周期ダイナミクスの解析に基づく2リンク三叉ヘビロボットの制御

石川 将人*・藤野 隆弘**

Control of the Double-linked Trident Snake Robot Based on the Analysis of Its Oscillatory Dynamics

Masato ISHIKAWA* and Takahiro FUJINO**

This paper is concerned with a new approach to the locomotion control of the *trident snake robot*, focusing on its double-linked case where the robot is composed of a triangular body and three branches of double-linked snake-like legs. Originally, this robot was proposed by the authors as a novel example of nonholonomic mobile robot. The well-known Lie Algebra Rank Condition (LARC) for its nonlinear controllability has an odd structure that it contains two generator vector-fields and higher order Lie brackets, which makes its control problem extremely challenging. In this paper, for this difficult control problem, we first propose a design algorithm which partially achieves the desired locomotion. Then we point out that the resulting motion may or may not be a stable limit cycle, depending on the eigenvalues of the corresponding discrete-time dynamics on its Poincaré map. Finally, we propose a full controller design by combining the stable limit cycles. The validity of the proposed idea is examined by numerical simulations.

Key Words: nonlinear control, nonholonomic system, mobile robot, nonlinear dynamics, dynamics based control

1. はじめに

三叉ヘビロボットとは、受動車輪型のヘビロボット¹⁾を中央のベースリンクを介して三叉状に接続したものである。車両系やトレーラに代表される Chained system 型²⁾とは異なる、複雑な可制御性構造³⁾を有する非ホロノミックシステムを体現する新たな移動ロボットの例として考案された⁴⁾。

各足が1リンクをもつ最も簡単な三叉ヘビ（以下1リンク型）の場合は、可制御性接分布が1階までの Lie 括弧積のみで張られるシステム（first-order system）の構造をもつ。文献5),6)では、2つの入力に位相差のある周期関数を与えたときに発生する状態変位が1階の Lie 括弧積に近似的に比例するというホロノミーの原理を利用することで、任意の運動を行なわせる周期入力の設計法を示した。その後もさまざまな制御系設計法を提案してきているが、1リンク型についてはほぼ完全に移動原理が解明できているといえる。

さて、文献5)では各足を2リンクに拡張したモデル（以下2リンク型）についても初等的な考察を行っていた。1リ

ンク型は接地点が3つしかないために、各車輪にかかる床面からの横拘束力が過大になり、実機実験の際には横滑りを起こしやすいなどの力学的な難点が見られた。これに対して2リンク型では拘束力が6個の車輪に分散されるため横滑りを起こしにくく、とくに傾斜面など車輪の負荷の大きい状況を想定すると顕著な改善が期待できる。その一方、2リンク型では可制御性接分布の構造において2階の Lie 括弧積までが関与してくるという点で1リンク型よりはるかに複雑になっている。前述のホロノミーの原理では1階の Lie 括弧積しか扱うことができないため、この方法では9次の状態空間のうち6自由度しか制御することができず、制御がきわめて難しい。先行研究では限定された初期形状から限定された方向への運動制御を実現するにとどまっていた。

2階の Lie 括弧積に対応する運動を直接生成する方法としては、ホロノミーの原理の一般化にあたる高次モーメント公式⁷⁾や有理数の周波数比をもたせた高調波入力を用いる方法⁸⁾などが考えられる。しかしながら、これらの考え方は根本的に近似を含むため、三叉ヘビのように強い非線形性をもつシステムで2階の Lie 括弧積に対応する変化を精密に求めたとしてもあまり有効ではない。

本研究では、1リンク型と同様の1階の Lie 括弧積だけを考慮した周期入力を与えた場合に、直接は制御できない3自由度分の運動について、安定な周期解への収束現象が見られる場合があることに着目する。そこで、周期入力下のシステムの振る舞いを Poincaré 断面上の平衡点の安定性の問題と

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

** 滋賀医科大学医学部 大津市瀬田月輪町

* Graduate School of Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita

** Faculty of Medicine, Shiga University of Medical Science, Seta Tsukinowa-cho, Otsu

(Received October 2, 2009)

(Revised February 25, 2010)

捉えて近似的に解析し、この性質を利用して望ましい状態へ到達させる方法を提案する。本稿の構成は以下のとおりである。2章では2リンク型三叉ヘビロボットのモデルを示し、3章で可制御性構造の解析と基本となる周期入力的设计法、およびその適用下における近似平衡点の概念について述べる。4章では所望の方向へロボットを移動させる推進制御問題を扱い、形状については周期ダイナミクスの安定性に委ねる方法を提案する。5章では、任意の初期形状に対し、前章の推進制御が適用可能な吸引領域に入るように形状を制御する方法を提案する。6章で結言を述べる。

