荷重積分法に基づく白色光干渉信号の直接中心決定アルゴリズム

佐藤 世智*・栗原 徹*・安藤 繁*

Direct Localization Algorithm of White-light Interferogram Center Based on the Weighted Integral Method

Seichi SATO*, Toru KURIHARA* and Shigeru ANDO*

This paper proposes an exact direct method to determine all parameters including an envelope peak of the white-light interferogram. A novel mathematical technique, the weighted integral method (WIM), is applied that starts from the characteristic differential equation of the target signal, interferogram in this paper, to obtain the algebraic relation among the finite-interval weighted integrals (observations) of the signal and the waveform parameters (unknowns). We implemented this method using FFT and examined through various numerical simulations. The results show the method is able to localize the envelope peak very accurately even if it is not included in the observed interval. The performance comparisons reveal the superiority of the proposed algorithm over conventional algorithms in all terms of accuracy, efficiency, and estimation range.

Key Words: white-light interferometry, envelope, coherence tomography, weighted integral method, FFT

1. はじめに

白色光干渉計測は近年微細構造物の検査において、従来の単色光干渉計測の問題点を補完し得る技術として急速に普及している。この最も大きな理由は、白色光干渉においては単色光干渉では困難な絶対光路差決定能力が強化されることにあり、段差物体を含む広いダイナミックレンジでのナノメートルレベル三次元形状計測が実現されている。低コヒーレンス光のインターフェログラム（以下 IFG と略記）を構成する正弦搬送波の位相と局在した振幅の包絡線に含まれる情報を同時に活用することで、干渉の中心を決定し、光路差の絶対測定が可能になるわけである。

以下、IFG は単一の反射面から構成される場合または複数の反射面が十分離れているため個々の面の干渉波形に有意な重なりがない場合を考える。この問題へのアプローチにはいくつかの方針が存在する。1 つは、観察される IFG 波形のシフト量を周波数領域で求めるもの（フーリエ変換型）、1 つは包絡線のピークから推定しようとするもの（包絡線型）、1 つは位相巻き戻し後の絶対位相の零交差を求めようとするもの（位相型）である。初期のアルゴリズムは第 1 の方法がほとんどで、フーリエ変換により IFG の原点シフトが周波数線形な位相シフトに変換されることを利用する。第 2 の方法は当

初計算量を減らす目的で導入された。すなわち、瞬時振幅を非線形演算によって求め、2 次関数の当てはめによって包絡線のピーク位置を推定する¹⁾。この方法は推定にピーク前後数枚の位相ステップ画像しか必要とせず、フーリエ変換型に比較して大幅な処理速度の改善をもたらした。同様な動機から、Wavelet 変換を用いるもの²⁾、サンプリング定理に基づく方法^{3), 4)}なども開発されている。一方で、包絡線型の方法は光路差以外に導入される位相シフト（分散媒質、多層膜反射など）の影響を受けない特色を有する。適切な位相検出と組み合わせることで、このような位相シフトを新たな対象情報として検出できる方法とも見られる。第 3 の方法は、従来の高コヒーレンス光の干渉計測の利点を引き継ぎ、位相測定による高精度の実現を期待する。課題は振幅情報から 2π 整数倍の任意性を確実に除くことにある。Takeda らは観察される IFG が対称性を保つ条件で、色フィルタで上下 2 つに分割した測定光ごとに得られる IFG を逆フーリエ変換し、それらの位相交差点から中心を求める方法⁵⁾を提案した。

しかし、これらにはいくつかの問題が含まれる。包絡線型の方法では瞬時振幅推定の誤差とピーク近辺の補間誤差が無視できない。少数データの近似的な扱いに起因する誤差であり、アルゴリズムが十分な精度で機能するには、包絡線のピーク位置が明瞭に含まれる十分な密度でサンプルされたデータが必須である。フーリエ変換型でも、データ長の有限さによる弊害を低減するために窓関数の導入が必要であり、観測区間が包絡線のピークを含むことが必須となる。そうでなければ、アルゴリズムの都合で導入された窓関数のピークで干渉のピークが決定されてしまう。

* 東京大学大学院情報理工学系研究科 東京都文京区本郷 7-3-1

* Graduate School of Information Science and Technology,
The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo
(Received December 25, 2009)
(Revised August 4, 2010)

本論文では、近年考案された荷重積分法の方法論^{6)~11)}に基づき、必ずしも包絡線ピークを含まない有限区間のデータから IFG 波形の中心とパラメータを精度良く高速に推定する手法を提案する。荷重積分法とは、着目する波形をそれを一般解とする微分方程式でモデル化し、波形の荷重積分量間の厳密な代数方程式を解析的に導出し、これを解いて波形パラメータを決定する方法である。

