遷移関係に基づくハイブリッドシステムの近似双模倣

崔 舜星*・平 石 邦彦*・小 林 孝一*

Approximate Bisimulation for Hybrid Systems Based on Transition Relations

Sunseong CHOE*, Kunihiko HIRAISHI* and Koichi KOBAYASHI*

It is known that computation of bisimulation for hybrid systems does not always terminate. In this paper, we propose a new notion of approximate bisimulations, called here “transition-approximation bisimulations”, for hybrid systems. Transition-approximation bisimulations are defined as bisimulations for approximate transition systems, and can be computed within finite steps. Also, we show a kind of optimality of obtained bisimulations. The effectiveness of the proposed approach is shown by a numerical example.

Key Words: hybrid systems, discrete abstraction, bisimulation, approximation

1. はじめに

ハイブリッドシステムは、連続変数で表わされる連続動的システムと離散変数で表わされる離散事象システムからなるシステムであり、さまざまな応用分野をもつ。ハイブリッドシステムは線形と非線形、連続時間と離散時間で大きくクラス分けがなされるが、本論文では、応用例も多い代表的なクラスである離散時間区分的線形システムを対象とする。

ハイブリッドシステムの理論研究における代表的問題には、システムが制御仕様を満たすかどうかの検証問題¹⁾や評価指標に対し最適な制御入力を求める最適制御問題^{2), 3)}がある。離散状態システムに対して開発された形式検証をハイブリッドシステムに適用するために、状態空間を領域に分割し、領域間の遷移関係で連続的な状態遷移を近似する離散抽象化手法^{4), 5)}が提案されている。その一つに、双模倣性 (bisimulation)⁶⁾を満たすような領域に状態空間を分割する手法⁷⁾がある。双模倣による領域分割は一般のハイブリッドシステムに対して停止性が保証されていないという問題がある。

この問題に対処するため、文献 8) では、有限の時間区間 $[0, k]$ に対して双模倣性を満たすように状態空間の分割を行なうことで、手続きの停止性を保証する k -有界双模倣分割を提案した。このとき状態空間の分割数は有限個であり、有限時間区間内であれば、CTL (Computation Tree Logic)⁹⁾の論理式により記述された拘束条件をもつような制御問題が可解となる。また、領域分割は、入力変数に関する空間を含めて分割するため、拘束条件を満たすような遷移をさせる入力値

の範囲を状態変数に対する関数としてオフラインで計算可能である。しかしながら、最悪の場合は時間区間に対し、分割された領域数が指数関数的に増加する。そのため、有界双模倣分割が計算困難である場合もある。また、有限時間区間を超えた範囲に対する拘束条件を扱うことはできない。

本論文では、遷移近似双模倣という新しい概念を導入することで、時間区間に対する制限のない制御問題の取り扱いを可能にする。具体的な計算手順は以下のとおりである。まず、与えられたステップ数 k に対して、領域分割を $(k-1)$ -有界双模倣分割に固定する。つぎに、固定された領域分割が双模倣分割となるように、領域間の離散的遷移関係から、その下近似および上近似を求める。このとき、固定された領域分割は、近似したシステムに対する双模倣分割となるため、時間区間に対する制限は存在しない。

一方、遷移関係を近似しているため、表現できる拘束条件には制限が存在する。たとえば、下近似に対する双模倣は到達可能性の十分条件や限定されたライブネスのみが扱える。また、上近似に対する双模倣は危険状態に到達しないなどの安全性のみ扱える。このため、下近似と上近似を組み合わせることにより、さまざまな拘束条件に対処することになる。また、ステップ数 k が増加するとともに、遷移近似双模倣は詳細化されていくので、計算時間とのトレードオフではあるが、近似精度をステップ数 k により制御することができる。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では双模倣と有界双模倣について述べる。第 3 章では遷移近似双模倣を導出するアルゴリズムを示す。第 4 章では遷移近似双模倣を求める計算例を示し、第 5 章はまとめである。

2. 双模倣と有界双模倣

この章では双模倣および文献 8) で導入した、有限時間区間の有界双模倣について記述する。

* 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科 能美市旭台 1-1

* School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 1-1 Asahidai, Nomi

(Received October 12, 2010)

(Revised August 11, 2011)

2.1 離散時間区分的線形システム

ハイブリッドシステムの表現モデルとして、外乱を含む離散時間区分的線形システム

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_i x(t) + B_i u(t) + w(t), \\ u(t) &\in \mathcal{C}_i, w(t) \in \mathcal{W}_i \text{ if } x(t) \in \mathcal{S}_i \end{aligned} \quad (1)$$

を用いる。ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^n$ は、それぞれ状態変数、入力、外乱を表わすベクトルであり、 $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ である。 $\mathbb{R}$ は実数全体を表わす。また、 $\mathcal{S}_i$ を $\mathbb{R}^n$ 上のポリトープとし、そのインデックスの集合を $I_r = \{1, 2, \dots, r\}$ とする。 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ を状態空間としたとき、 $\bigcup_{i \in I_r} \mathcal{S}_i = \mathcal{X}$ かつ $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset, i \neq j$ が成り立つと仮定する。以後、状態空間の部分集合を領域と呼ぶ。また、 $\mathcal{C}_i, i \in I_r$ は入力に対する拘束条件を表わす有界なポリトープであり、 $\mathcal{W}_i \subseteq \mathbb{R}^n, i \in I_r$ は外乱を表わす有界なポリトープである。 $x(0) = x_0$ は初期状態である。 $\langle x \rangle$ は $x \in \mathcal{S}_i$ であるような、領域 $\mathcal{S}_i$ の添え字 i を表わす。すなわち $x \in \mathcal{S}_{\langle x \rangle}$ である。