2. 三叉ヘビロボットのモデル

2.1 モデル設定と運動学方程式

本章ではFig. 1に示すような2リンク型の三叉ヘビロボットのモデルを示す。ロボットは平面に置かれているものとし、運動学のみを考える。ベースリンクは3つの駆動関節をもち、各足が連結されている。また、ベース自身は地面との接点をもたない。それぞれの足は駆動関節で連結された2個のリンクからなり、各リンクの中点には受動車輪が取り付けられている。この車輪は横滑りをしないものと仮定する。つまり車輪は瞬間的にはリンクに平行な方向への平行移動とその場での回転しか許されない。さらに、ベースの形状は正三角形 ($\alpha_1 = -\frac{2}{3}\pi, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{2}{3}\pi$)、中心から各頂点までの距離を1、各関節から車輪までの距離を1とし、2番目の足が連結されている頂点をロボットの正面とする。

ベースの中心 P の位置を (x, y) 、座標系に対するベースの向きを θ_0 とし、これらをまとめたものを

$$\mathbf{w} := [x, y, \theta_0]^\top$$

と表わし、配置ベクトルと呼ぶ。また、 i 番目の足 ($i = 1, 2, 3$) の根元から j 番目のリンク ($j = 1, 2$) を (i, j) リンクと呼び、 (i, j) リンクの根元側の関節の角度を ϕ_{ij} と表わす。そ

して、リンク番号 j ($j = 1, 2$) を固定し、各足の関節角度 ϕ_{ij} ($i = 1, 2, 3$) を列ベクトルの形に並べたものを

$$\phi_{\cdot 1} := [\phi_{11}, \phi_{21}, \phi_{31}]^\top$$

$$\phi_{\cdot 2} := [\phi_{12}, \phi_{22}, \phi_{32}]^\top$$

と表記し、前者を根元関節、後者を肘関節と呼ぶことにする。 $\phi_{\cdot 1}, \phi_{\cdot 2}$ をまとめて形状ベクトルと呼ぶ。

$$\phi := [\phi_{\cdot 1}^\top, \phi_{\cdot 2}^\top]^\top$$

以上の設定に基づいて、ロボットの運動学方程式はつぎのように表わされる。

$$A(\phi)R_{\theta_0}^\top \dot{\mathbf{w}} = B(\phi)\dot{\phi} \quad (1)$$

$$R_{\theta_0} := \begin{bmatrix} C_{\theta_0} & -S_{\theta_0} & 0 \\ S_{\theta_0} & C_{\theta_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(\phi) = \begin{bmatrix} S_{1+\alpha}^1 & -C_{1+\alpha}^1 & -1 - C_1^1 \\ S_{1+2+\alpha}^1 & -C_{1+2+\alpha}^1 & -1 - C_{1+2}^1 - 2C_2^1 \\ S_{1+\alpha}^2 & -C_{1+\alpha}^2 & -1 - C_1^2 \\ S_{1+2+\alpha}^2 & -C_{1+2+\alpha}^2 & -1 - C_{1+2}^2 - 2C_2^2 \\ S_{1+\alpha}^3 & -C_{1+\alpha}^3 & -1 - C_1^3 \\ S_{1+2+\alpha}^3 & -C_{1+2+\alpha}^3 & -1 - C_{1+2}^3 - 2C_2^3 \end{bmatrix}$$

$$B(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + 2C_2^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2C_2^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2C_2^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで

$$S_{\theta_0} = \sin \theta_0 \quad S_{1+\alpha} = \sin(\phi_{i1} + \alpha_i) \\ S_{\alpha}^i = \sin \alpha_i \quad S_{1+2+\alpha}^i = \sin(\phi_{i1} + \phi_{i2} + \alpha_i)$$

である。 S を C に替えた場合は $\sin$ を $\cos$ に読み替える。各行列の導出については文献5)を参照されたい。

2.2 状態方程式

(1) 式で表わされる運動学モデルを状態方程式として表現する。まず、システムの状態 ξ を ϕ と $\mathbf{w}$ を縦に並べたベクトルとして $\xi := [\phi, \mathbf{w}]^\top = [\phi_{\cdot 1}, \phi_{\cdot 2}, \mathbf{w}]^\top$ とする。状態変数 ξ の次元は9であるのに対し、車輪が横滑りしないという非ホロミックな拘束条件が6つ(車輪の数だけ)存在するため、各瞬間で許される状態変化の方向は3次元の部分空間しか張らない。物理的には6個の駆動関節が存在するので、その関節角速度を制御入力と考えるのが一見自然であるが、それらをすべて独立に与えることはできない。

そこで、拘束を満たすように3つの独立パラメータを制御入力として選ぶ必要がある。選び方は一意ではないので、目

Fig. 1 Model of the trident snake robot

的に応じて柔軟に設定することが可能である。ここでは、ベースの運動 $\dot{\mathbf{w}}$ と根元関節の角速度 $\dot{\phi}_{.1}$ をそれぞれ制御入力 $\mathbf{u}$ と考えたときの二通りについて状態方程式を示しておく。

Case 1 $\mathbf{u} := \dot{\mathbf{w}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_0]^\top$ の場合

(1) 式より、状態方程式は次式で書くことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(\phi)^{-1} A(\phi) R_{\theta_0}^\top \\ I_3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3)$$