2. 原 理

2.1 インターフェログラム

白色光干渉において対象光路と参照光路の光路差を走査しながら観測される光強度信号がインターフェログラム (IFG) である。一般に、単一表面に関する IFG は、光路差が零の位置からの参照ミラーのシフト量 z と計測対象面の高さ z_0 の関数として

$$I(z) = I_0 + A(z - z_0) \cos(\kappa(z - z_0) + \phi) \quad (1)$$

$$\kappa \equiv \frac{4\pi}{\lambda_0}$$

と表わされる。 λ_0 は光源の中心波長、 $A(z)$ は包絡線関数、 ϕ は光路長差以外の要因で生じる位相シフトであり、通常 $A(z/2) \cos(\kappa z/2)$ は光源スペクトルのフーリエ変換に一致する。対象の三次元形状計測は、 z を走査しながら画素ごとに $I(z)$ を求め、その分布形状から z_0 の値を求めることによって実現される。

多くの理論解析や応用では、包絡線関数 $A(z)$ は

$$A(z) = C \exp \left[-\frac{z^2}{2\sigma^2} \right] \quad (2)$$

のようにガウス関数でモデル化される^{2), 12)}。熱運動による原子スペクトルのゆらぎがガウス分布になることから、多くの低干渉性光源で厳密な理論モデルに一致する。本論文でもこのモデルに従って議論を進める。さらに、次節以降で表記を簡略化し見通しをよくするため、IFG 波形として (2) 式を (1) 式に代入し、解析信号表現とした

$$\tilde{I}(z) = C e^{j\phi} \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right] \quad (3)$$

を用いる。同様の理由から包絡線の広がりとして可干渉距離 l_c の代わりに $2\sqrt{2}\sigma$ を用いて議論する。なお、 l_c は σ を用いて

$$l_c = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \quad (4)$$

と表わされる (付録 A 参照)。また、本論文において IFG 波形の干渉中心は包絡線のピーク位置 z_0 によって定義する。

2.2 インターフェログラムの満たす微分方程式

(3) 式の両辺を z で微分すると、

$$\tilde{I}'(z) = C e^{j\phi} \frac{d}{dz} \left(-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right) \times \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right]$$

$$= \frac{d}{dz} \left(-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right) \cdot \tilde{I}(z)$$

よって $\tilde{I}(z)$ は以下の微分方程式を満たす。

$$\tilde{I}'(z) - \frac{d}{dz} \left(-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right) \cdot \tilde{I}(z) = 0 \quad (5)$$

' は導関数を示している。つぎに (5) 式の一般解を求めると、これは D を任意の複素定数として

$$\tilde{I}(z) = D \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right]$$

であることが容易に示される。よって、(5) 式は (3) 式の関数形を有し、その振幅と位相のみに自由度を有する波形が満たす微分方程式である。このとき、解くべき問題とは、有限区間 $[-L/2, L/2]$ で与えられた波形に基づき、上記のモデルに従う関数のパラメータ κ, σ, z_0, D 、あるいはその一部を決定することである。

2.3 荷重積分法の適用

観測区間 $[-L/2, L/2]$ の微分方程式拘束条件 (5) は、以下のように同値な積分形式に変換される。すなわち、

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \tilde{I}'(z) - \frac{d}{dz} \left(-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right) \cdot \tilde{I}(z) \right\} \times w(z) dz = 0 \quad (6)$$

が任意の荷重関数 $w(z)$ に関して成り立つならば、これを満たす $\tilde{I}(z)$ は微分方程式拘束条件を満たした所望の関数となる。ここで、荷重関数として $w_n(z) = p(z)e^{-jk_n z}$ 、 $k_n = 2n\pi/L$ 、 $p(\pm L/2) = 0$ を導入する。 n は整数、 $p(z)$ は積分境界で荷重関数を零とするための、いわば窓関数である。上式において部分積分法を適用すると

