SOSに基づくアクロボットのゲインスケジューリング制御 — 姿勢制御実験による検証 —

市原 裕之*・川田 昌克**

Gain Scheduling Control System Synthesis of an Acrobot Based on SOS — Attitude Control Experiment —

Hiroyuki ICHIHARA* and Masakatsu KAWATA**

The dynamics of acrobots, two-link underactuated system, have strong nonlinearity, so that gain scheduling (GS) control is suitable for stabilizing the system in a wide range of operation. In this paper, GS controller design problems for the attitude control are reduced to solving polynomially parameter-dependent linear matrix inequalities (PDLMI). The polynomially PDLMI are relaxed by matrix sum of squares (SOS) polynomials to find feasible solutions. Several reduction techniques are adopted to reduce the amount of computation for solving the SOS problems while direct formulations are too computationally expensive to solve. For two attitude modes of the acrobot, the effectiveness of GS control is shown by experiments as well as nonlinear simulations.

Key Words: acrobot, attitude control, gain scheduling control, sum of squares

1. はじめに

アクロボット¹⁾とは、2リンクの劣駆動マニピュレータ²⁾の一種であり、二つの関節角度に対して、直接駆動できるのはそのうち一つのみである。片方のみの駆動であっても、重力に逆らい、振り上げや倒立、さらに姿勢の制御が可能である²⁾。アクロボットの限界姿勢は、駆動リンクが水平位置で静止する姿勢となる。重力などに起因する非線形性に対処しなければ、この限界姿勢近くで安定性や制御性能を保持することは困難である。そのため、疑似線形化^{3),4)}をはじめ非線形性を考慮した新しい制御理論の有効性検証に利用される。

このように、アクロボットやアーム型倒立振り子といった非線形性に影響されやすい2リンク劣駆動マニピュレータの倒立および姿勢制御では、近年、ゲインスケジューリング (GS; Gain Scheduling) 制御の適用が検討されている^{5),6)}。GS制御系設計では多くの場合、設計条件をパラメータ依存線形行列不等式 (PDLMI; Parameter-Dependent Linear Matrix Inequality) で記述する。とくに、システムの非線形特性を多項

式で表現し、線形パラメータ変動 (LPV; Linear Parameter-Varying) モデルで記述することを考えてみる。この場合、設計条件はごく自然に多項式型の PDLMI になる。その解を求めるには、文献 7) のように、PDLMI のパラメータ変動を凸多面体で囲うことで、有限個の LMI に帰着する手法が用いられることが多い。ただし、パラメータの次数の高い単項式の取り扱いを個別に検討する必要があるため、設計時に負担となる。また、次数が高い場合、PDLMI と有限個の LMI との実行可能領域のギャップが大きくなる。そのため、保守性が高くなり、必要な制御性能を達成する PDLMI の実行可能解が得られない場合もある。この問題を緩和するため、凸多面体を細かく分割する方法⁸⁾や行列を拡大することで多項式の次数を低くする方法^{9),10)}などが検討されている。

一方、近年、行列値の二乗和 (SOS; Sum of Square)^{11)~13)}が注目されている。二乗和を用いれば、緩和に用いる多項式の次数を増やすことで、理論上いくらでも保守性の低い PDLMI の解が得られる。しかしながら、次数の増加に伴い、SOS問題を解くための LMI の変数が爆発的に増える。そのため、SOSに基づいて PDLMI を解き、ゲインスケジューリング制御を実システムに応用した例はきわめて少ない。例外として、文献 14) では、クレーンの制御に SOS に基づく GS 制御を適用している。しかし、 $\mathcal{H}_\infty$ 制御仕様という単一の設計仕様しか考慮しておらず、また、クレーン自体が不安定ではないため制御が比較的容易である。

本論文では、アクロボットの非駆動リンクが不安定な状態である up/down, up/up という二つの姿勢モードを考える。

* 明治大学理工学部 川崎市多摩区東三田 1-1-1

** 舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科 舞鶴市宇白屋 234

* School of Science and Technology, Meiji University, 1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki

** Department of Control Engineering, Maizuru National College of Technology, 234 Aza shiroya, Maizuru

(Received December 11, 2009)

(Revised May 31, 2010)

それぞれのモードに対して、SOSに基づく手法により $\mathcal{H}_\infty$ 制御仕様と極配置仕様を同時に満足する GS 制御系を設計する。設計において、LPV モデルのスケジューリングパラメータを単一にする、SOS 多項式の形式を限定するなど、いくつかの方策を施し最終的に解くべき LMI の変数を減らす。また、実験実験により SOS に基づく手法と従来の有限個の LMI に帰着させる手法との比較検討を行ない、前者の有効性を示す。

2. アクロボットの姿勢制御モデル

アクロボットの up/down, up/up モードの姿勢を **Fig. 1** に示す。ここで、up/down モードとは、link 1 の重心が joint 1 よりも上方に、link 2 の重心が joint 2 よりも下方に位置するような姿勢を意味する。また、up/up モードとは、link 1, 2 の重心がそれぞれ joint 1, 2 よりも上方に位置するような姿勢を意味する。いずれの姿勢モードにおいても、駆動関節 (joint 2) に取り付けられた駆動リンク (link 2) を回転させ、非駆動関節 (joint 1) に取り付けられた非駆動リンク (link 1) の角度を制御することを目的とする。使用する実験装置の詳細については文献 6) を参照されたい。

up/down モードのアクロボットの非線形モデルは、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \cos \theta_2 & \alpha_2 - \alpha_3 \cos \theta_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \cos \theta_2 & \alpha_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \alpha_3 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \\ -\alpha_3 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_4 \sin \theta_1 + \alpha_5 \sin \theta_{12} \\ \alpha_5 \sin \theta_{12} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \end{bmatrix} v \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = J_{g1} + m_1 \ell_1^2 + m_2 L_1^2, & \alpha_2 = J_{g2} + m_2 \ell_2^2, \\ \alpha_3 = m_2 L_1 \ell_2, & \alpha_4 = m_1 g \ell_1 + m_2 g L_1, \\ \alpha_5 = m_2 g \ell_2, & \theta_{12} = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

となる。ただし、 θ_1, θ_2 : link 1, 2 の相対角度、 v : 速度制御型モータドライバへの指令電圧、 g : 重力加速度、 m_1, m_2 : link 1, 2 の質量、 ℓ_1, ℓ_2 : joint 1, 2 から link 1, 2 の重心まで

Fig. 1 Attitude modes of acrobot

Table 1 Physical parameters of acrobot

$m_1 = 7.02 \times 10^{-1}$ [kg]	$m_2 = 1.40 \times 10^{-1}$ [kg]
$\ell_1 = 1.25 \times 10^{-2}$ [m]	$\ell_2 = 1.60 \times 10^{-1}$ [m]
$L_1 = 1.23 \times 10^{-1}$ [m]	$L_2 = 2.35 \times 10^{-1}$ [m]
$J_{g1} = 5.98 \times 10^{-3}$ [kg·m ²]	$J_{g2} = 1.09 \times 10^{-3}$ [kg·m ²]
$c_1 = 4.79 \times 10^{-3}$ [kg·m ² /s]	$\alpha_{2s} = 1.46 \times 10^1$ [kg·m ²]
$c_{2s} = 9.46 \times 10^1$ [kg·m ² /s]	$k_m = 2.90 \times 10^2$ [N·m/V]

の距離、 L_1 : joint 1 から joint 2 までの距離、 J_{g1}, J_{g2} : link 1, 2 の重心まわりの慣性モーメント、 c_1 : link 1 の粘性摩擦係数、 α_{2s}, c_{2s}, k_m : リンク、ギアード DC モータ、モータドライバの特性により決定されるパラメータである。同定された物理パラメータの値を **Table 1** に示す。