2.2 遷移システム

$TS = (\mathcal{Q}, \rightarrow, \mathcal{Q}_0)$ を遷移システムという。ここで、 $\mathcal{Q}$ を状態の集合、 $\rightarrow \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ を遷移関係、 $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ を初期状態の集合とする。以後、 $(q, q') \in \rightarrow$ を $q \rightarrow q'$ と記述する。また、 TS において、最初に与えられる $\mathcal{Q}$ の分割を初期分割と呼び、 π_0 と記述する。

(1) 式の状態 x と入力 u からなるベクトル $[x^T, u^T]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ を拡張状態とよぶ。以後、簡単のため $[x, u]$ と記す。(1) 式の離散時間区分的線形システムに対する遷移システムを、拡張状態に対する遷移システム $TS_{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow, \mathcal{E}_0)$ として定義する。ここで、 $\mathcal{E} := \{[x, u] | x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{C}_{\langle x \rangle}\}$, $\mathcal{E}_0 = \{[x_0, u] | u \in \mathcal{C}_{\langle x_0 \rangle}\}$ であり、拡張状態の遷移関係 $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ は

$$\begin{aligned} [x, u] \rightsquigarrow [x', v] &\Leftrightarrow \\ \exists u \in \mathcal{C}_{\langle x \rangle} \exists w \in \mathcal{W}_{\langle x \rangle} & \cdot x' = A_{\langle x \rangle} x + B_{\langle x \rangle} u + w \end{aligned}$$

により定義する。ただし $v \in \mathcal{C}_{\langle x' \rangle}$ である。以後、拡張状態空間の部分集合を拡張領域と呼ぶ。また、拡張状態に対する遷移システム $TS_{\mathcal{E}}$ の初期分割を、 $\pi_0 = \{E_i | i \in I_r\}$ とし、 $E_i = \{[x, u] | x \in \mathcal{S}_i, u \in \mathcal{C}_i\}$ とする。

2.3 双模倣

π_X と π_Y をそれぞれ状態の集合 $\mathcal{Q}$ の分割であるとする。このとき、各 $Q \in \pi_X$ について、 $Q \subseteq Q'$ であるような $Q' \in \pi_Y$ が存在するとき、 π_X は π_Y の精鍊であるという。 $\pi_X = \mathcal{Q}/\sim_X$, $\pi_Y = \mathcal{Q}/\sim_Y$ により定義される同値関係 $\sim_X, \sim_Y$ について、 π_X が π_Y の精鍊であるとき、 $\sim_X \prec \sim_Y$ と書く。 $\prec$ は半順序になる。

【定義】(双模倣) 遷移システム $TS = (\mathcal{Q}, \rightarrow, \mathcal{Q}_0)$ と同値関係 $\sim_A, \sim_B$ が与えられたとする。以下を満たすような $\mathcal{Q}$ 上の同値関係 $\sim_B$ を TS の双模倣という。

- $\sim_B \prec \sim_A$.

- 任意の $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ について、もし $q_1 \sim_B q_2$ ならば

$$q_1 \rightarrow q'_1 \Rightarrow \exists q'_2 \in \mathcal{Q} \cdot [q_2 \rightarrow q'_2 \wedge q'_1 \sim_B q'_2].$$

このとき、 $\pi_B := \mathcal{Q}/\sim_B$ を双模倣分割という。□

双模倣 $\sim_B$ を求める手続きの停止性は、一般には保証されない⁷⁾。遷移システム TS の、同値関係 $\sim$ による商遷移システムを $TS/\sim = (\mathcal{Q}/\sim, \rightarrow\sim, \mathcal{Q}_0/\sim)$ とする。ここで、 $[q]\sim$ は $q \in \mathcal{Q}$ を含む $\sim$ による同値類を表わし、商遷移関係 $\rightarrow\sim$ は

$$[q_1]\sim \rightarrow\sim [q_2]\sim \Leftrightarrow \exists q \in [q_1]\sim \exists q' \in [q_2]\sim \cdot q \rightarrow q'$$

により定義する。

以下の定理⁷⁾はよく知られた結果である。

《定理 1》 $\sim_B$ を遷移システム TS の双模倣とする。このとき、 TS 上の状態 $q \in \mathcal{Q}$ から到達可能な状態 $q' \in \mathcal{Q}$ が存在するとき、かつそのときに限って、 $TS/\sim_B$ 上の状態 $[q]\sim_B \in \mathcal{Q}/\sim_B$ から状態 $[q']\sim_B \in \mathcal{Q}/\sim_B$ へ到達可能である。□

このとき、 TS の状態集合 $\mathcal{Q}$ が無限集合であっても、 $TS/\sim_B$ における状態集合 $\mathcal{Q}/\sim_B$ が有限ならば、 $TS/\sim_B$ 上の到達可能性問題は可解となる。

2.4 有界双模倣

文献 8) で提案した有界双模倣の定義を与える。

【定義】(有界双模倣) 遷移システム $TS = (\mathcal{Q}, \rightarrow, \mathcal{Q}_0)$ 、初期分割 $\pi_0 = \mathcal{Q}/\sim_0$ により定義される同値関係 $\sim_0$ 、整数区間 $[0, k]$ を与えたとき、以下を満たす $\mathcal{Q}$ 上の同値関係 $\sim_{B_k}$ を k -有界双模倣という。