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \tilde{I}'(z) - \frac{d}{dz} \left(-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right) \cdot \tilde{I}(z) \right\} \times p(z)e^{-jk_n z} dz \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \tilde{I}'(z) + \frac{z}{\sigma^2} \tilde{I}(z) - \left(\frac{z_0}{\sigma^2} + j\kappa \right) \tilde{I}(z) \right\} \times p(z)e^{-jk_n z} dz \\ &= - \int_{-L/2}^{L/2} \tilde{I}(z) (p'(z) - jk_n p(z)) e^{-jk_n z} dz \\ & \quad + \frac{1}{\sigma^2} \int_{-L/2}^{L/2} z \tilde{I}(z) p(z) e^{-jk_n z} dz \\ & \quad - \left(\frac{z_0}{\sigma^2} + j\kappa \right) \int_{-L/2}^{L/2} \tilde{I}(z) p(z) e^{-jk_n z} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。表記の簡単化のため、各荷重積分量について

$$g_n^{(i)} \equiv \int_{-L/2}^{L/2} z^i \tilde{I}(z) p(z) e^{-jk_n z} dz \quad (7)$$

$$h_n^{(i)} \equiv \int_{-L/2}^{L/2} z^i \tilde{I}'(z) p'(z) e^{-jk_n z} dz \quad (8)$$

$$g_n \equiv g_n^{(0)}, \quad h_n \equiv h_n^{(0)}$$

と置くと、あらゆる n に関して荷重積分量間に成り立つ関係式

$$-h_n + jk_n g_n + \frac{1}{\sigma^2} g_n^{(1)} - \left(\frac{z_0}{\sigma^2} + j\kappa \right) g_n = 0 \quad (9)$$

を得る。この方程式は複素で実数相当で 2 本の方程式にあたる。これに対して未知数は z_0, κ, σ の実数 3 個である。よって未知数すべてを異なる 2 個の n の連立で、1 個が既知ならば、残りの 2 個の未知数は 1 個の n で解くことができる。

具体的に、スペクトル幅の標準偏差 σ を既知とすると、

$$z_0 = \frac{g_n^{(1)} - \sigma^2 h_n}{g_n} + j(k_n - \kappa)\sigma^2 \quad (10)$$

より、右辺第 2 項が純虚数に注意すると、シフト量 z_0 と波数 $\kappa = 4\pi/\lambda_0$ は

$$z_0 = \Re \left\{ \frac{g_n^{(1)} - \sigma^2 h_n}{g_n} \right\} \quad (11)$$

$$\kappa = k_n + \Im \left\{ \frac{g_n^{(1)} - \sigma^2 h_n}{\sigma^2 g_n} \right\} \quad (12)$$

のように解かれる。 $\Re\{\cdot\}, \Im\{\cdot\}$ は複素数の実部と虚部を示す。 $|g_n|$ は零であってはならない。この条件は、 $|g_n|$ の分布 (IFG 波形の Hann 窓付 FFT スペクトル) の最大値を与える n で上式を適用することで常に満たされる。

なお、単一の n を用いる上式によるパラメータの導出では、波形拘束条件の微分形式 (5) と積分形式 (6) の同値性が失われているが、実用上の観点からは n は信号エネルギーを有意に取り込む個数を連立すれば十分である。このときの n の選択方法および信号エネルギーとの関係については 2.6 節に示した。また、ノイズ存在化では必ずしも (9) 式の右辺は零とならないが、複数の n を連立し最小二乗法で解くことにより、この問題も軽減することが可能である。 K 個の異なる n を連立した最小二乗法による推定式は、用いる n を $n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$ ($K = n_2 - n_1 + 1$) として

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |g_n(z_0 + j\sigma^2 \kappa) - g_n^{(1)} + \sigma^2 h_n - j\sigma^2 k_n g_n|^2 \rightarrow \min \quad (13)$$

を $z_0 + j\sigma^2 \kappa$ に関して解くことにより、

$$z_0 = \Re \left\{ \frac{\sum g_n^* g_n^{(1)} - \sigma^2 \sum g_n^* h_n}{\sum |g_n|^2} \right\} \quad (14)$$

$$\kappa = \Im \left\{ \frac{\sum g_n^* g_n^{(1)} - \sigma^2 \sum g_n^* h_n + j\sigma^2 \sum k_n |g_n|^2}{\sigma^2 \sum |g_n|^2} \right\} \quad (15)$$

のように求められる。ただし $\sum \equiv \sum_{n=n_1}^{n_2}$ と略記した。

本手法の特徴は、ガウス包絡スペクトル光源における有限観測区間に対して数学的に厳密という点にある。この結果、多くの熱運動由来の低コヒーレンス光源に対して近似に由来する検出精度の上限がなく、測定系の SN 比の改善に応じた高精度が実現可能となる。また、IFG の任意有限区間観測について厳密ということから、観測区間がごく短い場合や包絡