ただし、 I_3 は 3×3 の単位行列である。上式右辺の各列をベクトル場 $\mathbf{g}_1(\xi), \mathbf{g}_2(\xi), \mathbf{g}_3(\xi) \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$ とおくと、

$$\dot{\xi} = \mathbf{g}_1(\xi)u_1 + \mathbf{g}_2(\xi)u_2 + \mathbf{g}_3(\xi)u_3 \quad (4)$$

と表わされる。

Case 2 $\mathbf{u} := \dot{\phi}_{.1} = [\dot{\phi}_{11}, \dot{\phi}_{21}, \dot{\phi}_{31}]^\top$ の場合

(1) 式の $B(\phi)$ を 2 つのブロック行列に分ける。

$$B(\phi) = \begin{bmatrix} B_1(\phi) & B_2(\phi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、 $B_1(\phi) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$, $B_2(\phi) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ である。(5) 式を用いると、(1) 式から次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -B_2(\phi) & A(\phi)R_{\theta_0}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{.2} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = B_1(\phi)\dot{\phi}_{.1} \quad (6)$$

したがって、状態ベクトル $\xi := [\phi_{.1}, \phi_{.2}, \mathbf{w}]^\top$ 、制御入力 $\mathbf{u} := \dot{\phi}_{.1} = [\dot{\phi}_{11}, \dot{\phi}_{21}, \dot{\phi}_{31}]^\top$ とすると、状態方程式はつぎのように表わせる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{.1} \\ \dot{\phi}_{.2} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ \begin{bmatrix} -B_2(\phi) & A(\phi)R_{\theta_0}^\top \end{bmatrix}^{-1} B_1(\phi) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (7)$$

上式右辺の各列をベクトル場 $\mathbf{h}_1(\xi), \mathbf{h}_2(\xi), \mathbf{h}_3(\xi) \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$ とおくと、

$$\dot{\xi} = \mathbf{h}_1(\xi)u_1 + \mathbf{h}_2(\xi)u_2 + \mathbf{h}_3(\xi)u_3 \quad (8)$$

となる。このように (4) 式と (8) 式はいずれも 3 入力 9 状態の対称アフィンシステムとなる。以下、ベクトル場 $\mathbf{g}(\xi)$, $\mathbf{h}(\xi)$ を単に $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ と表記することがあるので注意されたい。さらに、ベクトル場の要素を 3 分割して、

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{\phi_{.1}} \\ \mathbf{g}^{\phi_{.2}} \\ \mathbf{g}^{\mathbf{w}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{\phi_{.1}} \\ \mathbf{h}^{\phi_{.2}} \\ \mathbf{h}^{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

のように根元関節の形状変化、肘関節の形状変化、配置ベクトルの変化に対応するベクトルをそれぞれ $\mathbf{g}^{\phi_{.1}}, \mathbf{h}^{\phi_{.1}}, \mathbf{g}^{\phi_{.2}}, \mathbf{h}^{\phi_{.2}}, \mathbf{g}^{\mathbf{w}}, \mathbf{h}^{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ と表記する。

3. 基本原理

3.1 可制御性の解析

2 リンク型三叉ヘビロボットの状態方程式においては、入力ベクトル場の集合 $G = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ に対して、1 階の Lie

括弧積 $\mathbf{g}_{12} := [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$, $\mathbf{g}_{23} := [\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$, $\mathbf{g}_{31} := [\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1]$ と 2 階の Lie 括弧積 $\mathbf{g}_{121} := [[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2], \mathbf{g}_1]$, $\mathbf{g}_{122} := [[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2], \mathbf{g}_2]$, $\mathbf{g}_{311} := [[\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1], \mathbf{g}_1]$ を考えると、 G が生成する可制御接分布が

$$\bar{G} := \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_{12}, \mathbf{g}_{23}, \mathbf{g}_{31}, \mathbf{g}_{121}, \mathbf{g}_{122}, \mathbf{g}_{311}\} \quad (10)$$

と表わされる。この接分布は基本形状 $\phi = \mathbf{0}$ において $\dim \bar{G} = 9$ であり、局所可制御⁹⁾となっている。また $\mathbf{0}$ を含む十分広い領域でも局所可制御となることがわかっているため、以後本稿では $\bar{G}$ は正則、すなわち $\dim \bar{G} = 9$ として議論を進める。ベクトル場の集合を $H = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}$ としたときも同様である。

(10) 式より、2 リンク型の可制御性には 1 階の Lie 括弧積だけでなく、2 階の Lie 括弧積が寄与している。この 2 階の Lie 括弧積に対応する運動生成の難しさが問題を本質的に複雑にしている。そこで、本稿では 1 階の Lie 括弧積の運動生成だけを利用した制御設計を行なう。そのとき、直接制御できない状態量が必然的に生じるが、その状態量が示すある特異な周期的特性をうまく利用することで、所望の制御を実現させる。

3.2 外積方程式に基づく周期入力設計法

周期入力により、状態を 1 階の Lie 括弧積 $\mathbf{g}_{12}, \mathbf{g}_{23}, \mathbf{g}_{31}$ (または $\mathbf{h}_{12}, \mathbf{h}_{23}, \mathbf{h}_{31}$) で張られる空間に移動させることで、所望の状態変位を実現する。本節では、そのための制御入力の設計法について説明する⁶⁾。