- $\sim_{B_k} \prec \sim_0$.
- $q_1 \sim_{B_k} q_2$, かつ、 $q_1 \rightarrow q_1^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow q_1^{(k)}$ ならば、 $q_2^{(t)} \in \mathcal{Q}, t = 1, \dots, k$ が存在して、 $q_2 \rightarrow q_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow q_2^{(k)}$ かつ、 $q_1^{(t)} \sim_0 q_2^{(t)}, t = 1, \dots, k$. □
- $\sim_{B_k}, \sim_{B'_k}$ がともに k -有界双模倣ならば、それらの和集合 $\sim_{B_k} \cup \sim_{B'_k}$ の推移的閉包も k -有界双模倣である。よって、半順序 $\prec$ に関して最大の k -有界双模倣が存在し、以後それを、 $\sim_{B_k}$ と書く。 k -有界双模倣に関して以下が知られている。

- $\sim_{B_{k+1}} \prec \sim_{B_k}$.
- $\sim_{B_k}$ が双模倣ならば、 $\sim_{B_{k+1}} = \sim_{B_k}$.
- $\sim_{B_{k+1}} = \sim_{B_k}$ ならば、 $\sim_{B_k}$ は双模倣。

$TS_{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow, \mathcal{E}_0)$ の有界双模倣 $\sim_{B_k}$ による拡張状態 $\mathcal{E}$ の分割は、**Fig. 1** のアルゴリズムにより求まる。ここで、拡張状態の領域 $E \subseteq \mathcal{E}$ に対して

$$Pre(E) := \{e' \in \mathcal{E} | \exists e \in E \cdot e' \rightsquigarrow e\} \quad (2)$$

であり、 $Pre(E)$ は E へ遷移する拡張状態の集合を表わす。遷移元と遷移先が異なる分割に属すること以外は、通常の変換アルゴリズムと同じである。入力 π_0 に含まれる拡張領域は凸多面体であるため、凸多面体の計算方法^{10), 11)}が適用可能である。なお、処理 $Partition(\pi)$ の 6 行目において、凸多面体同士の差は一般的には非凸多面体となるため、非凸多面体を凸多面体に分割する処理を行なう。有界双模倣アルゴ

```

Partition( $\pi$ )::
1: begin
2:  $\pi_{pre} := \pi$ ;
3: for each  $E \in \pi$  do
4:   while  $\exists E' \in \pi_{pre} : \emptyset \neq (E' \cap Pre(E)) \neq E'$  do
5:      $E_1 := E' \cap Pre(E)$ ;
6:      $E_2 := E' - Pre(E)$ ;
7:      $\pi_{pre} := (\pi - \{E'\}) \cup \{E_1, E_2\}$ ;
8:   end while
9: end for
10: return  $\pi_{pre}$ ;
11: end.

```

k -bounded bisimulation::

```

1: begin
2: input  $\pi_0$ ;
3: for  $j = 0$  to  $k - 1$  do
4:    $\pi_{j+1} := Partition(\pi_j)$ 
5: end for
6: output  $\pi_k$ ;
7: end.

```

Fig. 1 k -Bounded bisimulation algorithm

リズムの停止性は保証されており以下を満たす。

《定理 2》 $TS_{\mathcal{E}}$ の初期分割 π_0 が $\mathcal{E}$ の有限の分割ならば、 $\pi_{B_k} := \mathcal{E} / \sim_{B_k}$ も $\mathcal{E}$ の有限の分割である。

[系 1] アルゴリズム (Fig. 1) で得られる $\mathcal{E}$ の分割 π_k は、以下を満たす π_{k-1} の精錬の中で最も粗い分割である。任意の $E \in \pi_k$ および $E' \in \pi_{k-1}$ について、

$$[e_1, e_2 \in E] \wedge [e'_1 \in E'] \wedge [e_1 \rightsquigarrow e'_1] \Rightarrow \exists e'_2 \in E'. [e_2 \rightsquigarrow e'_2].$$

3. 遷移近似双模倣

(1) 式の遷移システムに対し、有限の手続きで双模倣を求めることは一般にはできない。そこで、双模倣の近似である遷移近似双模倣を新たに定義する。

3.1 節では、遷移システムの下近似および上近似を定義し、下近似および上近似の双模倣について述べる。3.2 節では諸定義を行なう。3.3 節では、遷移近似双模倣の概念を説明する。最後に 3.4 節では、遷移近似双模倣となる離散的な遷移関係を計算するアルゴリズムを与える。また、得られた遷移近似双模倣の性質を明らかにする。

3.1 遷移システムに対する下近似と上近似

遷移システム $TS = (Q, \rightarrow, Q_0)$ に対し、 $\rightarrow^l \subseteq \rightarrow$ となる遷移システム $TS^l = (Q, \rightarrow^l, Q_0)$ を TS の下近似、 $\rightarrow \subseteq \rightarrow^u$ となる $TS^u = (Q, \rightarrow^u, Q_0)$ を TS の上近似と呼ぶ。以後、下近似と上近似の区別が不要なときには、単に近似と述べる。

$\rightarrow^l \subseteq \rightarrow \subseteq \rightarrow^u$ より、以下に示す補題 1 は明らかである。

[補題 1] 遷移システム TS の下近似 TS^l 上の状態 q から状態 q' へ到達可能であるとき、 TS 上の状態 q から状態 q' へ到達可能である。また、 TS 上の状態 q から状態 q' へ到達可