線ピークを含まない場合においても適用可能である。これらについては、3 章で数値実験による確認を行なう。

2.4 最小二乗振幅・位相推定

上述のように、荷重積分法は IFG の包絡線パラメータ z_0, σ と搬送波周波数 κ を決定する。しかし、その原理上、IFG 波形の定数倍の自由度に相当する振幅 C と位相 ϕ は関知しない。そこで、これらのパラメータは、荷重積分法による推定に引き続く最小二乗波形フィッティングによって推定する。すなわち、推定値を $\hat{C}e^{j\hat{\phi}} \equiv \hat{x} + j\hat{y}$ とし、

$$\alpha(z) = \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma^2} + j\kappa(z - z_0) \right] \quad (16)$$

とすると、評価関数は

$$\begin{aligned} J &= \int_{-L/2}^{L/2} |\tilde{I}(z) - (\hat{x} + j\hat{y})\alpha(z)|^2 dz \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(|\tilde{I}(z)|^2 - 2\hat{x}\Re\{\tilde{I}(z)\alpha^*(z)\} \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{y}\Im\{\tilde{I}^*(z)\alpha(z)\} + (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)|\alpha(z)|^2 \right) dz \end{aligned}$$

最小化条件は

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(-2\Re\{\tilde{I}(z)\alpha^*(z)\} + 2\hat{x}|\alpha(z)|^2 \right) dz = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{y}} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(-2\Im\{\tilde{I}^*(z)\alpha(z)\} + 2\hat{y}|\alpha(z)|^2 \right) dz = 0$$

であるから、 $\hat{x}$ と $\hat{y}$ の最小二乗推定値は

$$\hat{x} = \Re \left\{ \frac{\int_{-L/2}^{L/2} \tilde{I}(z)\alpha^*(z) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} |\alpha(z)|^2 dz} \right\} \quad (17)$$

$$\hat{y} = \Im \left\{ \frac{\int_{-L/2}^{L/2} \tilde{I}^*(z)\alpha(z) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} |\alpha(z)|^2 dz} \right\} \quad (18)$$

と求まる。また、これより波形の振幅 C と位相 ϕ は

$$\hat{C} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}, \quad \hat{\phi} = \arctan \left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}} \right) \quad (19)$$

と推定される。

以上により、波形のパラメータをすべて別個に推定することも、一部を既知として他を推定することも可能になった。測定系の構成や条件に応じてこれらを組み合わせることにより、柔軟にアルゴリズムを構成できる。たとえば、包絡線ピーク位置 z_0 から推定される干渉中心と、位相差零から求められる干渉中心とを荷重平均することによって、位置の検出精度を向上させるなどである。これについても実験の章において有効性の確認実験を行なう。

2.5 提案法の特徴とフーリエ変換

(7), (8) 式より、荷重積分法で用いる荷重積分量は窓関数に乗じた IFG のフーリエ係数 (観測区間を 1 周期とする周期化信号のフーリエ係数) であり、提案法は周波数成分に基づく信号パラメータ推定法と捉えられる。このことから以下のような特徴が生じる。1 つは、荷重関数系列 $\{e^{jk_n z}\}$ が正規直交基底をなすことから、異なる n に関しては常に線形従

属でない方程式が立つことである．よって，異なる n の方程式は常に推定にとっての新たな情報源となる．これは，単一の IFG に関しては連立最小二乗法による推定精度の改善，あるいは混合した複数の IFG の分離や個別のパラメータ推定などにつながる特徴である．もう 1 つは，IFG は狭帯域波形であり，周波数軸上で局在することに関連する．すなわち，ごく少数のフーリエ係数で信号エネルギーの大半が捉えられ，少数の n を用いるだけで有効性の高い推定が可能になる．また，フーリエ変換の後に正の周波数成分を用いるだけで解析信号化の処理が自然に導入される．ただし，包絡線スペクトルの広がりに対して搬送正弦波の周波数が十分高くない場合には，正の周波数成分が負の周波数成分の染み出しの影響を受け，精度の劣化が発生する．これに関しては後の節で詳しく述べる．

2.6 アルゴリズムの実際と n の選択法

以上の議論を踏まえた上で，窓関数に Hann 窓を仮定した場合に，3 種の荷重積分量が IFG 波形のフーリエ変換からどのように計算されるかを示す．Fig. 1 は， $g_n, h_n, g_n^{(1)}$ に対応する荷重関数の実部である（観測幅 $L = 2.4\mu\text{m}$ ）．振幅を規格化するためそれぞれ $1, L/\pi, 1/L$ 倍にスケールされている．Hann 窓 $p(z) = (1 + \cos(2\pi z/L))/2$ を代入すると， $g_n^{(1)}$ における荷重 z を除いた 2 種の荷重関数は

$$\begin{aligned} p(z)e^{-jk_n z} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi z}{L}\right) e^{-jk_n z} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{jk_1 z} + e^{-jk_1 z}}{4}\right) e^{-jk_n z} \\ &= \frac{e^{-jk_{n-1} z}}{4} + \frac{e^{-jk_n z}}{2} + \frac{e^{-jk_{n+1} z}}{4} \\ p'(z)e^{-jk_n z} &= -\frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) e^{-jk_n z} \\ &= -\frac{k_1}{2} \frac{e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z}}{2j} e^{-jk_n z} \\ &= \frac{jk_1}{4} (e^{-jk_{n-1} z} - e^{-jk_{n+1} z}) \end{aligned}$$

