック制御器 $\bar{\Psi}$ が存在するための必要十分条件は, つぎの LMI を満たす実対称行列 P, H および実行列 $R \in \mathcal{D}_l, J, X, Y, S, Q, F, L$ が存在することである.

$$\begin{bmatrix} P & J & \hat{A}X + \hat{B}_2L & \hat{A} + \hat{B}_2R\hat{C}_2 \\ * & H & Q & Y\hat{A} + F\hat{C}_2 \\ * & * & X + X^T - P & I + S^T - J \\ * & * & * & Y + Y^T - H \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline \hat{B}_1 + \hat{B}_2R\hat{D}_{21} & & & 0 \\ Y\hat{B}_1 + F\hat{D}_{21} & & & 0 \\ -(\hat{C}_1X + \hat{D}_{12}L)^T X_G^T & & (\hat{C}_1X + \hat{D}_{12}L)^T W_{sq} \\ -(\hat{C}_1 + \hat{D}_{12}R\hat{C}_2)^T X_G^T & & (\hat{C}_1 + \hat{D}_{12}R\hat{C}_2)^T W_{sq} \\ \gamma^2 W_{sq} - \mathcal{H} & & (\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})^T W_{sq} \\ * & & W_{sq} \end{bmatrix}$$

$$> 0, \quad \mathcal{H} = \text{He}\{X_G(\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})\} \quad (\text{B.3})$$

このとき, $S - YX$ は正則行列となり, $VU = S - YX$ を満たす正則行列 V, U が存在する. そのような任意の V, U を用いて, 所望の条件を満たすフルオーダー制御器 $\bar{\Psi}$ の 1 つは, (B.2) 式を (8)~(11) 式に代入することで与えられる.

C. 非因果的周期時変スケーリングに基づく制御器設計の具体的手順

付録 B の定理により, 与えられた静的な非因果的周期時変セバレータのもとでの制御器設計ができる. より高い性能を有するロバスト制御器の設計のためには, 制御器のみならずセバレータも同時に最適化することが重要であるが, そのような同時最適化は数値的取り扱いの困難な BMI の求解を必要とする. 本論文では, 以下の形で変数の一部を固定して得られる LMI を繰り返し解くことにより設計を行なうこととする. 補助変数を導入した手法 (定理 3) に基づく設計:

1. 設計の対象となる系に周期 N でリフティングを施す.
2. W_{sq}, X_G を固定し (4.3 節に示した範囲で初期値は任意に与えてよい), (B.3) 式において γ を最小とする $R \in \mathcal{D}_l, P, H, J, X, Y, S, Q, F, L$ を, LMI を解き求める.
3. X, L, R, γ を固定し, (B.3) 式において γ を最小とする $P, H, J, Y, S, Q, F, W_{sq}, X_G$ を, LMI における γ に関する 2 分探索法により求める.
4. γ が十分小さくなるまで手順 2., 3. を繰り返す.

定理 2 に基づく設計もほぼ同様である. 補助変数を導入する定理 3 に基づく手法のほうが, 変数に関する自由度が高く, 有利であると期待される. しかし, 繰り返し計算によるものであるため, いずれが有効であるかに関して直ちに結論を導くことは難しい. 同様に, (D, G) -scaling に基づく方法は D -scaling に基づく方法よりも有効であると期待されるものの, そう結論づけることは容易でない. そこで, 本論文では, これらに関する組み合わせとして 4 種類すべての設計法を扱っている.

[著 者 紹 介]

細 江 陽 平 (学生会員)

2009 年京都大学工学部電気電子工学科卒業. 同年同大学大学院工学研究科電気工学専攻進学, 現在に至る. システム制御情報学会の学生会員.

萩 原 朋 道 (正会員)

1986 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年京都大学工学部助手, 91 年助教授, 2001 年より京都大学大学院工学研究科電気工学専攻教授. サンプル値制御理論, 2 自由度制御系の設計法などの研究に従事. 京都大学工学博士. システム制御情報学会, 電気学会, IEEE などの会員.