入力 $\mathbf{u}$ がつぎのように 2 入力 $\bar{\mathbf{u}}$ で決まるとする。

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \\ K_{13} & K_{23} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \quad (11)$$

ただし、 $K_{1i} \in \mathbb{R}$, $K_{2i} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) である。すると、 $\bar{\mathbf{u}}$ を入力とする状態方程式として

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_1 & \bar{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \quad (12)$$

を得る。ただし、 $\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2$ は入力ベクトル場 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ の線形結合として次式で表わされる。

$$\bar{\mathbf{g}}_1 := \sum_{i=1}^3 K_{1i} \mathbf{g}_i, \quad \bar{\mathbf{g}}_2 := \sum_{i=1}^3 K_{2i} \mathbf{g}_i \quad (13)$$

よって、周期関数

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]^\top = [-\epsilon \omega \sin \omega t, \epsilon \omega \cos \omega t]^\top \quad (14)$$

を加えると、2 つのベクトル場 $\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2$ の 1 階の Lie 括弧積の効果により $t = T := 2\pi/\omega$ での状態 ξ_T はつぎのように近似される。

$$\xi_T = \xi_0 + \pi \epsilon^2 [\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] + O(\epsilon^3) \quad (15)$$

$O(\epsilon^3)$ の項は高次の微小項であるので、1 周期後にはほぼ $[\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ の方向に遷移すると考えることができる。つまり、

1 周期後の状態変化 $\Delta \xi_T$ は次式で表わせる.

$$\Delta \xi_T := \xi_T - \xi_0 \cong \pi \epsilon^2 [\bar{g}_1, \bar{g}_2] \quad (16)$$

さらに, Lie 括弧積の歪対称性を用いると

$$[\bar{g}_1, \bar{g}_2] = \kappa_{12} g_{12} + \kappa_{23} g_{23} + \kappa_{31} g_{31} \quad (17)$$

となる. ただし, $\kappa_{12} := K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}$, $\kappa_{23} := K_{12}K_{23} - K_{13}K_{22}$, $\kappa_{31} := K_{13}K_{21} - K_{11}K_{23}$ である.

よって, 所望の ξ_T を実現するために, この $\kappa_{12}, \kappa_{23}, \kappa_{31}$ を先に適当に設定し, 対応する K_{1i}, K_{2i} ($i = 1, 2, 3$) を決めてやればよい. これは

$$\begin{aligned} \kappa &:= [\kappa_{23}, \kappa_{31}, \kappa_{12}]^\top \\ K_j &:= [K_{j1}, K_{j2}, K_{j3}]^\top, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (18)$$

としたときの

$$\kappa = K_1 \times K_2 \quad (19)$$

を満たす K_1, K_2 を見つけることと同じである. (19) 式を外積方程式と呼ぶ. 歪対称行列

$$\hat{K}_1 := \begin{bmatrix} 0 & -K_{13} & K_{12} \\ K_{13} & 0 & -K_{11} \\ -K_{12} & K_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

を用いれば $K_1 \times K_2 = \hat{K}_1 K_2$ と表わせる. (19) 式を満たす K_1, K_2 の組合わせは一意ではないが, 両者とも κ に直交し, 互いに平行でないことが必要である. そこで, まず K_1 を κ に直交するように適当に設定する. すなわち

$$\kappa_{23}K_{11} + \kappa_{31}K_{12} + \kappa_{12}K_{13} = 0 \quad (21)$$

さらに, K_1 と K_2 の内積の大きさを $K_1 \cdot K_2 = c$ と決める.

$$\begin{bmatrix} \kappa \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_1 \\ K_1^\top \end{bmatrix} K_2 =: K K_2 \quad (22)$$

とおき, K_2 を

$$K_2 = K^+ \begin{bmatrix} \kappa \\ c \end{bmatrix} \quad (23)$$

と定める. ここで K^+ は行列 K の疑似逆行列である. 以上で K_{1i}, K_{2i} ($i = 1, 2, 3$) が求まったので, あとは, $\bar{u}$ を満足する入力 u が (11) 式により求まる.

3.3 近似平衡点とその安定性

続いて, 前節で述べた周期入力の適用下でのシステム (15) の振る舞いの取扱いについて述べる. 時間間隔を T としてサンプルした状態を考え,

$$\xi[k] := \xi(kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots, T = 2\pi\omega \quad (24)$$

とおくと, (15), (16) 式は以下のように書き直される.

$$\begin{aligned} \xi[k+1] &= \xi[k] + \Delta(\xi[k]) \\ \Delta(\xi[k]) &\cong \pi \epsilon^2 [\bar{g}_1, \bar{g}_2](\xi[k]) \end{aligned} \quad (25)$$