能であるとき、 TS の上近似 TS^u 上の状態 q から状態 q' へ到達可能である。

また、補題 1 と定理 1 より定理 3 が導かれる。

《定理 3》 $\sim_l$ を下近似 TS^l の双模倣、 $\sim_u$ を上近似 TS^u の双模倣とする。このとき、 $TS^l / \sim_l$ 上の状態 $[q]_{\sim_l}$ から状態 $[q']_{\sim_l}$ へ到達可能であるとき、 TS 上の状態 q から状態 q' へ到達可能な状態 q' が存在する。また、 TS 上の状態 q から状態 q' へ到達可能であるとき、 $TS^u / \sim_u$ 上の状態 $[q]_{\sim_u}$ から状態 $[q']_{\sim_u}$ へ到達可能である。

定理 3 より、 $TS^l / \sim_l$ 上で目標領域に到達可能であるならば、 TS 上でも目標領域内のある状態へ到達可能であることが保証される。この意味で、 $TS^l / \sim_l$ を用いることで、 TS 上の到達可能性の十分条件が得られる。さらに、 TS^l に含まれない遷移を入力拘束により禁止することができれば、ライブネスを含む拘束条件を扱うこともできる。同様に、 $TS^u / \sim_u$ 上で危険領域に到達不能であるならば、 TS 上でも危険領域に含まれる任意の状態に到達不能であることが保証される。この意味で、 $TS^u / \sim_u$ を用いることで、 TS 上の安全性検証問題を解くことができる。

3.2 諸定義

k -有界双模倣 $\sim_{B_k}$ と $(k-1)$ -有界双模倣 $\sim_{B_{k-1}}$ によって定義される、 $\mathcal{E} := \{[x, u] | x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{C}_{(x)}\}$ の分割を $\pi_k := \mathcal{E} / \sim_{B_k}$ 、 $\pi_{k-1} := \mathcal{E} / \sim_{B_{k-1}}$ とする。集合 $\pi_k = \{E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, E_3^{(k)}, \dots\}$ の各要素 $E_i^{(k)}$ のインデックス i からなる集合を $I(\pi_k) := \{1, 2, 3, \dots\}$ とする。

まず、 π_k の拡張領域 $E_i^{(k)}$, $i \in I(\pi_k)$ から、 π_{k-1} の拡張領域への離散的な遷移関係を

$$(E_i^{(k)})^{\rightsquigarrow} := \{E_j^{(k-1)} \mid E_i^{(k)} \subseteq Pre(E_j^{(k-1)}), j \in I(\pi_{k-1})\}$$

により定義する。系 1 より、 $E_i^{(k)}$ に含まれる任意の拡張状態から、 $(E_i^{(k)})^{\rightsquigarrow}$ の各拡張領域に含まれる、ある拡張状態へ遷移可能である。

つぎに、 $E_j^{(k-1)} \in \pi_{k-1}$ の部分集合である、 π_k の拡張領域からなる集合 $Part(E_j^{(k-1)})$ を、以下のように定義する。 $E_j^{(k-1)}$, $j \in I(\pi_{k-1})$ に対して、

$$Part(E_j^{(k-1)}) := \{E_i^{(k)} \mid E_j^{(k-1)} \cap E_i^{(k)} \neq \emptyset, i \in I(\pi_k)\}.$$

このとき、 π_k が π_{k-1} の精錬であることから、

$$\bigcup_{i \in I(Part(E_j^{(k-1)}))} E_i^{(k)} = E_j^{(k-1)}, j \in I(\pi_{k-1})$$

である。

最後に、 π_{k-1} の拡張領域 $E_j^{(k-1)}$ から、 π_{k-1} の拡張領域への 2 種類の離散的な遷移関係を

$$Post(E_j^{(k-1)}) := \bigcap_{i \in I(Part(E_j^{(k-1)}))} (E_i^{(k)})^{\rightsquigarrow},$$

Fig. 2 A quotient relation of π_k and π_{k-1}

$$Post_u(E_j^{(k-1)}) := \bigcup_{i \in I(Part(E_j^{(k-1)}))} (E_i^{(k)})^{\sim}$$

と定義する. $Post(E_i^{(k-1)})$ の各拡張領域は, $E_i^{(k-1)}$ の任意の拡張状態から遷移可能である拡張状態を含んでいる. 同様に, $Post_u(E_i^{(k-1)})$ の各拡張領域は, $E_i^{(k-1)}$ のある拡張状態から遷移可能である拡張状態を含んでいる.

3.3 遷移近似双模倣の基本的な考え方

遷移近似双模倣の基本的な考え方は以下のとおりである. まず, 拡張状態空間の分割を $(k-1)$ -有界双模倣分割 π_{k-1} に固定する. つぎに, π_k から π_{k-1} への拡張領域間の遷移関係 (Fig. 2) から, $Post(\cdot)$ および $Post_u(\cdot)$ の 2 種類の離散的な遷移関係 (Fig. 3) を抽出する. $Post(\cdot)$ は Fig. 3 の実線の有効辺, $Post_u(\cdot)$ は点線の有効辺に対応する. $Post_u(\cdot)$ の遷移関係を $Post(\cdot)$ の遷移関係として読み替えることにより, 上近似の遷移関係が得られる. また, $Post_u(\cdot)$ の遷移関係を無視することにより, 下近似の遷移関係が得られる. このとき, 拡張領域分割 π_{k-1} は, これら上近似, 下近似の遷移関係に対する双模倣分割になることが示せる.