同様に、up/up モードの非線形モデルは、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \cos \phi_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \cos \phi_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \cos \phi_2 & \alpha_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \alpha_3 (2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2^2) \sin \phi_2 \\ -\alpha_3 \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_4 \sin \phi_1 + \alpha_5 \sin \phi_{12} \\ \alpha_5 \sin \phi_{12} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \end{bmatrix} v \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ただし、 ϕ_1, ϕ_2 : 相対角度、 $\phi_{12} = \phi_1 + \phi_2$ である。

また、アクロボットの平衡姿勢と限界姿勢については、付録 A で説明する。

3. ゲインスケジューリング制御系

いずれのモードの場合も、スケジューリングパラメータ $\rho(t) \in \mathbb{R}^{n_\rho}$ を適切に選ぶことで、非線形モデル (1), (2) 式は、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_{\mathcal{P}22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{\mathcal{P}21}(\rho) & A_{\mathcal{P}22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\mathcal{P}2} \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (3)$$

というディスクリプタ形式の LPV モデルで表わすことができる。ただし、 $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2]^T$ は、up/down モードでは $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ 、up/up モードでは $\phi = [\phi_1 \ \phi_2]^T$ を表わし、また、 $u = v$ とする。さらに、 ρ とその変化率 $\dot{\rho}$ の取り得る範囲をそれぞれ集合 Ω および Π と表わす。

本論文では、(3) 式に対して、リンク 1 の角度 ζ_1 をその目標値 ζ_1^{ref} に追従させるために、状態フィードバック形式の GS コントローラ

$$\mathcal{K}: u = K_s(\rho)x \quad (4)$$

$$x = [\zeta^T \ \dot{\zeta}^T \ x_s]^T, \quad x_s = \int_0^t e \, dt, \quad e = \zeta_1^{ref} - \zeta_1$$

を設計する。以下では、それぞれのモードにおける ρ の選び方および設計仕様について述べる。

3.1 up/down モードの LPV モデル

up/down モードの非線形モデル (1) 式において、 $\theta_i = 0$ で $\cos \theta_i, \sin \theta_i$ をテイラー級数展開すると、

$$1 - \cos \theta_i \doteq \frac{1}{2} \theta_i^2, \quad 1 - \frac{\sin \theta_i}{\theta_i} \doteq \frac{1}{6} \theta_i^2$$

という関係式が得られる。ここで、スケジューリングパラメータを $\rho_i := 1 - \cos \theta_i$ と定義すると、(1) 式の非線形項を

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= 1 - \rho_i, \quad \sin \theta_i = \left(\frac{\sin \theta_i}{\theta_i} \right) \theta_i \doteq \left(1 - \frac{\rho_i}{3} \right) \theta_i \\ \sin \theta_{12} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ &\doteq \left(1 - \frac{\rho_1}{3} \right) (1 - \rho_2) \theta_1 + (1 - \rho_1) \left(1 - \frac{\rho_2}{3} \right) \theta_2 \end{aligned}$$

のように表わすことができる。したがって、コリオリ・遠心力の項を無視すると、近似的にディスクリプタ形式の LPV モデル (3) 式が得られる⁶⁾。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{P}22}(\boldsymbol{\rho}) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3(1 - \rho_2) & * \\ \alpha_2 - \alpha_3(1 - \rho_2) & \alpha_{2s} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{\mathcal{P}21}(\boldsymbol{\rho}) &= \begin{bmatrix} \alpha_4(1 - \rho_1/3) - \alpha_5(1 - \rho_1/3)(1 - \rho_2) \\ -\alpha_5(1 - \rho_1/3)(1 - \rho_2) \\ -\alpha_5(1 - \rho_1)(1 - \rho_2/3) \\ -\alpha_5(1 - \rho_1)(1 - \rho_2/3) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{\mathcal{P}22} &= - \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_{2s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\mathcal{P}2} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。スケジューリングパラメータ ρ とその変化率 $\dot{\rho}$ の取り得る範囲に関しては、 $|\theta_i| \leq \bar{\theta}_i$ となる $\bar{\theta}_i$ を与えたとき、 $0 \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i = 1 - \cos \bar{\theta}_i$ と書ける。また、 $|\dot{\rho}_i| \leq \delta_i$ となる δ_i を与える。以上のことをまとめると、集合 Ω, Π は

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 : g_j(\boldsymbol{\rho}) \geq 0 \ (j = 1, 2)\}, \\ \Pi &= \{\dot{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^2 : g_j(\dot{\boldsymbol{\rho}}) \geq 0 \ (j = 3, \dots, 6)\}, \\ g_1(\boldsymbol{\rho}) &= \rho_1(\bar{\rho}_1 - \rho_1), \ g_2(\boldsymbol{\rho}) = \rho_2(\bar{\rho}_2 - \rho_2), \\ g_3(\dot{\boldsymbol{\rho}}) &= \delta_1 - \dot{\rho}_1, \ g_4(\dot{\boldsymbol{\rho}}) = \delta_1 + \dot{\rho}_1, \\ g_5(\dot{\boldsymbol{\rho}}) &= \delta_2 - \dot{\rho}_2, \ g_6(\dot{\boldsymbol{\rho}}) = \delta_2 + \dot{\rho}_2\end{aligned}$$

のように表わすことができる. なお, $g_j(\dot{\rho})$ を $\dot{\rho}$ に関してアフィンとした理由については 5 章末の方策 (B) で説明する.

3.2 up/up モードの LPV モデル

up/up モードの場合も、up/down モードと同様の考え方でスケジューリングパラメータを定義できる。しかし、ここでは up/up モードでの ϕ_1, ϕ_2 の特性を活かした単一のスケジューリングパラメータを導入することを考える⁶⁾。up/up モードでは、付録 B に示すように、(4) 式の制御構造で、link 1 の相対角度 ϕ_1 をその目標値 ϕ_1^{ref} に追従させるとき、 ϕ_1 と ϕ_2 はほぼ比例関係 $\phi_2 \doteq -k\phi_1$ にあるとみなすことができる。このとき、 $\phi_{12} \doteq (1-k)\phi_1$ であり、スケジューリングパラメータを $\rho = \phi_1^2$ と選ぶと、(2) 式の実線項を

$$\begin{aligned}\sin\phi_1 &\doteq \phi_1 - \frac{1}{6}\phi_1^3 = \left(1 - \frac{1}{6}\rho\right)\phi_1 \\ \cos\phi_2 &\doteq 1 - \frac{1}{2}\phi_2^2 \doteq 1 - \frac{1}{2}k^2\rho \\ \sin\phi_{12} &\doteq \phi_{12} - \frac{1}{6}\phi_{12}^3 \doteq \left\{1 - \frac{1}{6}(1-k)^2\rho\right\}\phi_{12}\end{aligned}$$

のように，単一パラメータ ρ で特徴付けることができる．したがって，LPV モデル (3) 式が得られる．ただし，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{P}22}(\boldsymbol{\rho}) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3(1 - k^2\rho/2) & * \\ \alpha_2 + \alpha_3(1 - k^2\rho/2) & \alpha_{2s} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{P}21}(\boldsymbol{\rho}) &= \begin{bmatrix} \alpha_4(1 - \rho/6) + \alpha_5 \{1 - (1 - k)^2\rho/6\} \\ \alpha_5 \{1 - (1 - k)^2\rho/6\} \\ \alpha_5 \{1 - (1 - k)^2\rho/6\} \\ \alpha_5 \{1 - (1 - k)^2\rho/6\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{P}22} = -\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_{2s} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{\mathcal{P}2} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{\rho} = \rho$$