このように, 1 周期ごとの状態 $\xi[k]$ を表わす空間をここでは Poincaré 断面という. その状態変化 $\Delta(\xi[k])$ は 1 階の Lie 括弧積を用いて近似的に表わせる. そこで,

$$[\bar{g}_1, \bar{g}_2](\xi^*) = 0 \quad (26)$$

を満たす状態 ξ^* を Poincaré 断面上の近似平衡点と呼ぶことにする. (25) 式を近似平衡点 ξ^* の近傍で線形化すると,

$$\xi[k+1] - \xi^* \cong \left(I_9 + \frac{\partial \Delta(\xi[k])}{\partial \xi[k]} \bigg|_{\xi[k]=\xi^*} \right) (\xi[k] - \xi^*) \quad (27)$$

となる. ここで $I_9 \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ は単位行列である.

$$A := I + \frac{\partial \Delta(\xi[k])}{\partial \xi[k]} \bigg|_{\xi[k]=\xi^*}$$

のスペクトル半径が 1 未満のとき, 近似平衡点 ξ^* は Poincaré 断面上で局所漸近安定であるという.

4. 推進制御

推進制御の目的としてロボット位置の x 座標を動かすことを考える. つまり 1 周期後の状態変位として $\Delta \xi_T = [0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha, 0, 0]^\top$ を実現すればよい. ただし, $\alpha \in \mathbb{R}$ は推進量を決定する定数である. 本章では根元関節の角速度 $\dot{\phi}_1$ を制御入力に取ることにする. すなわち状態方程式として (8) 式を考える.

4.1 安定性解析を利用した周期入力設計

姿勢角 θ_0 は変化しないため, 一般性を失うことなく $\theta_0 = 0$ と仮定する. まず, 肘関節の変化 $\Delta \phi_2$ には言及せず, 1 周期後の配置ベクトルの変位 Δw_T が $\Delta w_T = [\alpha, 0, 0]^\top$ となるためには (16) 式, (17) 式より

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \pi \epsilon^2 \begin{bmatrix} h_{12}^w(\phi) & h_{23}^w(\phi) & h_{31}^w(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{12} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \end{bmatrix} \quad (28)$$

を満足する $[\kappa_{12}, \kappa_{23}, \kappa_{31}]^\top$ を求めればよい. $h_{12}^w(\phi), h_{23}^w(\phi), h_{31}^w(\phi)$ は根元関節の形状 ϕ_1 のみに依存する. さらに, 任意の ϕ_1 に対して $\text{rank}[h_{12}^w(\phi), h_{23}^w(\phi), h_{31}^w(\phi)]^\top = 3$ であるので, (28) 式を満たす定数ベクトル $[\kappa_{12}, \kappa_{23}, \kappa_{31}]^\top$ は一意に定まる. 設定された $\kappa_{12}, \kappa_{23}, \kappa_{31}$ のもとで, 肘関節の形状変化 $\Delta \phi_2$ は次式で表わせる.

$$\Delta \phi_2 \cong \pi \epsilon^2 \begin{bmatrix} h_{12}^{\phi,2}(\phi) & h_{23}^{\phi,2}(\phi) & h_{31}^{\phi,2}(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{12} \\ \kappa_{23} \\ \kappa_{31} \end{bmatrix} \quad (29)$$

このとき, $\Delta \phi_2 = 0$ となる形状 ϕ^* は, 設定された ϕ_1, κ のもとでの肘関節 ϕ_2 の近似平衡点である. ここで, 「近似」平衡点と呼ぶ理由は, 1 周期後の状態変化 ξ_T を厳密に求める場合, (16) 式において高階の Lie 括弧積の影響 $O(\epsilon^3)$ も

(a) Response of the location

(b) Response of the root joint angles

(c) Response of the hinge joint angles

Fig. 2 Simulation results (Translation)

考慮しなければならないが、1 階の Lie 括弧積のみで近似しているためである（高階の Lie 括弧積がシステムの挙動に与える影響は安定平衡点の収束性に委ねる）。さらに、3.3 節の近似平衡点の安定性解析を行えば推進制御を実現するための肘関節の収束形状がわかる。以下に、推進制御の設計手順をまとめておく。

[手順 1.] 推進制御のための制御入力設計

1. 根元関節の初期形状 $\phi_1[0]$ に対し、(28) 式から κ_{12} , κ_{23} , κ_{31} を設定する。
2. 設定した κ_{12} , κ_{23} , κ_{31} に対応する肘関節の近似平衡点 ϕ_2^* を $\Delta\phi_2 = 0$ とした (29) 式から求め、3.3 節の安定性解析から肘関節の収束形状について調べる。
3. (21) 式、(23) 式から K_1 , K_2 をそれぞれ求める。
4. (11) 式から制御入力 u を決定する。

4.2 シミュレーション

まず、周期入力の振幅 $\epsilon = 0.2$ 、周波数 $\omega = 1$ 、推進量 $\alpha = -0.1$ とする。[手順 1.] より、初期形状 $\phi_0 =$

Fig. 3 Simulation results (Translation)

$[\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0]^T$ とすると、(28) 式から $\kappa_{12} = 0.34$, $\kappa_{23} = -0.34$, $\kappa_{31} = 0$ となるので $K_1 = [0, -0.69, 0]^T$, $K_2 = [0.49, 0, 0.49]^T$ と取れば、並進のための制御入力 u として次式を得る。

$$\begin{cases} u_1 = 0.49 \cos t \\ u_2 = 0.69 \sin t \\ u_3 = 0.49 \cos t \end{cases} \quad (30)$$