まず, Fig. 2 において, 点線枠は k -有界双模倣分割 π_k および $(k-1)$ -有界双模倣分割 π_{k-1} を表す. たとえば, 上段の点線枠は, $\pi_k = \{E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, E_3^{(k)}, E_4^{(k)}, E_5^{(k)}\}$ を表す. つぎに, 実線で描かれた四角形は拡張領域を表わし, 四角形内には π_k での拡張領域名が書かれている. たとえば, 図の左下にある四角形は拡張領域 $E_1^{(k-1)}$ を表わし, 内部に書かれた文字は $E_1^{(k-1)}$ の分割が $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}$ であることを表わす. つまり, $Part(E_1^{(k-1)}) = \{E_1^{(k)}, E_2^{(k)}\}$ に対応する. 有向辺は, 始点となる拡張領域の, 任意の拡張状態から, 終点となる拡張領域の, ある拡張状態へ遷移可能であることを表わす. たとえば, $E_2^{(k)}$ から $E_1^{(k-1)}$ への有向辺は, $E_2^{(k)}$ の任意の拡張状態から, $E_1^{(k-1)}$ のある拡張状態へ遷移可能であることを表わす. つまり, $(E_2^{(k)})^{\sim} = \{E_1^{(k-1)}\}$ に対応する.

Fig. 3 は π_{k-1} の拡張領域間の離散的な遷移関係を表わす. 図において点線の有向辺は, 始点となる拡張領域のある拡張状態から, 終点となる拡張領域のある拡張状態へ遷移可能であることを表わす. たとえば, $E_1^{(k-1)}$ から, $E_1^{(k-1)}$ と $E_2^{(k-1)}$ への点線の有向辺があるが, これは, $E_1^{(k-1)}$ のある拡張状態から, $E_1^{(k-1)}$ および $E_2^{(k-1)}$ のある拡張状態へ遷移可能である

Fig. 3 A quotient relation of π_{k-1} and π_{k-1}

ことを表わす. つまり, $Post_u(E_1^{(k-1)}) = \{E_1^{(k-1)}, E_2^{(k-1)}\}$ に対応する. つぎに, 実線の有向辺は, 始点となる拡張領域の任意の拡張状態から, 終点となる拡張領域のある拡張状態へ遷移可能であることを表わす. たとえば, $E_3^{(k-1)}$ から $E_2^{(k-1)}$ への点線の有向辺は, $E_3^{(k-1)}$ の任意の拡張状態から, $E_2^{(k-1)}$ のある拡張状態へ遷移可能であることを意味する. つまり, $Post(E_3^{(k-1)}) = \{E_2^{(k-1)}\}$ に対応する.

Fig. 2 から Fig. 3 の点線と実線の有向辺を得る手続きを示す. たとえば, Fig. 3 の $E_3^{(k-1)}$ と $E_2^{(k-1)}$ 間の離散的な遷移関係に着目する. このとき, $E_3^{(k-1)}$ は $E_3^{(k)}$ と $E_5^{(k)}$ の和集合であり, Fig. 2 を見ると, $E_3^{(k)}$ と $E_5^{(k)}$ のどちらからでも任意の拡張状態から, $E_2^{(k-1)}$ のある拡張状態へ遷移可能である. すなわち, $E_3^{(k-1)}$ の任意の拡張状態から $E_2^{(k-1)}$ のある拡張状態へ遷移可能であることを示している. したがって, $E_3^{(k-1)}$ から $E_2^{(k-1)}$ への実線の有向辺を加える. つぎに, $E_1^{(k-1)}$ と $E_2^{(k-1)}$ 間の離散的な遷移関係に着目する. このとき, $E_1^{(k-1)}$ は $E_1^{(k)}$ と $E_2^{(k)}$ の和集合である. Fig. 2 を見ると, $E_1^{(k)}$ から $E_2^{(k-1)}$ への有向辺は存在するが, $E_2^{(k)}$ から $E_2^{(k-1)}$ への有向辺は存在しない. したがって, $E_1^{(k-1)}$ のある拡張状態から $E_2^{(k-1)}$ のある拡張状態へ遷移可能であることを示している. よって, $E_1^{(k-1)}$ から $E_2^{(k-1)}$ への点線の有向辺を加える. 以上の手続きを, π_{k-1} に含まれるすべての拡張領域間で行なえば, Fig. 3 を得ることができる. なお, 点線の有向辺は実線の有向辺を含んでいることに注意されたい.

実線の有向辺が意味する遷移関係は, 構成方法より, 元の遷移関係に含まれる遷移関係を表現している. 同時に, 実線の有向辺は, 各拡張領域の任意の拡張状態からの遷移を表わすので, π_{k-1} が, 実線の有向辺が意味する遷移関係をもつ下近似の双模倣分割となることもわかる. 一方, 点線および実線の有向辺が存在するとき, 始点となる拡張領域の任意の領域から終点となる拡張領域のある拡張状態への遷移を追加すれば, 点線および実線の有向辺により表わされる離散遷移関係は, 元の遷移関係を含む遷移関係を表わすことになる. 同時に, π_{k-1} が上近似の双模倣分割となることもわかる.

なお, 実線の有向辺を新たに加えると, 有向辺が意味する遷移関係は, 元の遷移関係に含まれなくなる. たとえば, $E_1^{(k-1)}$ から $E_1^{(k-1)}$ への有向辺を実線に変えると, Fig. 2 において,

$E_1^{(k)}$ から $E_1^{(k-1)}$ への離散的な遷移は存在しないため、変更した有向辺が意味する遷移関係は、元の遷移関係に含まれない。したがって、 π_{k-1} が下近似の双模倣分割にするような、実線の有向辺の割り当ての中で、Fig. 3 は実線の有向辺数が最大となる割り当てである。同様に、実線もしくは点線の有向辺を減らすと、残った有向辺が意味する遷移関係は、元の遷移関係を含まなくなる。したがって、 π_{k-1} が上近似の双模倣分割にするような、実線と点線の有向辺の割り当ての中で、Fig. 3 は有向辺数が最小となる割り当てである。