である. ρ とその変化率 $\dot{\rho}$ の取り得る範囲に関しては, $|\phi_1| \leq \bar{\phi}_1$ となる $\bar{\phi}_1$ を与えたとき, $0 \leq \rho \leq \bar{\rho} = \bar{\phi}_1^2$ と書ける. また, $|\dot{\rho}| \leq \delta$ となる δ を与える. 以上より集合 Ω , Π は以下になる.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\rho \in \mathbb{R} : g_1(\rho) \geq 0\}, \\ \Pi &= \{\dot{\rho} \in \mathbb{R} : g_j(\dot{\rho}) \geq 0 \ (j = 2, 3)\}, \\ g_1(\rho) &= \rho(\bar{\rho} - \rho), \ g_2(\dot{\rho}) = \delta - \dot{\rho}, \ g_3(\dot{\rho}) = \delta + \dot{\rho}\end{aligned}$$

3.3 $\mathcal{H}_\infty$ 制御仕様

目標値 $w = \zeta_1^{ref}$ が ζ_1 および e に与える影響を小さくするため、与えられた $\gamma > 0$ に対し、 $\mathcal{L}_2$ ゲイン条件

$$\|z\|_{\mathcal{L}_2} < \gamma \|w\|_{\mathcal{L}_2}, \quad \forall w \in \mathcal{L}_2 \quad (5)$$

を満足するような (4) 式を設計する. ただし,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_t(s)\zeta_1 \\ W_s(s)e \end{bmatrix}$$

であり, $W_t(s) = b_{t2}s^2 + b_{t1}s + b_{t0}$, $W_s(s) = b_s/s$ は重み関数, $s = d/dt$ は微分演算子である. $\mathcal{H}_\infty$ 制御仕様を考慮して拡大系を構成すると, 一般化制御対象は

$$S: \begin{cases} E_{ds}(\rho)\dot{x} = A_{ds}(\rho)x + B_{1ds}w + B_{2ds}u \\ z = C_{11ds}x + C_{12ds}\dot{x} \\ y = x \end{cases} \quad (6)$$

というディスクリプタ形式で表わされる. ただし,

$$\begin{aligned} x &= \left[\begin{array}{c|c} \zeta & 0 \\ \hline x_s & 1 \end{array} \right], \quad E_{ds}(\rho) = \left[\begin{array}{cc|c} I & 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathcal{P}22}(\rho) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ [A_{ds}(\rho) \quad B_{1ds} \quad B_{2ds}] &= \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ A_{\mathcal{P}21}(\rho) & A_{\mathcal{P}22} & 0 & 0 & B_{\mathcal{P}2} \\ \hline -C_{\mathcal{P}1} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \\ [C_{11ds} \quad C_{12ds}] &= \left[\begin{array}{cc|c|c|c} C_{t1} & C_{t2} & 0 & 0 & C_{td2} & 0 \\ 0 & 0 & b_s & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \\ C_{t1} &= [b_{t0} \quad 0], \quad C_{t2} = [b_{t1} \quad 0], \\ C_{td2} &= [b_{t2} \quad 0], \quad C_{\mathcal{P}1} = [1 \quad 0] \end{aligned}$$

である. 拡大系のブロック線図を **Fig. 2** に示す.

Fig. 2 Block diagram of servo system

Table 2 Region $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}$	a	b	c	d
$\alpha < \bar{\alpha}$	0	0	1	$-2\bar{\alpha}$
$\alpha > \bar{\alpha}$	0	0	-1	$2\bar{\alpha}$
$ \beta < \delta$ ($\delta > 0$)	$1/2$	$-1/2$	0	$-\delta^2$
$(\alpha - q)^2 + \beta^2 < r^2$	1	0	$-q$	$q^2 - r^2$
	0	1		
$\frac{(\alpha - q)^2}{r_1^2} + \frac{\beta^2}{r_2^2} < 1$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$	$-\frac{r_1 - r_2}{2}$	$-qr_2^2$	$(q^2 - r_1^2)r_2^2$

3.4 極配置仕様

$\mathcal{H}_\infty$ 制御仕様だけでは操作量 u が過大となるため、実機での実装が困難である。そこで、(6) 式に対して、

$$E_{ds}(\rho)^{-1}(A_{ds}(\rho) + B_{2ds}(\rho)K_s(\rho))$$

の固有値 $\lambda = \alpha + j\beta$ が指定した領域

$$\mathcal{D}(a, b, c, d) : (a + b)^2\alpha^2 + (a - b)^2\beta^2 + 2c\alpha + d < 0 \quad (7)$$

に配置されるような (4) 式を設計する。なお、 a, b, c, d については、領域の形状に応じて Table 2^{15), 16)} のように選ぶ。

3.5 設計条件

ここでは、設計仕様 (5), (7) 式を満足させるための PDLMI 条件を示す。まず、(6) 式の信号 z の表現を整理しておく。付録 C に示すように、 z_1 は

$$z_1 = \frac{1}{\delta(\rho)} \{ \bar{C}_{t1}(\rho)\theta + \bar{C}_{t2}(\rho)\dot{\theta} + \bar{D}_t(\rho)u \} \quad (8)$$

と書ける。ただし、

$$\begin{aligned} \bar{C}_{t1}(\rho) &= \delta(\rho)C_{t1} + C_{td2}\Phi(\rho)A_{p21}(\rho), \\ \bar{C}_{t2}(\rho) &= \delta(\rho)C_{t2} + C_{td2}\Phi(\rho)A_{p22}, \\ \bar{D}_t(\rho) &= C_{td2}\Phi(\rho)B_{p2} \end{aligned}$$

である。このとき、 $\rho \in \Omega$ に対して、 $\delta(\rho) \neq 0$ を仮定すると、 z は

$$z = \Delta(\rho)^{-1}(C_{1ds}(\rho)x + D_{12ds}(\rho)u) \quad (9)$$

と書き換えることができる。ただし、

$$\begin{aligned} C_{1ds}(\rho) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{t1}(\rho) & \bar{C}_{t2}(\rho) & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_s \end{bmatrix}, \\ D_{12ds}(\rho) &= \begin{bmatrix} \bar{D}_t(\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\rho) = \begin{bmatrix} \delta(\rho) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。この表現に基づいて、つぎの補題が得られる。

[補題 1] 与えられた $\gamma > 0$ と極配置領域 $\mathcal{D}(a, b, c, d)$ に対して、PDLMI 条件

$$F_1(\rho, \dot{\rho}) > 0, \quad \forall (\rho, \dot{\rho}) \in \Omega \times \Pi \quad (10)$$

$$F_2(\rho) > 0, \quad \forall \rho \in \Omega \quad (11)$$

を満足する実数値連続関数行列 $X_s(\rho)$, $Z_s(\rho)$ が存在すれば、 $K_s(\rho) = Z_s(\rho)^T X_s(\rho)^{-1}$ とした GS 制御系は (5), (7) 式を満足する。ただし、 $F_1(\rho, \dot{\rho})$ および $F_2(\rho)$ は、

$$M_1(\rho) = \{ (A_{ds}X_s + B_{2ds}Z_s^T)E_{ds} \}(\rho),$$

$$M_2(\rho) = \{ (C_{1ds}X_s + D_{12ds}Z_s^T)E_{ds} \}(\rho)$$

と定義したとき、それぞれ

$$\begin{aligned} F_1(\rho, \dot{\rho}) &= \begin{bmatrix} (E_{ds}\dot{X}_s E_{ds})(\rho, \dot{\rho}) & * & * \\ \mathbf{0} & \gamma & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma \cdot (\Delta^2)(\rho) \end{bmatrix} \\ &\quad - \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} M_1(\rho) & B_{1ds} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \\ M_2(\rho) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}, \\ F_2(\rho) &= \begin{bmatrix} -d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes (E_{ds}X_s E_{ds})(\rho) \\ &\quad - \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} c & b \\ a & 0 \end{bmatrix} \otimes M_1(\rho) \right\} \end{aligned}$$