Fig. 2 と **Fig. 3** はそのときのシミュレーション結果である。

Fig. 2 において、(a) はロボットの位置 x, y と姿勢 θ_0 の時間応答を示しており (b) と (c) はロボットの根元関節の形状 ϕ_{11} , ϕ_{21} , ϕ_{31} およびロボットの肘関節の形状 ϕ_{12} , ϕ_{22} , ϕ_{32} の時間応答をそれぞれ示している。**Fig. 2** の (a) より、1 周期後には y, θ_0 はほぼ初期状態に戻るが、 x は変化していき周期入力を繰り返すことにより、負方向の並進運動が実現できているのがわかる。**Fig. 2** の (b) において、根元関節の形状が周期ごとに変化していないのは根元関節の形状変化 $\dot{\phi}_1$ に周期関数 (制御入力) を与えているためである。また、**Fig. 2** の (c) より、肘関節の形状 ϕ_2 はある値に収束していくのが確認できる。これは近似平衡点 $\phi_2^* := [\phi_{12}^*, \phi_{22}^*, \phi_{32}^*]^T = [1.05, 0, -1.05]^T$ 近傍が安定であることに起因している。**Fig. 3** に初期形状と最終形状を示す。

5. 形状制御

形状制御の目的は、配置ベクトル w を変化させずに任意の初期形状 $\phi[0] := [\phi_1[0], \phi_2[0]]^T$ から任意の目標形状 $\phi^{\text{ref}} := [\phi_1^{\text{ref}}, \phi_2^{\text{ref}}]^T$ まで制御することである。つまり初期状態 $\xi[0]$ から目標状態 $\xi^{\text{ref}} = [\phi_1^{\text{ref}}, \phi_2^{\text{ref}}, \phi_3^{\text{ref}}, \phi_4^{\text{ref}}, \phi_5^{\text{ref}}, \phi_6^{\text{ref}}, x[0], y[0], \theta_0[0]]^T$ への変化を実現すればよい。ただし、 $x[0], y[0], \theta_0[0]$ は x, y, θ_0 それぞれの初期値を表わす。なお、形状制御ではベースの運動 $\dot{w}$ を制御入力に取ることにする。つまり、状態方程式は (4) 式となる。周期的な入力を与える限り配置ベクトル w は変化しないことに注意されたい。

5.1 安定性解析を利用した周期入力設計

姿勢角 θ_0 は変化しないため、一般性を失うことなく $\theta_0 = 0$ と仮定すると、 $g_{12}^{\phi_1}, g_{23}^{\phi_1}, g_{31}^{\phi_1}$ は形状 ϕ に依存しない定数ベクトルであり、かつ線形独立となる。よって、根元関節の任意の形状変化 $\Delta\phi_1$ を実現するような定数ベクトル

$[\kappa_{12}, \kappa_{23}, \kappa_{31}]^T$ を次式から設定することができる。

$$\Delta\phi_{.1} = \pi\epsilon^2(\kappa_{12}g_{12}^{\phi_{.1}} + \kappa_{23}g_{23}^{\phi_{.1}} + \kappa_{31}g_{31}^{\phi_{.1}}) \quad (31)$$

ただし、肘関節は設定された κ_{12} , κ_{23} , κ_{31} の値に応じて、つぎの式に従って変化する。

$$\Delta\phi_{.2} \cong \pi\epsilon^2(\kappa_{12}g_{12}^{\phi_{.2}} + \kappa_{23}g_{23}^{\phi_{.2}} + \kappa_{31}g_{31}^{\phi_{.2}}) \quad (32)$$

Fig. 4 は (32) 式において $\kappa_{12} = 0.5$, $\kappa_{23} = 0$, $\kappa_{31} = 0$ としたときの肘関節の形状変化のようすを示している。肘関節は周期の経過とともにほぼ同じ値に収束しているが、これは近似平衡点 $-\pi$ の近傍に存在する安定平衡点に起因している。この肘関節の収束値を $\phi_{.2}^{\#} := [\phi_{12}^{\#}, \phi_{22}^{\#}, \phi_{32}^{\#}]^T$ と表わす。以下では、ここで観察した安定平衡点への収束現象を利用した制御手法を提案する。

まず、形状ベクトルの空間に以下のような部分集合 M_1 を定義する。

$$M_1 := \{(\phi_{.1}, \phi_{.2}) \mid \phi_{.2} = \phi_{.2}^{\#}\} \quad (33)$$

$\phi_{.2}^{\#}$ の定義より、 M_1 は不変集合である。

続いて、同様に部分集合 M_2 を以下のように定義する。

$$M_2 := \{(\phi_{.1}, \phi_{.2}) \mid \phi_{.1} = \phi_{.1}^{\text{ref}} - D_N(\phi_{.2}^{\text{ref}}, \phi_{.2})\} \quad (34)$$