3.4 遷移近似双模倣の導出

拡張状態に対する遷移システム $TS_{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow, \mathcal{E}_0)$ とする。 $TS_{\mathcal{E}}$ の k -有界双模倣および $(k-1)$ -有界双模倣から、 $TS_{\mathcal{E}}$ の上近似および下近似に対して双模倣になるような、離散的な遷移関係を与えるアルゴリズムを Fig. 4 に示す。

ここで、 $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l$ は下近似の離散的な遷移関係を表わし、 $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u$ は、上近似の離散的な遷移関係を表わす。

つぎに、アルゴリズムから導出された $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l, \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u$ により得られる、拡張状態間の遷移関係 $\rightsquigarrow^l$ および $\rightsquigarrow^u$ を

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow^l &:= \left\{ (e, e') \in [E \times E'] \cap \rightsquigarrow \mid (E, E') \in \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l \right\}, \\ \rightsquigarrow^u &:= \left\{ (e, e') \in E \times E' \mid (E, E') \in \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u \right\}\end{aligned}$$

と定義する。このとき、 $\rightsquigarrow^l \subseteq \rightsquigarrow \subseteq \rightsquigarrow^u$ であることに注意されたい。

以下の定理は構成方法より明らかである。

《定理 4》 $\sim B_{k-1}$ を $\pi_{k-1} = \mathcal{E} / \sim B_{k-1}$ により定義される $\mathcal{E}$ 上の同値関係とする。 $\rightsquigarrow^l$ により定義される TS の下近似 $TS^l = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow^l, \mathcal{E}_0)$ に対して、 $\sim B_{k-1}$ は双模倣である。同様に、 $\rightsquigarrow^u$ により定義される TS の上近似 $TS^u = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow^u, \mathcal{E}_0)$ に対して、 $\sim B_{k-1}$ は双模倣である。□

定理 4 を満たす、 $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l$ による $\rightsquigarrow^l$ の定義は一意に定めるが、 $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u$ による $\rightsquigarrow^u$ の定義方法は一意ではないことを付記しておく。

$(\sim B_{k-1}, \rightsquigarrow^l)$ と $(\sim B_{k-1}, \rightsquigarrow^u)$ を、それぞれ遷移下近似双模倣、遷移上近似双模倣とよぶ。また、 $TS^l / \sim B_{k-1} = (\pi_{k-1}, \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l, \mathcal{E}_0 / \sim B_{k-1})$ は、 TS の下近似 $TS^l = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow^l, \mathcal{E}_0)$ に対する $\sim B_{k-1}$ による商遷移システムであり、 $TS^u / \sim B_{k-1} = (\pi_{k-1}, \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u, \mathcal{E}_0 / \sim B_{k-1})$ は、上近似 $TS^u = (\mathcal{E}, \rightsquigarrow^u, \mathcal{E}_0)$ に対する $\sim B_{k-1}$ による商遷移システムである。

提案したアルゴリズムにより得られる商遷移関係について、以下の定理が成り立つ。証明は 3.3 節で示した方法と同様であるので省略する。

《定理 5》 $\pi_{k-1} = \mathcal{E} / \sim B_{k-1}$ とする。 $\sim B_{k-1}$ が双模倣となる、 TS の下近似の $\sim B_{k-1}$ による商遷移システムの中で、 $TS^l / \sim B_{k-1} = (\pi_{k-1}, \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l, \mathcal{E}_0 / \sim B_{k-1})$ は商遷移関係の要素数が最大である。同様に、 $\sim B_{k-1}$ が双模倣となる、 TS の上近似の $\sim B_{k-1}$ による商遷移システムの中で、 $TS^u / \sim B_{k-1} = (\pi_{k-1}, \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u, \mathcal{E}_0 / \sim B_{k-1})$ は商遷移関係の

transition-approximation relation::

```

1: begin
2: input  $\pi_k := \mathcal{E} / \sim B_k, \pi_{k-1} := \mathcal{E} / \sim B_{k-1};$ 
3:  $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l := \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u := \emptyset;$ 
4: for each  $E \in \pi_{k-1}$  do
5:   for each  $E' \in Post(E)$  do
6:      $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l := \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l \cup \{(E, E')\};$ 
7:   end for
8: end for
9: for each  $E \in \pi_{k-1}$  do
10:  for each  $E' \in Post_u(E)$  do
11:     $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u := \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u \cup \{(E, E')\};$ 
12:  end for
13: end for
14: output  $\rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^l, \rightsquigarrow_{\sim B_{k-1}}^u;$ 
15: end.
```

Fig. 4 Transition-approximation relation algorithm

要素数が最小である。□

有限の双模倣が求まる下近似および上近似は、遷移関係を空集合とするなど自明な場合を除いては、求めることは容易ではない。しかしながら、提案手法は初期分割に対し、最小でも 1 ステップ分の有界双模倣が求まれば、 $(k-1)$ -有界双模倣分割を双模倣分割とする近似を求めることができる。さらに、 $(k-1)$ -有界双模倣分割を双模倣分割とするような近似の中で、定理 5 の意味において、最良の近似を求めることができる。

(注意) これまでの結果は、区分的アファインシステムに対しても成り立つ。区分的アファインシステムは、(1) 式にアファイン項 $f_i \in \mathbb{R}$ を追加し

$$x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) + w(t) + f_i$$

としたシステムである。提案手法は、Fig. 2 のように領域間の離散的な遷移関係と、分割される前はどの拡張領域に属していたかがわかれば適用可能である。これは、有界双模倣から得られる情報である。有界双模倣は (2) 式の計算が可能であれば求まる。アファイン項は定数のため、(2) 式の計算に、区分的線形システムに用いたのと同じ凸多面体の計算方法が適用可能である。