のように表わされる。また、 $\otimes$ はクロネッカー積を表わし、正方行列 M に対して $\text{He}\{M\} = M + M^T$ と記述する。(証明) 付録 D を参照。

4. SOS によるパラメータ依存 LMI の解法

ここでは、文献 12), 13) に基づき、行列値の SOS を用いて多項式型の PDLMI を扱う手法をまとめる。まず、高々 $2N$ 次の $q \times q$ の対称な以下の行列多項式について考える。

$$F(\rho) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} F_\alpha \rho^\alpha$$

ただし、 $\rho \in \mathbb{R}^{n_\rho}$, $\rho^\alpha = \rho_1^{\alpha_1} \cdots \rho_{n_\rho}^{\alpha_{n_\rho}}$ および

$$\mathcal{F} = \{ \alpha \in \mathbb{R}^{n_\rho} : \sum_{i=1}^{n_\rho} \alpha_i \leq 2N \}$$

とする。 $F(\rho)$ が SOS であるとは、たとえば、 $1 \times q$ のベクトル多項式 $G_j(\rho)$ を用いて、 $F(\rho)$ を

$$F(\rho) = \sum_{j=1}^{\ell} G_j(\rho)^T G_j(\rho)$$

のように二乗の和で表わせることを意味している。さらに、 $G(\rho)^T = [G_1(\rho)^T \cdots G_\ell(\rho)^T]$ とおけば、より簡潔に $F(\rho) = G(\rho)^T G(\rho)$ と表わせるので、ここでは、これを行列値の SOS の定義としておく。また、高々 N 次の単項式ベクトル $z_{[N]}(\rho)$ と適当なサイズの行列 Y あるいは $\tilde{Y}$ を用いると、 $G(\rho) = Y(I_q \otimes z_{[N]}(\rho)) = \tilde{Y}(z_{[N]}(\rho) \otimes I_q)$ と表わすことができる。前者の表現によると、

$$F(\rho) = (I_q \otimes z_{[N]}(\rho))^T (Y^T Y) (I_q \otimes z_{[N]}(\rho))$$

を満たす Y が存在すれば、 $F(\rho)$ は $z_{[N]}(\rho)$ について SOS である。さらに、 $Q = Y^T Y$ とおけば、 $F(\rho)$ が SOS であるための必要十分条件は、

$$F(\rho) = (I_q \otimes z_{[N]}(\rho))^T Q (I_q \otimes z_{[N]}(\rho)), \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^{n_\rho}$$

を満たす半正定値行列 Q が存在することである。 $F(\rho)$ が

SOS であれば, すべての ρ について半正定であることに工学的な意味がある. ただし, この逆, つまりすべての ρ について半正定な行列値多項式は SOS であるとは限らない¹¹⁾ ことには注意が必要である. Q の存在を確認するには, LMI 問題

$$\exists Q \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad (Q, I_q \otimes A_\alpha)_q = F_\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{F} \quad (12)$$

が可解であることが必要かつ十分である. ただし, (12) 式における A_α や $(\cdot, \cdot)_q$ の説明については付録 E を参照されたい. (12) 式は, 以下の事実から確認できる.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} F_\alpha \rho^\alpha &= (I_q \otimes z_{[N]}(\rho))^T Q (I_q \otimes z_{[N]}(\rho)) \\ &= (Q, I_q \otimes (z_{[N]}(\rho) z_{[N]}(\rho)^T))_q \\ &= \left(Q, I_q \otimes \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} A_\alpha \rho^\alpha \right) \right)_q \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} (Q, I_q \otimes A_\alpha)_q \rho^\alpha \end{aligned}$$

つぎに, 以下の PDLMI 問題について考える.

$$\text{Find } \xi \text{ s.t. } F(\rho, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} F_\alpha(\xi) \rho^\alpha \geq 0, \quad \forall \rho \in \Omega \quad (13)$$

ここで,

$$F_\alpha(\xi) = F_\alpha(0) + \sum_{j=1}^{n_\xi} C_\alpha^{(j)} \xi_j$$

である. また, $\xi = [\xi_1 \ \dots \ \xi_{n_\xi}]^T \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ は決定変数, Ω はパラメータ ρ の存在領域であり, 多項式 $g_k(\rho)$ を使って,

$$\Omega = \{\rho : g_k(\rho) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_g\}$$

と表わす. このとき, つぎの補題が得られる¹³⁾.

[補題 2] つぎの条件

$$F(\rho, \xi) = S_0(\rho) + \sum_{k=1}^{n_g} g_k(\rho) S_k(\rho), \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^{n_\rho} \quad (14)$$

を満たす ξ および SOS 多項式 $S_k(\rho)$ ($k = 0, 1, \dots, n_g$) が存在すれば, (13) 式は可解となる.

とくに, $w_k = \lceil (\deg g_k(\rho))/2 \rceil$ に対して

$$\begin{aligned} S_0(\rho) &= (I_q \otimes z_{[N]}(\rho))^T Q (I_q \otimes z_{[N]}(\rho)), \\ S_k(\rho) &= (I_q \otimes z_{[N-w_k]}(\rho))^T R_k (I_q \otimes z_{[N-w_k]}(\rho)) \end{aligned}$$

とおくと, 補題 2 の可解条件は, つぎの補題に示すような LMI に帰着される. ただし, $\deg f(\rho)$ は多項式 $f(\rho)$ の次数, $[a]$ は a 以上の整数のうち最小のものを表わす.

[補題 3] 条件

$$\begin{aligned} (Q, I_q \otimes A_\alpha)_q + \sum_{k=1}^{n_g} (R_k, I_q \otimes B_{k\alpha})_q \\ = F_\alpha(0) + \sum_{j=1}^{n_\xi} C_\alpha^{(j)} \xi_j, \quad \forall \alpha \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (15)$$

を満たす $Q \geq 0, R_k \geq 0, \xi$ が存在することは, 補題 2 が可解であるための必要十分条件である. ただし, A_α および

$B_{k\alpha}$ は, それぞれ次式を満足する行列である.

$$\begin{aligned} z_{[N]}(\rho) z_{[N]}(\rho)^T &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} A_\alpha \rho^\alpha, \\ g_k(\rho) z_{[N-w_k]}(\rho) z_{[N-w_k]}(\rho)^T &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} B_{k\alpha} \rho^\alpha \end{aligned}$$

(証明) 付録 F を参照.

PDLMI 問題のように, パラメータの領域を制限する場合でも, 一般には半正定値の多項式が SOS で表わされるとは限らない. ただし, Ω を有界閉集合の領域に選び, 単項式の次数 (たとえば N) を上げると, Ω において半正定値である多項式は, 行列値の SOS 多項式で漏らさず表わすことができるようになる¹³⁾. しかしながら, 単項式の次数を上げると, 一般に LMI の変数が増える. いま $z_{[N]}(\rho)$ の次元を n とする. このとき, $n = (n_\rho + N)! / (N! \cdot n_\rho!)$ であり, (15) 式の変数 Q の次元は nq と表わされる. このことから, LMI の変数が爆発的に増え, しばしば現実的に解けない状況に遭遇する. 実際には, 定式化の後に, (15) 式の LMI の可解性を変えずに変数を減らす手法を適用することができる¹⁷⁾. それでも, この種の計算量の増大を抑えることは難しい.

5. SOS 問題への定式化

補題 1 で得られた設計条件は, 以下に示す SOS 問題が可解であれば満足される.