ここで N は自然数で、 $D_N(\phi_{.2}^{\text{ref}}, \phi_{.2})$ は

$$D_N(\phi_{.2}^{\text{ref}}, \phi_{.2}) \cong \pi\epsilon^2 \sum_{\ell=1}^N [g_{12}^{\phi_{.1}} \ g_{23}^{\phi_{.1}} \ g_{31}^{\phi_{.1}}] \kappa[\ell] \quad (35)$$

$$\kappa[\ell] \cong \frac{1}{\pi\epsilon^2 k} \left[g_{12}^{\phi_{.2}}(\phi_{.2}[\ell-1]) \ g_{23}^{\phi_{.2}}(\phi_{.2}[\ell-1]) \right. \\ \left. g_{31}^{\phi_{.2}}(\phi_{.2}[\ell-1]) \right]^{-1} (\phi_{.2}^{\text{ref}} - \phi_{.2}^{\#}) \quad (36)$$

で決定される量である。ここで (36) 式は $\phi_{.2}^{\#}$ から N 周期をかけて $\phi_{.2}^{\text{ref}}$ まで制御するための $\kappa[\ell] = (\kappa_{12}[\ell], \kappa_{23}[\ell], \kappa_{31}[\ell])^T$ を求める設計方程式である。そして $D_N(\phi_{.2}^{\text{ref}}, \phi_{.2})$ はその過程で生じる $\phi_{.1}$ の変化量を表わしている。つまり、ひとたび $\phi \in M_2$ となれば、その後 (36) 式で決定される $\kappa_{12}[\ell]$, $\kappa_{23}[\ell]$, $\kappa_{31}[\ell]$ を用いて $\phi_{.2}$ を目標値 $\phi_{.2}^{\text{ref}}$ まで制御したとき

Fig. 4 Convergence of the hinge joint angles to a stable equilibrium

に、同時に $\phi_{.1}$ も目標値 $\phi_{.1}^{\text{ref}}$ に到達させられるということ（近似的に）意味する。

したがって、問題は初期形状 $[\phi_{.1}[0], \phi_{.2}[0]]^T$ を M_2 に到達させることに帰着された。そこで

$$M := M_1 \cap M_2 \quad (37)$$

を定義し、適当な点 $(\phi_{.1}^M, \phi_{.2}^M) \in M$ を選び、 $\phi_{.1}[0]$ を $\phi_{.1}^M$ まで制御することを考えよう。そのような制御入力 (31) 式に基づいて κ_{12} , κ_{23} , κ_{31} を求めることで決定できる。この間 $\phi_{.2}$ についてはこれを放置しているが、Fig. 4 で見た $\phi_{.2}^{\#}$ の局所漸近安定性により、 $\phi_{.2}$ は $\phi_{.2}^{\#}$ の十分近くに、すなわち ϕ が M 上の点 ϕ^M に到達する。その後、(36) 式の $\kappa[\ell]$ から決まる周期入力に切り替えると、 ϕ は ϕ^{ref} の近傍へ到達する。以下に、形状制御の設計手順をまとめておく。

[手順 2.] 形状制御のための制御入力設計

1. 適当な自然数 N を決め、(36) 式から $\kappa[\ell]$, $\ell = 1, \dots, N$ を求める。
2. (35) 式と $\kappa[\ell]$ から $D_N(\phi_{.2}^{\text{ref}}, \phi_{.2}^{\#})$ を求める。
3. 根元関節を $\phi_{.1}^M \in M$ まで制御するために、 $\Delta\phi_{.1} = \phi_{.1}^M - \phi_{.1}$ において (31) 式を満たす κ_{12} , κ_{23} , κ_{31} を求める。(21), (23) 式および (11) 式から制御入力 u を求めて適用する。
4. 1. で求めた $\kappa[\ell]$ を用い、(21), (23) 式および (11) 式から制御入力 u を求めて適用する。
5. ϕ と ϕ^{ref} の偏差が大きければ、3. と 4. を繰り返す。

5.2 シミュレーション

初期形状 $\phi[0] = [-0.7, -1.0, -0.8, 2.2, 2.3, 2.2]^T$,

(a) Response of the root joint angles

(b) Response of the hinge joint angles

Fig. 5 Shape control ($[\phi_{.1}[0], \phi_{.2}[0]]^T \rightarrow [\phi_{.1}^M, \phi_{.2}^{\#}]^T$)

(a) Response of the root joint angles

(b) Response of the hinge joint angles

Fig. 6 Shape Control ($[\phi_{1,1}^M, \phi_{2,2}^\#]^\top \rightarrow \phi^{\text{ref}}$) **Fig. 7** Simulation results (Transformation of joint)

目標形状 $\phi^{\text{ref}} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^\top$ とした. 肘関節の収束形状は $\phi_{2,2}^\# = -2.7$ であり, $N = 50$, 制御入力の振幅 $\epsilon = 0.1$, 周波数 $\omega = 1$ と設定した. ステップ 3 での設計結果は $\kappa_{12} = 2.0$, $\kappa_{23} = 3.7 \times 10^{-2}$, $\kappa_{31} = -1.1 \times 10^{-1}$ となるので, $\mathbf{K}_1 = [0, 1.4, 7.5 \times 10^{-2}]^\top$, $\mathbf{K}_2 = [-1.4, -1.4 \times 10^{-3}, 2.6 \times 10^{-2}]^\top$ とおくと次式を得る.