のように $\{e^{jk_n z}\}$ の和に展開される．よって，推定に必要なのは g_n については $\tilde{I}(z)$ の $n-1, n, n+1$ のフーリエ係数， h_n については同じく $n-1, n+1$ のフーリエ係数， $g_n^{(1)}$ については 1 次モーメント型の荷重を乗じた $z\tilde{I}(z)$ の $n-1, n, n+1$ のフーリエ係数のみとなる．

Fig. 2(a), (b) は g_n, h_n を得るために各フーリエ係数に乘じられる荷重の分布を，Fig. 2(c) は $\tilde{I}(z)$ のフーリエ係数から $g_n^{(1)}$ を求める際の周波数軸上の荷重の分布を示す．

以上のことから，推定精度を高めるために，これらの隣接する 3 周波数成分が IFG の信号エネルギーを最も多く含むように，すなわち，中心周波数 n が IFG のスペクトルのピークに最も近くなるように選ぶべきこと，また，有意なスペクトル幅が 3 より大きい場合（よりコヒーレンスの低い光源の場合）には，この範囲内で得られる方程式に関して連立最小二乗解法を用いることで，なるべく多くの信号エネルギーを推定に取り込むべきことがわかる．

Fig. 1 Weighting functions of g_8, h_8 , and $g_8^{(1)}$. The real-parts of three weighing functions are plotted in case of $L = 2.4\mu\text{m}$ and when the Hann window is used as the window function. Maximal amplitude of each function is normalized to be 1.

なお，有限区間の連続フーリエ変換を標本データの FFT で計算する場合には，離散近似による誤差が発生する．この誤差低減法は文献 8) に詳しく述べられている．以下の実験では，この中の中点法による誤差低減法を採用している．

Fig. 2 Weighting functions in the frequency domain. Hann window is assumed as the window function. The weighting functions of g_n and h_n have only three and two frequency components around the carrier frequency k_n . Contrarily, the weighting function of $g_n^{(1)}$ consists of rich frequency components introduced by an additional weight z .

3. アルゴリズムの数値的評価

3.1 実験条件

計算機上で生成した IFG に対して，本論文で提案した荷重積分法による包絡線ピーク推定のシミュレーションを行なっ

た．同時に，Larkin らの包絡線推定法¹⁾に最小二乗フィッティングを組み合わせた方法（以下 Larkin-LS 法）と Takeda らの位相交差法⁵⁾を用いたピーク推定も行ない，3つの方法の推定精度の比較を行なった．なお，シミュレーションで用いた IFG のパラメータは中心波長 $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ ，位相 $\phi = 0$ ，包絡線の広がり $2\sqrt{2}\sigma = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$ ，標本化間隔 $\lambda_0/8$ であり，観測雑音としてすべての標本に振幅比で 1% の白色ガウス雑音を加えている．荷重積分法に関しては，窓関数 $p(z)$ は Hann 窓とし， n は $\kappa = 4\pi/\lambda_0$ に近い k_n から順に K 本を用い推定式 (14) を使用した．

Fig. 3 Interferogram with a shift ($z_0 = 1.0 \mu\text{m}$). The IFG waveform ($\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, $2\sqrt{2}\sigma = 10.0 \mu\text{m}$, $z_0 = 1.0 \mu\text{m}$) with respect to the observation width.

3.2 観測区間と包絡線ピークの位置関係と推定精度

Fig. 3 に実験条件を示す．参照ミラーの走査幅（観測幅）の中心を原点とし，これに対する IFG 波形の原点シフト量を z_0 とする．実験は，包絡線広がり $10.0 \mu\text{m}$ に対して十分短い観測幅 $L = 4.8 \mu\text{m}$ と，十分長い観測幅 $L = 19.2 \mu\text{m}$ について行なった．**Fig. 4** に示す (a), (b) のグラフは，3 種類のアルゴリズムによる包絡線ピーク推定結果を比較したものである．十分長い観測幅での推定結果 (a) では，すべての推定手法で $z_0 = 10 \mu\text{m}$ 程度まで波長以下の精度が保たれている． $L/2 = 9.6 \mu\text{m}$ であるから， $z_0 = 10 \mu\text{m}$ は観測幅内に包絡線ピークが含まれる限界に相当している．ただしこの範囲での平均誤差を比較すると，荷重積分法と Larkin-LS 法の誤差平均が 1 nm 以下に抑えられているのに対し，位相交差法は 10 nm 程度と大きい．