[系 1] 与えられた $\gamma > 0$ と $\mathcal{D}(a, b, c, d)$ に対して,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T(\rho, \dot{\rho}) & * & * \\ 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & \gamma \cdot (\Delta^2)(\rho) \end{bmatrix} - \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} M_1(\rho) & B_{1ds} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_2(\rho) & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ = S_{10}(\rho) + \varepsilon I \end{aligned} \quad (16)$$

$$F_2(\rho) = S_{20}(\rho) + \varepsilon I + \sum_{i=1}^{n_\rho} g_i(\rho) S_{2i}(\rho) \quad (17)$$

を満たす実多項式行列 $X_s(\rho), Z_s(\rho)$, SOS 多項式行列 $S_{1i}(\rho), S_{2i}(\rho), S_{3i}(\rho)$ が存在すれば, コントローラ (4) 式のゲインを $K_s(\rho) = Z_s(\rho)^T X_s(\rho)^{-1}$ とした GS 制御系は設計仕様 (5), (7) 式を満たす. ただし, (16) 式において

$$\begin{aligned} T(\rho, \dot{\rho}) &= (E_{ds} \dot{X}_s E_{ds})(\rho, \dot{\rho}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n_\rho} g_i(\rho) S_{1i}(\rho) - \sum_{j=n_\rho+1}^{3n_\rho} g_j(\dot{\rho}) S_{1j}(\rho) \end{aligned}$$

と表わされ, ε は十分小さな正数とする.

(証明) 付録 G を参照.

系 1 は, up/down, up/up のどちらの姿勢モードの設計にも対応している. up/down モードの場合, パラメータの数は $n_\rho = 2$ であり, LPV モデルや Ω, Π は 3.1 節に従う. 一方, up/up モードの場合, $n_\rho = 1$ であり, LPV モデルや Ω, Π は 3.2 節に従う. また, 系 1 では, 定式化の段階で, 最終的に解かれる LMI の変数の数を減らすために以下の方策 (A)~(D) が施されている.

(A) up/up モードでは, パラメータの数を減らすようにモ

デル化されている．これにより，SOS 多項式を表わすための半正定値行列のサイズを大幅に減らしている．

(B) パラメータの変化率の範囲を表わす多項式 $g_j(\dot{\rho})$ は， $\dot{\rho}$ に関してアフィンである．一方， $\mathbf{X}_s(\rho)$ を多項式行列にとると，その微分 $\dot{\mathbf{X}}_s(\rho)$ は常に $\dot{\rho}$ に関してアフィンである．このとき， $\mathbf{S}_{10}, \mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{1j}$ を ρ についてのみの SOS 多項式行列にすれば十分である．文献 14) では， $\mathbf{X}_s(\rho)$ に相当する多項式行列の次数が 2 次の場合を扱っているが，次数によらず $\dot{\mathbf{X}}_s(\rho)$ は $\dot{\rho}$ に関してアフィンなので，より一般的に利用できる性質といえる．

(C) パラメータ ρ_i の範囲 $0 \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i$ が与えられたとき，二つの不等式条件 $\rho_i \geq 0, \bar{\rho}_i - \rho_i \geq 0$ を用いることが多い．それに対し，本論文ではこれらを一つの不等式条件 $\rho_i(\bar{\rho}_i - \rho_i) \geq 0$ にまとめ，その左辺を $g_i(\rho)$ として選んでいる．これにより，二つの不等式条件を用いたときと比べ，定義すべき SOS 多項式 $\mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{2i}$ の数を軽減できる．

同様に，パラメータの変化率 $\dot{\rho}_i$ の範囲 $|\dot{\rho}_i| \leq \delta_i$ が与えられたとき，二つの不等式条件を一つの不等式条件 $(\delta_i - \dot{\rho}_i)(\delta_i + \dot{\rho}_i) \geq 0$ にまとめ，その左辺を $g_j(\dot{\rho})$ として選ぶことも考えられる．しかし，この方策は (B) と同時に使用できない．また，6.3 節で示すように，(B) の方が変数を減らす効果が高いため，(B) を優先する．

(D) (16) 式において，パラメータとその変化率の範囲を表わす多項式 $g_i(\rho), g_j(\dot{\rho})$ と SOS 多項式行列 $\mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{1j}$ は，行列不等式条件の (1, 1) ブロックにしか入っていない．これにより，SOS 多項式行列のサイズを抑えている．

6. 設計結果

ここでは，アクロバットの二つの姿勢モードについて GS 制御系の設計を行なう．なお，系 1 の条件を計算するために，CPU: Intel Core i5 2.67GHz, RAM: 2GB を搭載する PC 上で，MATLAB Ver.7.10.0 (R2010a), YALMIP (R20100512)¹⁸⁾, SDPT3 Ver.4.0¹⁹⁾ を利用した．

6.1 up/down モード

重み関数 $W_s(s), W_t(s)$ の係数を $b_s = 1, b_{t0} = 0, b_{t1} = 0, b_{t2} = 0.1$ ，極配置領域を $q = -6, r = 8$ とした円領域 $\mathcal{D}(1, 0, -q, q^2 - r^2)$ ，微小な正数を $\varepsilon = 10^{-6}$ とする．また，パラメータ ρ とその変化率 $\dot{\rho}$ の変動の上界をそれぞれ $\bar{\rho}_1 = 1 - \cos \bar{\theta}_1$ ($\bar{\theta}_1 = 55^\circ$), $\bar{\rho}_2 = 1 - \cos \bar{\theta}_2$ ($\bar{\theta}_2 = 30^\circ$), $\delta_1 = 0.6, \delta_2 = 0.55$ と選んだ (6.1 節末の注意を参照)．このとき，選択した $\rho \in \Omega$ に対して， $\delta(\rho) \neq 0$ が成り立つ．さらに， $\mathbf{X}_s(\rho), \mathbf{Z}_s(\rho)$ を

$$[\mathbf{X}_s(\rho) \quad \mathbf{Z}_s(\rho)] = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} [\mathbf{X}_{s\alpha} \quad \mathbf{Z}_{s\alpha}]$$

とする．ただし， $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ および

$$\mathcal{F} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$$

である．このとき，(10), (11) 式の PDLMI は ρ に関してそれぞれ 6 次，5 次の最高次数をもつ．また，SOS 多項式行列 $\mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{1j}, \mathbf{S}_{2i}$ は ρ に関して 4 次までのものとする．たとえば，最低限必要な $\mathbf{S}_{10}$ の次数は 6 次である．ここでは，この次数を越えないように $\mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{1j}$ の次数を選んでいる． g_i, g_j の次数を考慮すれば， $\mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{1j}$ は 4 次まで選べるのがわかる．同様に，最低限必要な $\mathbf{S}_{20}$ の次数は 6 次であるので， $\mathbf{S}_{2i}$ は 4 次まで選ぶことができる．

以上の設定の下， $\gamma > 0$ を適当に与えて系 1 を解き，重み

Fig. 3 Pole placement and gain functions (up/down mode)

Fig. 4 Time response of up/down mode ($\theta_{1c} = 50^\circ$, $t_1 = 0$ [s], $t_2 = 5$ [s])

関数のゲイン線図と極配置を確認し、求める解かどうかを判定した. このようにして γ を最小化した結果, $\gamma = 0.880$ まで有効な解が得られた. このときの計算時間は, **yalmiptime**, **solvertime** あわせて約 224.5 s であった. 得られたゲイン線図と極配置の設計仕様, 非線形シミュレーションと実機実験の時間応答をそれぞれ **Figs. 3, 4** に示す. GS 制御系は仕様を満たすように設計されており, 限界姿勢付近の姿勢制御を実現できていることがわかる. なお, 非線形シミュレーションでは, θ_1 がオーバーシュートを生じているが, 実験ではその傾向は見られない. これは, モデルで考慮していなかったスリップリング (コードの巻き込みを防止するための端子) の静止摩擦およびクーロン摩擦の影響と考えられる.