4. 計算例

提案手法を用いて遷移近似双模倣を求める。また、各 $(k, k-1)$ に対する、下近似と上近似の離散的な遷移関係の比を用いて提案手法により求めた近似精度に関する考察を行なう。

つぎの離散時間区分的線形システム²⁾

$$\begin{aligned}x(t+1) &= 0.8 \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ \alpha(t) &= \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{if } [1 \ 0]x(t) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{3} & \text{if } [1 \ 0]x(t) < 0 \end{cases}, \\ u(t) &\in [-0.9 \ 0.9].\end{aligned}$$

Table 1 k -Bounded bisimulation

k -bounded bisimulation	1	2	3	4
The number of regions	12	27	78	255
Computational time [sec]	0.1	2.0	4.2	14.4

Fig. 5 Obtained partition

を考える．簡単のため外乱項は除く．ここで状態空間 $\mathcal{X}$ の初期分割を，

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &:= \{[x_1 \ x_2]^T | 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1\}, \\ \mathcal{S}_2 &:= \{[x_1 \ x_2]^T | 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 1 < x_2 \leq 2\}, \\ \mathcal{S}_3 &:= \{[x_1 \ x_2]^T | -1 \leq x_1 < 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1\}, \\ \mathcal{S}_4 &:= \{[x_1 \ x_2]^T | -1 \leq x_1 < 0 \wedge 1 < x_2 \leq 2\}. \end{aligned}$$

とする．

まず， $\mathcal{S}_i, i = 1, \dots, 4$ からなる部分空間に対する $k = 1, \dots, 4$ の k -有界双模倣を求める．計算には，凸多面体ライブラリの Polka¹⁰⁾ を組み込んだ論理制約プログラミングの処理系である KCLP-HS¹¹⁾ を用いた．計算機環境は Intel Core2 Duo T8100 2.1GHz, 4GB メモリ, Windows Vista 32bit である．

Table 1 は， $k = 1, \dots, 4$ までの k -有界双模倣によって得られた，分割による領域の数と計算時間を表わす．メモリの問題により $k = 5$ 以上の計算は行なえなかった． k の増加に対する最悪の計算時間について，単純化して述べる．有界双模倣アルゴリズム (Fig. 1) では，領域間の比較 ($Partition(\pi)$ の 4 行目) を行なう．このとき，2 つの領域への分割 ($Partition(\pi)$ の 5~7 行目) の処理により，各領域が一回だけ 2 つの領域に分割されたと仮定する．また，非凸多面体を凸多面体に分割する処理がないと仮定する．このように単純化した場合であっても， k の増加に対して，初期分割に含まれる領域数の $2k$ 乗で領域数が増加する．したがって， k の増加に対する最悪の計算時間は，少なくとも指数関数的に増加することがわかる．

Fig. 6 A transition-approximation bisimulation graph**Table 2** The number of edges and it's ratio

$(k, k-1)$	(1, 0)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)
#vertices	4	12	27	78
#edges of a lower app.	0	22	126	979
#edges of an upper app.	12	40	176	1173
Ratio (lower/upper)	0	0.55	0.716	0.835
Computational time [sec]	0.31	2.23	4.51	14.72

Fig. 5 は 1-有界双模倣によって得られた領域の分割である．領域 2, 4, 7, 9 は他領域に比べ微小であり図では省略した．省略した領域は原点付近に存在する．

つぎに， k -有界双模倣と $(k-1)$ -有界双模倣から， $k = 1, \dots, 4$ について，遷移近似双模倣を求める．得られた遷移近似双模倣による商遷移システムを，グラフ構造 (双模倣グラフ⁸⁾) により表現する．ここで，頂点に領域の分割を辺に拡張領域の分割を割り当てる．

Fig. 6 は，2-有界双模倣と 1-有界双模倣より得られた，遷移近似双模倣による商遷移システムを表現したグラフである．実線の有効辺で描かれたグラフが下近似を表わし，点線および実線の有効辺で描かれたグラフが上近似を表わす．Fig. 6 の各頂点は，1-有界双模倣による領域の分割を表わし，割り振られた番号は Fig. 5 の番号に対応する．たとえば，頂点 1 が表わす領域は “ $6.9282x_1 + 4x_2 > 0.10001, 2x_1 - 3.4641x_2 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq 1$ ”，頂点 5 が表わす領域は “ $x_1 \geq 0, x_1 \leq 1, x_2 \geq 1, x_2 \leq 2, 2x_1 - 3.4641x_2 \geq -5$ ” となる．各辺は領域間の遷移関係を表わし，有向辺 (1, 3) に対する拡張状態は “ $x_1 \leq 1, x_2 \geq 0, -0.9 \leq u \leq 0.9, 0.3199x_1 + 0.5543x_2 + 0.6928u < 1, 6.9282x_1 + 4x_2 > 0.10001, 1 \leq 0.6928x_1 + 0.4x_2 + u \leq 2, 0 \leq 2x_1 - 3.4641x_2 \leq 1$ ” である．各辺に対する拡張状態の領域に状態変数 x_1, x_2 の値を代入すると，入力 u が求まる．たとえば，頂点 1 が表わす領域に含まれる状態 $[x_1 \ x_2]^T = [0.5 \ 0.1]^T$ から，頂点 5 が表わす領域に遷移させる入力は $0.6136 \leq u \leq 0.9$ である．なお，領域 11, 12 に含まれる状態からは，状態空間 $\mathcal{X}$ に含まれる状態への遷移は存在しないため，孤立した頂点となる．