観測幅を短く設定した (b) においては，グラフの横軸が $2.4 \mu\text{m}$ を超えた以降は，観測区間中に包絡線ピークが含まれていない状態となっている．まず包絡線ピークが観測区間に含まれる限界の $z_0 = 2.4 \mu\text{m}$ での推定結果を平均誤差（推定の偏り）に着目して比較すると，荷重積分法と Larkin-LS 法がともに 0.1 nm 以下であるのに対し，位相交差法は -17.5 nm と大きく，グラフにおいても位相交差法は推定の偏りが大きく増加する傾向が見られる．このことから包絡線ピーク位置が観測区間に含まれる場合には，荷重積分法と Larkin-LS 法が

(a) $L = 19.2 \mu\text{m}$ (512 samples)

(b) $L = 4.8 \mu\text{m}$ (128 samples)

Fig. 4 Comparison of envelope peak estimation results. The range of observation is $[-L/2, L/2]$. The real envelope peak position is scanned from $0 \mu\text{m}$ to $12.0 \mu\text{m}$. Evaluated algorithms are WIM (Weighted integral method), Phase-crossing and least square fitting after Larkin's envelope estimation.

偏りの少なさの意味で優れていることがわかる．一方，包絡線ピークが観測区間に含まれない場合として $z_0 = 5.0 \mu\text{m}$ での推定結果を推定誤差標準偏差に着目して比較すると，**Table 1** に示すように荷重積分法のみが波長の $1/10$ 以下の精度で推定できることがわかる．

Table 1 Comparison of the residual standard deviations for the observation width $L = 4.8 \mu\text{m}$

	$z_0 = 2.4 \mu\text{m}$	$z_0 = 5.0 \mu\text{m}$
proposed method ($K = 3$)	11.2nm	24.3nm
phase-crossing method	22.1nm	112nm
Larkin-LS method	24.1nm	148nm

このように，包絡線ピークが観測領域に含まれるかどうかにかかわらず，高い精度でピーク位置を推定できるのは，荷重積分法が積分区間によらない厳密法であることの帰結と考えられる．

3.3 偶然誤差と系統誤差および推定の有効性

一般に，推定誤差には偶然誤差と系統誤差の 2 つが存在す

る。偶然誤差は信号に含まれるノイズが要因となって生じる誤差であり、系統誤差はモデル不整合や推定方法の含む近似などによって生じる誤差である。一般にデータの SN 比が低い場合は前者によって推定誤差が支配され、SN 比が高い場合は後者によって支配され、推定性能の原理的上限が顕在化する。このことから、推定法の性能は、推定値の含む偶然誤差成分の大きさによって有効性（データの含む情報の活用度あるいはデータの含む雑音に対する耐性）が、高 SN 比において顕在化した系統誤差成分の大きさによって推定法自体の原理的上限が評価される。

提案法と前節で示した比較法の誤差の振る舞いを調べた結果を **Fig. 5** に示す。グラフは横軸に観測データの SN 比を、縦軸に各推定方法の推定誤差標準偏差（試行回数 1000 回）を波長を単位にプロットしたものである。どの推定手法も SN 比が $10^1 \sim 10^2$ の範囲では推定誤差は SN 比のほぼ 1 次比例して減少しており、低 SN 比の範囲では全方法とも偶然誤差によって推定誤差が決定されている。ただし、Larkin-LS 法は荷重積分法や位相交差法と比べてノイズの影響が 1 桁ほど大きい。これに対し、SN 比を高くした場合に 3 つのアルゴリズムを比較すると、推定誤差の改善が飽和するレベルは位相交差法が最も早く、荷重積分法と Larkin-LS 法は波長の 10^{-4} 以下まで推定誤差が減り続けている。また、荷重積分法は連立する n の数 K を増やすことで推定誤差の下限が減少することがわかる。したがって、これら 2 つの誤差の比較から、荷重積分法が推定の有効性と系統誤差による上限のない推定精度の向上の両面で他の手法と比較して優れていることがわかる。

Fig. 5 Signal to noise ratio vs. estimation error (RSD : residual standard deviation). The observation width $L = 4.8\mu\text{m}$ and the envelope peak position $z_0 = 2.4\mu\text{m}$.