性能の比較のため, 補題 1 に基づいて, 有限個の LMI に帰着させる手法⁷⁾ (従来法) で GS 制御系を設計した. その結果, $\gamma = 1.068$ までしか γ を最小化することができず, 保守的な設計であることがわかる. そのため, Fig. 4 の点線に示すように, 従来法は立ち上がりが遅い結果となった.

(注意) $\bar{\theta}_1$ の値は目標値 $\theta_1^{ref}(t)$ を 0 と θ_{1c} ($|\theta_{1c}| \leq \theta_{1max}^{ref} = 50$ deg) との間で

$$\theta_1^{ref}(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < t_1, t_2 \leq t) \\ \theta_{1c} & (t_1 \leq t < t_2) \end{cases}$$

のようにステップ状に変化させた場合, オーバーシュートが 10 % 以内であることを想定し, $\bar{\theta}_1 = 55$ deg と選んだ. また, $\bar{\theta}_2, \delta_1, \delta_2$ の値は, 試行錯誤により決定した. まず, 適当に与えた $\bar{\theta}_2, \delta_1, \delta_2$ に対して γ を最小化する GS コントローラを設計し, 最大目標値 $\theta_{1c} = 50$ deg に対する非線形シミュレーションを行なった. このとき, $\theta_i(t), \dot{\rho}_i(t)$ の変化が想定した上限値 $\bar{\theta}_i, \delta_i$ を越えていた場合, 対応する $\bar{\rho}_i, \delta_i$ を大きな値に設定し直して, 再設計した. また, $\theta_i(t), \dot{\rho}_i(t)$ の変化が上限値 $\bar{\rho}_i, \delta_i$ を大きく下回っている場合, 設計結果の保守性を軽減するため, 対応する $\bar{\theta}_i, \delta_i$ を小さな値に設定し直して, 再設計した. その結果, $\bar{\theta}_2 = 30$ deg, $\delta_1 = 0.6$, $\delta_2 = 0.55$ と設定した.

6.2 up/up モード

重み関数 $W_s(s), W_t(s)$ の係数を $b_s = 1, b_{t0} = 0, b_{t1} = 0, b_{t2} = 0.02$, 極配置領域を $q = -12, r = 10.5$ とした円領域 $\mathcal{D}(1, 0, -q, q^2 - r^2)$, 微小な正数を $\varepsilon = 10^{-6}$ とする. また, 目標値 $\phi_1^{ref}(t)$ を 0 と ϕ_{1c} ($|\phi_{1c}| \leq 40$ deg) との間で

$$\phi_1^{ref}(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < t_1, t_2 \leq t) \\ \phi_{1c} & (t_1 \leq t < t_2) \end{cases}$$

のようにステップ状に変化させる場合を想定し, up/down モードの場合と同様の手順でパラメータ ρ とその変化率 $\dot{\rho}$ の上界をそれぞれ $\bar{\rho} = \bar{\phi}_1^2$ ($\bar{\phi}_1 = 45$ deg), $\delta = 1.4$ と選んだ. さらに, $\mathbf{X}_s(\rho), \mathbf{Z}_s(\rho)$ を

$$[\mathbf{X}_s(\rho) \quad \mathbf{Z}_s(\rho)] = \sum_{k=0}^2 \rho^k [\mathbf{X}_{sk} \quad \mathbf{Z}_{sk}]$$

とする. このとき, (10), (11) 式の PDLMI は ρ に関してそれぞれ 5 次, 4 次の最高次数をもつ. また, SOS 多項式行列 $\mathbf{S}_{1i}, \mathbf{S}_{1j}, \mathbf{S}_{2i}$ は ρ に関してそれぞれ 4 次, 4 次, 2 次までのものとする.

この場合も $\gamma > 0$ を与え, 実行可能解が得られるかどうかを判定し, γ を最小化した結果, $\gamma = 1.13$ まで小さくすることができた. なお, このときの計算時間は, 約 11.5 s であった. 一方, 有限個の LMI に帰着させる手法⁷⁾ (従来法) ではどのような $\gamma > 0$ に対しても実行可能解が得られなかった.

SOS に基づく設計法におけるゲイン線図と極配置の設計仕様, 非線形シミュレーションと実機実験の時間応答をそれぞれ

Fig. 5 Pole placement and gain functions (up/up mode)

Fig. 6 Time response of up/up mode ($\phi_{1c} = 40$ [deg], $t_1 = 5$ [s], $t_2 = 20$ [s])

れ Figs. 5, 6 に示す. up/up モードという姿勢制御がきわめて困難な状況であっても, SOS に基づく手法では, 速やかに限界姿勢に近い目標値に追従させることができた.

6.3 変数の数と制御性能に関する考察

ここでは, SOS に基づく手法において, 5 章で説明した LMI の変数を減らす方策 (A)~(D) を評価する. 評価する変数の数は, SOS 条件 (16), (17) 式のそれぞれに相当する LMI 条件 (15) 式のうち半正定値行列 Q および R_k とする. 方策 (A)~(D) のすべての組み合わせによる変数の数を Table 3 に, 得られた γ の最小値を Table 4 にまとめる. 各表における 0, 1 はそれぞれ対応する方策を使わない場合, 使う場合を表わしている. たとえば, (A, B, C, D) = (0, 0, 0, 0) はすべての方策を使わない場合を表わしており, 変数は 61118 個である. なお, $B=0$ かつ $C=1$ のときは, $\dot{\rho}_i$ に関する二つの不等式条件の一つにまとめた $(\delta_i - \dot{\rho}_i)(\delta_i + \dot{\rho}_i) \geq 0$ の左辺を $g_j(\dot{\rho})$ として選ぶこととした. Table 3, 4 より以下の結果が得られる.

A = 1 とした場合: 単項式ベクトルの次元が小さくなるので, $S_{10}, S_{1i}, S_{1j}, S_{20}, S_{2i}$ の次元を小さくすることができる. その結果, B, C, D の設定は変えずに $A=0$ とした場合と比べて平均 90.5 % の変数を削減できる. また, $A=1$ とした up/up モードでは, すべての場合で実行可能解が得られる.

B = 1 とした場合: $S_{10}, S_{1i}, S_{1j}, S_{20}, S_{2i}$ を $\dot{\rho}$ に依存させる必要がないため, A, C, D の設定は変えずに $B=0$ とした場合と比べて平均 60.5 % の変数を削減できる. とくに, up/down モードにおいて解を得るためには $B=1$ とすることが必要であった. ただし, up/up モードのように $B=0$ でも可解である場合, $B=1$ とすることにより制御性能は悪化する傾向にある.

C = 1 とした場合: $g_i(\rho)$ ($B=0$ のときは $g_i(\rho)$ と $g_j(\dot{\rho})$) の数が減るので, A, B, D の設定は変えずに $C=0$ とした場合と比べて平均 16.7 % の変数を削減できる. このときの制御性能はほぼ変化しない傾向にある.

D = 1 とした場合: S_{1i}, S_{1j} を (1,1) ブロックだけに導入しているのでその次元を小さくすることができる. その結果, A, B, C の設定は変えずに $D=0$ とした場合と比べて平均 11.2 % の変数を削減できる. この場合も, 制御性能はほぼ変化しない傾向にある.

このように, (A), (B), (C), (D) の順に変数低減の効果がある. 最も効果の高い方策の組み合わせは, (A) を利用できない up/down モードでは, (A, B, C, D) = (0, 1, 1, 1) であり, (A, B, C, D) = (0, 0, 0, 0) と比べて 75.9 % の変数を削減できる. また, up/up モードでは, (A, B, C, D) = (1, 1, 1, 1) とすることで 97.4 % の変数を削減できる.