$$\begin{cases} u_1 = 1.4 \cos t \\ u_2 = -1.4 \sin t - 1.4 \times 10^{-3} \cos t \\ u_3 = -7.5 \times 10^{-2} \sin t + 2.6 \times 10^{-2} \cos t \end{cases} \quad (38)$$

Fig. 5 はステップ 3 での根元関節・肘関節の変化を表す. 最後にステップ 4 として (36) 式から, $\kappa[\ell]$ ($\ell = 1, \dots, N$) を求め, 根元関節・肘関節を同時に目標の形状 ϕ^{ref} 近傍まで制御する. **Fig. 6** に示した根元関節・肘関節の変化により, いずれもおおよそ目標形状に制御できていることが確認できる.

6. おわりに

本稿では, 2 リンク型の三叉ヘビロボットに対し, 周期入力のみによる制御手法 (外積方程式に基づく周期入力設計法) を用いて制御する方法を論じた. その際, 通常のホロノミーの原理に基づく周期入力では直接は制御できない 3 自由度の運動 (肘関節の形状) について, 周期入力下における Poincaré 断面上での局所漸近安定平衡点への収束を利用するアプローチを提案した. これにより, 推進制御においては推進方向に応じて決まるある安定な形状 (**Fig. 3 (b)**) を保持して推進し続けることがわかった. これは各リンクが進行方向に対して後方に「なびいている」ような形状になっている. 本稿では割愛したが回転制御の場合でも回転と逆方向になびいているような安定形状が見いだされており, これらが何らかの意味で力学的にも自然な形状になっているのではないかと考えられる. 一方, 形状制御においてはまず安定平衡点からなる不変集合にいったん収束させ, そののちに目標形状へ到達させるという二段階の制御方法を提案し, その有効性を示した.

本研究のアイデアの基本は, 「複雑すぎる非線形ダイナミクスを完全に制御しようとするのではなく, システムがもっているよい性質 (安定性) をできるだけ利用する」ということで, ダイナミクスベース制御¹⁰⁾にも通じる考え方である. 三叉ヘビロボットという個別の対象に限らず, 高階の Lie 括弧積が関与する複雑な非ホロノミック系に対するシンプルかつロバストな制御方法への端緒を開くものであると著者らは考えている.

謝辞 本研究を進めるにあたり, 貴重な助言と励ましをいただきました京都大学杉江俊治教授に感謝の意を表します.

参考文献

- 1) S. Hirose: *Biologically inspired robots: snake-like locomotors and manipulators*, Oxford University Press (1993)
- 2) R.M. Murray, S.S. Sastry and Z. Li: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press (1994)
- 3) 石川将人: 非ホロノミックシステムの位相構造—未解決問題への誘い—, システム/制御/情報, **45**-9, 536/543 (2001)
- 4) 岩谷, 石川, 原: 三叉ヘビ型移動ロボットの解析と運動制御, 計測自動制御学会論文集, **39**-12, 1159/1161 (2003)
- 5) 石川将人: 三叉ヘビ型ロボットの推進原理と周期入力による制御, 計測自動制御学会論文集, **42**-5, 520/528 (2006)
- 6) 石川, 南, 杉江: 三叉ヘビ型ロボットの point-to-point フィードバック制御, システム制御情報学会論文誌, **20**-2, 69/75 (2007)
- 7) N.E. Leonard and P.S. Krishnaprasad: Motion control of drift-free, left-invariant systems on Lie groups, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**-9, 1539/1554 (1995)
- 8) J. Ostrowski and J. Burdick: The geometric mechanics of undulatory robotic locomotion, *The International Journal of Robotics Research*, **17**-7, 683/701 (1998)
- 9) H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft: *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag (1990)
- 10) 大須賀公一: モデルベース制御からダイナミクスベース制御へ—ロボットにおける「表モデル」と「裏モデル」, システム/制御/情報, **43**-2, 94/100 (1999)

[著 者 紹 介]

石 川 将 人 (正会員)

1994 年東京工業大学工学部制御工学科卒業，2000 年同大学院情報理工学研究科博士後期課程修了．博士（工学）．同大学助手，東京大学情報理工学系研究科助手，京都大学情報学研究科講師を経て，2010 年大阪大学工学研究科機械工学専攻准教授となり現在に至る．非線形制御，非ホロノミックシステム，ハイブリッドシステムなどの研究に従事．システム制御情報学会，日本ロボット学会，日本機械学会，IEEE などの会員．

藤 野 隆 弘

2007 年京都大学工学部物理工学科卒業，2009 年京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻修士課程修了．西日本旅客鉄道株式会社勤務を経て，現在滋賀医科大学医学部在学中．京都大学在学中は非線形制御，数理言語学などの研究に従事．