実数の IFG に関する荷重積分法の系統誤差は観測区間を広げることで小さくなる。これは、負の周波数成分の影響が低減されるからである。IFG が複素の解析信号として観測できれば、負の周波数成分は常に零であり、このような染み出しは存在しないが、有限区間の実信号として観測する場合には、観測窓のフーリエ変換である sinc 関数が畳み込まれる影響で染

み出しが大きくなる。**Fig. 6** は観測幅 L を $4.8, 19.2, 76.8\mu\text{m}$ とした場合に荷重積分法による推定誤差と SN 比の関係をプロットしたものである。観測区間を十分広くとった場合には、SN 比が倍精度の有効桁数となる 10^{16} 近くまで推定誤差が減り続けていることが確かめられる。

Fig. 6 Estimation error vs. signal-to-noise ratio. Increase of the observation width, $L = 4.8, 19.2, 76.8\mu\text{m}$, decreases the estimation error continuously because it weakens the leakage of negative frequency components. The result for $L = 76.8\mu\text{m}$ shows that the estimation error reaches the accuracy limit of the double precision.

3.4 包絡線ピークと位相の同時推定

荷重積分法を含む包絡線型のアルゴリズムでは、IFG 波形の広がりが大きくなり包絡線がなだらかになるとピーク位置の検出精度が低下する。一方、このような条件では IFG 波形の位相の検出精度は向上する。序論で述べたように、IFG 波形の位相情報の活用法には 2 種類ある。すなわち、光路差以外の要因での位相変化の検出と、これがない条件での位相零に基づく干渉中心の高精度検出である。ただし、後者においてもピークの決定が不確かになり 2π 整数倍の不定性が増してくると、干渉中心の決定力は損なわれる。このように包絡線ピークの推定と位相の推定は不可分な関係にある。

Fig. 7 は IFG 波形の広がり z_0 の推定誤差の関係を示している。荷重積分法による包絡線ピークの検出結果は、広がりの増加とともにばらつきが増す傾向を示している。これに対して位相決定を介するという意味で位相型アルゴリズムと性質を共有する位相交差法では、IFG 波形の広がりが小さい場合には推定の偏りが大きい、広がりの増加とともに偏りが減少し、 $15\mu\text{m}$ における平均誤差、標準偏差と比較すると、**Table 2** の上 2 行に示すように 2 つの推定手法は実用的な精度においてほとんど差が見られなくなる。他方、2.4 節で述べたように、荷重積分法は後処理によって波形の原点位相 ϕ を最小二乗推定できるため、本来 $\phi = 0$ であることが既知ならば、推定された原点位相から逆算して干渉中心位置を決定することができる。このような位相情報を組み合わせた干

渉中心の推定は、Fig. 7 および Table 2 の最下行に示すように IFG 波形の広がりによらず高い精度を有している。本来 $\phi \neq 0$ である場合の ϕ の決定精度についても同じである。このことから、荷重積分法により、包絡線ピークの推定と位相の推定が一体的に実現可能になることがわかる。

Fig. 7 Comparison of estimation error of the envelope-based method and the phase-based method under varying IFG extent $2\sqrt{2}\sigma$ (observation width $L = 4.8\mu\text{m}$, number of samples $N = 128$, true center position $z_0 = 2.4\mu\text{m}$, and phase shift $\phi = 0$). WIM: envelope peak estimate with the weighted integral method, Phase-zero-cross (WIM): phase zero estimate with $\hat{\phi}$ obtained by Eq. 19, Phase-crossing: center estimate with the phase-crossing method.

Table 2 Comparison of estimation error of various envelope-based and phase-based methods ($2\sigma = 15\mu\text{m}$)

	mean (bias)	RMS
WIM envelope only ($K = 3$)	0.1nm	21.3nm
phase-crossing method	-3.9nm	25.8nm
WIM envelope + phase ($K = 3$)	-0.1nm	0.1nm

4. 結 論

本論文では白色光干渉において IFG の包絡線ピーク位置を観測値の荷重積分から直接的に推定する荷重積分法を提案した。すなわち、IFG が任意点で満たす微分方程式から出発し、これを積分して得られる代数方程式を解くことにより、厳密かつ効率的に包絡線のピーク位置とパラメータを推定する方法を導いた。この方法は、従来手法と異なりアルゴリズムの適用可能な観測区間が任意であり、包絡線ピークを含まないような観測区間からでも精度の高い推定を得ることができる。各種のシミュレーションによって、本手法が推定精度の面で既存のアルゴリズムよりも優れていること、および従来手法よりも短い観測区間から包絡線ピーク位置が推定可能であることを確認した。