一般に, 変数を減らせば制御性能が悪化する可能性がある. しかし, (C), (D) は変数を減らしているにもかかわらず著しい性能悪化を回避できる. (B) は性能悪化を伴うため, 変数の軽減とどちらを優先すべきかを考慮する必要がある.

7. おわりに

本論文では, アクロボットの up/down, up/up モードにおいて, 不安定な非駆動リンクを限界姿勢に近い角度に追従させた. そのために, $\mathcal{H}_\infty$ 制御仕様と極配置仕様という複数の設計仕様を考慮し, SOS に基づく手法により状態フィードバック形式の GS コントローラを設計した. 計算量を抑えた SOS の簡易な定式化を試みた結果, 実用的な計算時間で GS 制御系を設計することができた. これは, 従来の有限個の LMI に帰着する手法と比べて保守性が低い結果となった. とくに up/up モードの設計では, パラメータの数を単一とする工夫を施した結果, 計算時間の大幅な短縮が達成できた. また, 実機実験により高い制御性能を確認できた.

謝辞 貴重なご意見をいただいた査読者の皆様に感謝いたします. また, 本研究の一部は科学研究費補助金 (課題番号 20760280) の助成を受けたことを記します.

参考文献

- 1) M.W. Spong: The Swing up Control Problem for Acrobot, *IEEE Control Systems Magazine*, **15**-1, 49/55 (1995)
- 2) 美多 勉: 非線形制御入門 — 劣駆動ロボットの技能制御論一, 昭晃堂 (2000)
- 3) S.A. Bortoff and M.W. Spong: Pseudolinearization of the Acrobot Using Spline Functions, *Proceedings of the 31st IEEE CDC*, 593/598 (1992)
- 4) N.A. Andersen, L. Skovgaard and O. Ravn: Control of an Under Actuated Unstable Nonlinear Object, *Proceedings of the 7th International Symposium on Experimental Robotics*, 481/490 (2000)
- 5) H. Kajiwar, P. Apkarian and P. Gahinet: LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum, *IEEE Control Systems Magazine*, **19**-1, 44/54 (1999)
- 6) 川田昌克: 伸張型 LMI に基づくアクロボットのゲインスケジューリング制御系設計, 第 36 回計測自動制御学会制御理論

Table 3 Number of variables in Q and R_k

A	B	C	D	n.o.v.	A	B	C	D	n.o.v.
0	0	0	0	61118	1	0	0	0	5325
0	1	0	0	25018	1	1	0	0	2613
0	0	1	0	52754	1	0	1	0	4515
0	0	0	1	55430	1	0	0	1	4605
0	1	1	0	19006	1	1	1	0	2103
0	0	1	1	49910	1	0	1	1	4155
0	1	0	1	19330	1	1	0	1	1893
0	1	1	1	14740	1	1	1	1	1563

Table 4 Minimized γ ('NaN': Not a Number)

(a) up/down mode					(b) up/up mode				
A	B	C	D	γ	A	B	C	D	γ
0	0	0	0	NaN	1	0	0	0	0.95
0	1	0	0	0.88	1	1	0	0	1.10
0	0	1	0	NaN	1	0	1	0	0.93
0	0	0	1	NaN	1	0	0	1	0.96
0	1	1	0	NaN	1	1	1	0	1.11
0	0	1	1	NaN	1	0	1	1	0.92
0	1	0	1	0.92	1	1	0	1	1.12
0	1	1	1	0.88	1	1	1	1	1.13

シンポジウム資料, 405/410 (2007)

- 7) W. Watanabe, K. Uchida and M. Fujita: A New LMI Approach to Analysis of Linear Systems with Scheduling Parameter — Reduction to Finite Number of LMI Conditions —, *Proceedings of the 35th IEEE CDC*, 1163/1165 (1996)
- 8) T. Azuma, R. Watanabe, K. Uchida and M. Fujita: A New LMI Approach to Analysis of Linear Systems Depending on Scheduling Parameter in Polynomial Forms, *Automatisierungstechnik*, **48**-4, 119/204 (2000)
- 9) 増淵, 示村: ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について, システム制御情報学会論文誌, **12**-7, 390/394 (1999)
- 10) Y. Ebihara and T. Hagiwara: A Dilated LMI Approach to Continuous-Time Gain-Scheduled Controller Synthesis with Parameter-Dependent Lyapunov Variables, *Trans. of the SICE*, **39**-8, 734/740 (2003)
- 11) P.A. Parrilo: Structured Semidefinite Programs and Semi-algebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization, *California Institute of Technology, Pasadena, CA*, May (2000)
- 12) M. Kojima: Sums of Squares Relaxations of Polynomial Semidefinite Programs, *Technical Report in Tokyo Institute of Technology*, B-397 (2003)
- 13) C.W. Scherer and C.W.J. Hol: Matrix Sum-of-Squares Relaxations for Robust Semi-Definite Programs, *Math. Program. Ser. B*, **107**-1-2, 189/211 (2006)
- 14) 青木, 高見, 大石: 2乗和多項式に基づくクレーンのゲインスケジューリング制御, 計測自動制御学会論文集, **45**-4, 208/214 (2009)
- 15) 杉江, 濱本: LMIによる2慣性共振系の制御, システム制御情報学会論文誌, **9**-5, 219/226 (1996)
- 16) M. Chilali and P. Gahinet: H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**-3, 358/367 (1996)
- 17) J. Löfberg: Pre- and Post-Processing Sum-of-Squares Programs in Practice, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **54**-5, 1007/1011 (2009)
- 18) J. Löfberg: YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conf.*, Available from <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>, Taipei, Taiwan (2004)
- 19) K.C. Toh, M.J. Todd, and R.H. Tutuncu: SDPT3 — A Matlab Software Package for Semidefinite Programming, *Optimization Methods and Software*, **11**, 545/581 (1999)

《付 録》

A. アクロボットの平衡姿勢と限界姿勢

up/down, up/up モードにおいて, 静止する可能性がある姿勢 (平衡姿勢) では, (1) 式あるいは (2) 式より

$$\theta_2 = -\theta_1 + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_5} \sin \theta_1\right) \quad (\text{A.1})$$

$$\phi_2 = -\left\{\phi_1 + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_5} \sin \phi_1\right)\right\} \quad (\text{A.2})$$

が成立する. したがって, $\alpha_4 > \alpha_5$ よりこのような θ_2, ϕ_2 が存在するための $|\theta_1|, |\phi_1|$ には最大値 (限界角度) $\theta_{1max}, \phi_{1max}$ が存在し, 以下のように与えられる.

$$\theta_{1max} = \phi_{1max} = \sin^{-1} \frac{\alpha_5}{\alpha_4} \doteq 59.27 \text{ [deg]}$$

この限界姿勢では, link 2 は水平に位置する. up/down, up/up モードにおける平衡姿勢の一例を Fig. A.1 に示す.

Fig. A.1 Equilibrium attitudes

Fig. A.2 Characteristics of up/up mode

B. up/up モードの静特性および動特性⁶⁾

ϕ_1 と ϕ_2 の静特性は (A.2) 式で表現でき, $|\phi_1| \leq \phi_{1max}$ において静特性曲線 (A.2) 式を描画すると Fig. A.2 (a) の実線となる. これより, 静特性曲線は $-55 \text{ [deg]} < \phi_1 < 55 \text{ [deg]}$ 程度の範囲において, 直線 $\phi_2 = -k\phi_1$ ($k = 2.2$) でよく近似できていることがわかる. また, 線形化モデルに対して設計された積分型コントローラ $u = K_0 x$ を用いた非線形シミュレーションの結果を Fig. A.2 (b) に示す. これより過渡特性も ϕ_2 は $-k\phi_1$ でよく近似できていることがわかる.