Table 2 は遷移近似双模倣による商遷移システムのグラフ構造と，初期分割からの計算時間を表わす． $(k, k-1)$ は，グ

ラフの頂点集合が $(k-1)$ -有界双模倣分割であり、下近似と上近似の有向辺を求めるために、 k -有界双模倣を計算したことを意味する。 k -有界双模倣を計算しているため、計算時間は最悪の場合 k の増加に対して、少なくとも指数関数的に増加する。計算例では、計算時間が指数関数的に増加していることが確認できる。

Table 2 では、辺数の比 (= 下近似の辺数 / 上近似の辺数) を用いて近似精度を表現した。比が 1 となると、元のシステムに対しての双模倣が求まるため、1 に近いほど近似精度が高い。計算例では k の増加とともに、近似精度が向上している。近似精度が要求水準に達しなければ、計算時間とのトレードオフではあるが、有界双模倣の分割手続きを繰り返し、近似精度が向上したときの分割を採用すればよい。

5. おわりに

ハイブリッドシステムに対して、遷移関係を限定もしくは緩和した近似に対する双模倣の概念を定義し、それを有界双模倣分割から計算する具体的な手続きを与えた。提案手法により、双模倣が求まらなくとも、近似に対する到達可能性問題を解くことで限定されたライブネスや安全性問題を解くことが可能となる。また、例題のように、分割された領域間の遷移を保証する制御入力を取り得る領域を、パラメトリックに求めることも可能である。

今後の課題はモデル予測制御問題への適用である。提案手法により得られた下近似を表わすグラフ上のパスは、最適制御問題における実行可能解を表わす。よって、パスが表わす解に対して、目的関数の最悪値が保証できれば、精度保証付きの制御入力事前に計算可能となる。

本論文では離散的な遷移を表わす辺によって近似精度を表現した。この尺度は、 k の増加に対して非減少で向上することが予想される。しかし、以下の理由により理論的な裏付けはまだ存在しない。 k が増加すると分割は詳細化され、グラフ上の下近似の辺が増加する。しかし、遷移元だけでなく遷移先も分割される場合に、もともと下近似に含まれていた辺が消失する可能性がある。そのため、上近似の辺が下近似の辺よりも増加する可能性がある。今後は、尺度の変更を含め、近似精度の非減少性について明らかにする必要がある。

謝辞 本研究は、財団法人三豊科学技術振興協会 2009 年度研究助成、および文部科学省科学研究費補助金（基盤研究 (C) No. 21500009、若手研究 (B) 23760387）による支援を受けて行なわれています。記して感謝いたします。

参考文献

- 1) R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.-H. Ho, X. Nicollinc, A. Olivero, J. Sifakis and S. Yovine: The algorithmic analysis of hybrid systems, *Theoretical Computer Science*, **138**-1, 3/34 (1995)
- 2) A. Bemporad and M. Morari: Control of System Integrating Logic, Dynamics, and Constraints, *Automatica*, **35**-3, 407/427 (1999)
- 3) P. Tondel, T.A. Johansena and A. Bemporad: An Algorithm for Multi-parametric Quadratic Programming and Explicit MPC solutions, *Automatica*, **39**-3, 489/497 (2003)
- 4) R. Alur, T. Dang and F. Ivančić: Counterexample-guided Predicate Abstraction of Hybrid Systems, *Theoretical Computer Science*, **354**-2, 250/271 (2006)
- 5) R. Alur, T. Dang and F. Ivančić: Predicate Abstraction for Reachability Analysis of Hybrid Systems, *ACM Trans. Embedded Computing Systems*, **5**-1, 152/199 (2006)
- 6) Robin Milner: *Communication and Concurrency*, Prentice-Hall (1989)
- 7) R. Alur, T.A. Henzinger, G. Lafferriere and G.J. Pappas: Discrete Abstraction of Hybrid Systems, *Proceedings of the IEEE*, **88**-7, 971/984 (2000)
- 8) 平石, 小林, 崔: 有限時間区間に対するハイブリッドシステムの離散抽象化, 計測自動制御学会論文集, **44**-9, 751/759 (2008)
- 9) E.M. Clarke, O. Grumberg and D.A. Peled: *Model checking*, MIT Press (1999)
- 10) The New Polka: Convex Polyhedra and Linear Equalities Library, <http://apron.cri.enscm.fr/library/>
- 11) K. Hiraishi: KCLP-HS: A Rapid Prototyping Tool for Implementing Algorithms on Hybrid Systems, JAIST research report, IS-RR-2006-012, August 8 (2006)

[著者紹介]

崔 舜 星

2003 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程修了。2009 年同博士後期課程単位取得退学。現在、北陸先端科学技術大学院大学キャリア支援センター研究員（情報科学研究科配置）。ハイブリッドシステムの抽象化と最適化の研究に従事。博士（情報科学）。電子情報通信学会、情報処理学会の会員。

平 石 邦 彦（正会員）

1985 年東京工業大学理工学研究科修士課程修了。85～93 年富士通（株）および（株）富士通研究所勤務。93～2003 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授。2003 年～現在、同教授。形式的モデル化と検証の研究に従事。工学博士。IEEE、電子情報通信学会、情報処理学会の会員。

小 林 孝 一（正会員）

2000 年法政大学大学院工学研究科修士課程修了。2000～2004 年新日本製鐵（株）勤務。2007 年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程修了。同年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教となり、現在に至る。ハイブリッドシステムの制御の研究に従事。博士（工学）。電子情報通信学会、システム制御情報学会、IEEE などの会員。