参 考 文 献

- 1) K.G. Larkin: Efficient nonlinear algorithm for envelope detection in white light interferometry, *J. Opt. Soc. Am. A*,

13, 832/843 (1996)

- 2) R.-J. Recknagel and G. Notni: Analysis of white light interferogram using wavelet methods, *Opt. Commun.*, **148**, 122/128 (1998)
- 3) K.G. Larkin: Three-dimensional imaging by sub-Nyquist sampling of white-light interferograms, *Opt. Lett.*, **18**, 1462/1664 (1993)
- 4) A. Hirabayashi, H. Ogawa and K. Kitagawa: Fast surface profiler by white-light interferometry by use of a new algorithm based on sampling theory, *Appl. Opt.*, **41**, 4876/4883 (2002)
- 5) M.E. Pawlowski, Y. Sakano, Y. Miyamoto and M. Takeda: Phase-crossing algorithm for white-light fringes analysis, *Opt. Commun.*, **260**, 68/72 (2006)
- 6) 魏, P. Masurel, 栗原, 安藤: 複素正弦波変調撮像に基づくオプティカルフロー推定, 電子情報通信学会論文誌, **J90-D**, 2009/2018 (2007)
- 7) 安藤, 魏, P. Masurel: 複素正弦波変調撮像によるオプティカルフロー検出理論および時間相関イメージセンサによる実現, 情報処理学会 CVIM 論文誌, **49**, 13/21 (2008)
- 8) S. Ando and T. Nara: An exact direct method of sinusoidal parameter estimation derived from finite Fourier integral of differential equation, *IEEE Trans. Signal Processing*, **57**, 3317/3329 (2009)
- 9) 小山, 栗原, 安藤: 波動場の小領域観測による瞬時波源定位の理論と実験的検証, 電気学会論文誌, **129-E**, 350/356 (2009)
- 10) S. Sato and S. Ando: Weighted integral method in white-light interferometry, *Proc. SPIE*, **7389**, 73892V (2009)
- 11) T. Nara and S. Ando: Direct localization of poles of meromorphic function from measurements on incomplete boundary, *Inverse Problems*, **26**, ID:015011 (2010)
- 12) M. Sato, I. Wakaki, Y. Watanabe and N. Tanno: Fundamental characteristics of a synthesized light source for optical coherence tomography, *Appl. Opt.*, **44**, 2471/2481 (2005)

《付 録》

A. 可干渉距離 l_c と σ の関係

干渉波形の可干渉距離 l_c は包絡線関数 $A(z/2)$ の半値幅で与えられる。今、包絡線関数 $A(z)$ は

$$A(z) = \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{A.1})$$

であるから

$$A(l_c/2) = \exp\left[-\frac{l_c^2}{8\sigma^2}\right] = \frac{1}{2} \quad (\text{A.2})$$

よって第2式と第3式の自然対数を取り

$$\frac{l_c^2}{8\sigma^2} = -\ln \frac{1}{2} \rightarrow l_c = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \quad (\text{A.3})$$

が導かれる。

[著 者 紹 介]

佐 藤 世 智

2005年東京大学工学部精密工学科卒業。2007年同大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻修士課程修了。2010年同博士課程修了。博士(情報理工学)。画像センシング, 信号処理, 光応用計測などの研究に興味をもつ。応用物理学会, SPIE 会員。

栗原 徹 (正会員)

2000 年東京大学工学部計数工学科卒業。2002 年同大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻修士課程修了。2005 年同博士課程修了。博士 (情報理工学)。同年東京大学大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻助手。画像センシング, 信号処理, 光・音響計測などの教育と研究に興味をもつ。電気学会, 応用物理学会会員。

安藤 繁 (正会員・フェロー)

1974 年東京大学工学部計数工学科卒業。76 年同大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了。79 年同博士課程修了。工学博士。同年東京大学工学部計数工学科助手, 80 年同講師。84 年電気通信大学電気通信学部電子情報学科助教授。87 年東京大学工学部計数工学科助教授, 96 年同大学院工学系研究科計数工学専攻教授。2001 年より同大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻教授, 現在に至る。計測自動制御学会学術奨励賞 (1977 年度), 同論文賞 (1979, 87, 94, 97 年度), 同著述賞 (2001 年度) など受賞。センサ, 画像処理, 信号処理, 光・音響計測, 計測基礎論, 電子回路などの教育と研究に従事。電気学会上級会員, 日本音響学会, 応用物理学会, 応用数理学会, IEEE, OSA, ASA などの会員。

=====