C. (8) 式の導出

up/down モードでは, $E_{P22}(\rho)$ の逆行列は,

$$E_{P22}(\rho)^{-1} = \Phi(\rho)/\delta(\rho) \quad \begin{cases} \delta(\rho) = \{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3(1 - \rho_2)\}\alpha_{2s} \\ \quad - \{\alpha_2 - \alpha_3(1 - \rho_2)\}^2 \\ \Phi(\rho) = \begin{bmatrix} \alpha_{2s} & -\alpha_2 + \alpha_3(1 - \rho_2) \\ * & \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3(1 - \rho_2) \end{bmatrix} \end{cases}$$

となる. このことを考慮すると, z_1 は

$$\begin{aligned} z_1 &= C_{t1}\theta + C_{t2}\dot{\theta} + C_{td2}\ddot{\theta} \\ &= C_{t1}\theta + C_{t2}\dot{\theta} \\ &\quad + C_{td2}E_{P22}(\rho)^{-1}(A_{P21}(\rho)\theta + A_{P22}\dot{\theta} + B_{P2}u) \end{aligned}$$

より (8) 式のように表現できることがわかる.

一方, up/up モードでは, $E_{P22}(\rho)$ の逆行列は,

$$E_{\mathcal{P}22}(\rho)^{-1} = \Phi(\rho)/\delta(\rho)$$

$$\begin{cases} \delta(\rho) = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3(1 - k^2\rho/2)\}\alpha_{2s} \\ \quad - \{\alpha_2 + \alpha_3(1 - k^2\rho/2)\}^2 \\ \Phi(\rho) = \begin{bmatrix} \alpha_{2s} & -\alpha_2 - \alpha_3(1 - k^2\rho/2) \\ * & \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3(1 - k^2\rho/2) \end{bmatrix} \end{cases}$$

となる。したがって、同様に、 z_1 は (8) 式で表現できる。

D. 補題 1 の証明

(11) 式の左辺の (2, 2) ブロックから、ただちに

$$X_s(\rho) > 0, \forall \rho \in \Omega$$

であることがわかる。リアプノフ関数の候補を $V(x, \rho) = x^T X_s(\rho)^{-1} x$ と選ぶ。(10) 式に Schur complement を適用して、適当な相似変換を施すことで、つぎの不等式を得る。

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\rho, \dot{\rho}) & B_{1ds} \\ B_{1ds}^T & -\gamma \end{bmatrix} < 0$$

ただし、

$$M_{11}(\rho, \dot{\rho}) = \text{He}\{M_1(\rho)\} - (E_{ds} \dot{X}_s E_{ds})(\rho, \dot{\rho}) \\ + M_2(\rho)^T (\Delta^2)(\rho)^{-1} M_2(\rho) / \gamma$$

である。この不等式の左右に $[x^T \ w^T]$ とその転置を掛け、(4), (6), (9) 式を使えば、 $\dot{V}(x, \rho) + z^T z / \gamma - \gamma w^2 < 0$ を得る。これは、設計仕様 (5) 式が満たされることを意味する。一方、(11) 式が成り立つとき、設計仕様 (7) 式を満たすことが文献 15), 16) と同様にして示すことができる。

E. (12) 式で用いた記法の定義

(12) 式における A_α は

$$z_{[N]}(\rho) z_{[N]}(\rho)^T = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} A_\alpha \rho^\alpha$$

を満足する行列である。また、(12) 式における $(\cdot, \cdot)_q$ は以下のように定義される。 M を $q \times q$ ブロックに分けた行列を $M_{(jk)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($j, k = 1, \dots, q$) としたとき、 $M \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$ に対して tr_q を次式のように定義する。

$$\text{tr}_q(M) := \begin{bmatrix} \text{tr } M_{(11)} & \cdots & \text{tr } M_{(1q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr } M_{(q1)} & \cdots & \text{tr } M_{(qq)} \end{bmatrix}$$

このとき、 $X, Y \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$ に対して、 $(X, Y)_q := \text{tr}_q(X^T Y)$ と定義する。

F. 補題 3 の証明

まず、 $g_k(\rho) S_k(\rho)$ は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} & g_k(\rho) (I_q \otimes z_{[N-w_k]}(\rho))^T R_k (I_q \otimes z_{[N-w_k]}(\rho)) \\ &= g_k(\rho) (R_k, I_q \otimes (z_{[N-w_k]}(\rho) z_{[N-w_k]}(\rho)^T))_q \\ &= (R_k, I_q \otimes (g_k(\rho) z_{[N-w_k]}(\rho) z_{[N-w_k]}(\rho)^T))_q \\ &= \left(R_k, I_q \otimes \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} B_{k\alpha} \rho^\alpha \right) \right)_q \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} (R_k, I_q \otimes B_{k\alpha})_q \rho^\alpha \end{aligned}$$

このとき、(14) 式は、

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \left(F_\alpha(0) + \sum_{j=1}^{n_x} C_\alpha^{(j)} x_j \right) \rho^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} (Q, I_q \otimes A_\alpha)_q \rho^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} (R_k, I_q \otimes B_{k\alpha})_q \rho^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} ((Q, I_q \otimes A_\alpha)_q + (R_k, I_q \otimes B_{k\alpha})_q) \rho^\alpha \end{aligned}$$

と表わすことができる。これが恒等的に成り立つためには、(15) 式が必要かつ十分である。

G. 系 1 の証明

(16) 式が成り立つとき、その左辺の多項式行列は、すべての $(\rho, \dot{\rho})$ について正定となる。Schur complement を適用して整理すれば、

$$\begin{aligned} & (E_{ds} \dot{X}_s E_{ds})(\rho, \dot{\rho}) - \text{He}\{M_1(\rho)\} \\ & - \begin{bmatrix} B_{1ds}^T \\ M_2(\rho) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma & * \\ 0 & \gamma(\Delta^2)(\rho) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{1ds}^T \\ M_2(\rho) \end{bmatrix} \\ & > \sum_{i=1}^{n_\rho} g_i(\rho) S_{1i}(\rho) + \sum_{j=n_\rho+1}^{3n_\rho} g_j(\dot{\rho}) S_{1j}(\rho) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。パラメータとその変化率の領域を $\Omega \times \Pi$ に限って考えれば、上の不等式の右辺を 0 とした不等式が成り立つ。その不等式に、Schur complement を再び適用すると、(10) 式を得る。一方、(17) 式を満たす $X_s(\rho)$, $F_s(\rho)$ は、(11) 式を満たす。補題 1 のすべての条件が満たされたので、設計仕様 (5), (7) 式を満たす。

[著 者 紹 介]

市 原 裕 之 (正会員)

2000 年明治大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士後期課程修了。同年同大学理工学部助手 (任期制)、2001 年茨城大学大学院理工学研究科 SVBL 研究員、2002 年九州工業大学情報工学部助手、2007 年同助教、2008 年同大学大学院情報工学研究院助教、2010 年明治大学理工学部専任講師となり、現在に至る。制御理論およびその応用に関する研究に従事。博士 (工学)。システム制御情報学会、日本機械学会、IEEE の会員。

川 田 昌 克 (正会員)

1997 年立命館大学大学院理工学研究科博士後期課程修了。同年同大学理工学部助手 (任期制)。98 年より舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科助手、同講師を経て、2006 年より同助教、2007 年より同准教授、2010 年より同教授となり、現在に至る。ロボスト制御とその応用に関する研究に従事。博士 (工学)。システム制御情報学会、電気学会、IEEE の会員。