逆システムの直列結合による仮想フィードバック誤差学習

野 口 慎*・杉 本 謙 二*

Virtual Feedback Error Learning by Means of Cascade Connection of an Inverse System

Makoto NOGUCHI* and Kenji SUGIMOTO*

In this paper, a new learning scheme named Virtual Feedback Error Learning is proposed to improve conventional FEL schemes. Conventional schemes for FEL have a drawback that a time variant block is inserted into the closed loop system as a side effect from eliminating an assumption of positive realness for stability. This paper separates the inserted block from the closed loop by means of cascade connection of an inverse system. As a result, designers do not need to pay attention to the effect of the block to stability. The paper shows the parameters converge to true values under a PE condition, and verifies its effectiveness based on simulation.

Key Words: virtual feedback error learning (VFEL), strictly proper plant, multi-input multi-output (MIMO) system, feedforward control

1. はじめに

フィードバック誤差学習 (Feedback Error Learning: FEL) は Kawato らによって提案された生体の運動制御における学習モデルである¹⁾。制御対象の特性が未知でも (閉ループの安定性を仮定すれば) 優れた応答特性が獲得されるので, FEL は制御系設計手法としても有望である。この要求は, 安定化を適応的に達成する既存の適応制御のそれより緩いので, 過渡応答も暴れず収束も早い。したがって, その学習則や安定性について, 研究が活発に進められている。Miyamura ら²⁾は, SISO (Single-Input Single-Output) 系に対して線形制御による FEL を提案し, ある種の近似のもと, その安定性を正実性に基づいて保証している。Alali ら³⁾は Miyamura らの手法を MIMO (Multi-Input Multi-Output) 系へ拡張し, その有効性を 2 リンクマニピュレータの一筆書き実験により検証した⁴⁾。さらに, FEL に基づく閉ループ同定の研究も行なっている⁵⁾。一方, Muramatsu ら⁶⁾は, 未知パラメータに線形な誤差モデルを導くことにより, 近似によらず, また正実性の仮定をも必要とせずに収束を保証できる学習則を提案した。この手法のマニピュレータでの検証実験もなされている⁷⁾。

FEL に基づく制御系設計では, 制御対象が厳密にプロバの場合, フィードフォワード (FF) 制御器がインプロバにな

るのを避けるためプレフィルタを用いるが, 著者ら⁸⁾はプレフィルタの状態変数を FF 制御信号に利用するプレフィルタ統合型の FEL を提案した。これにより相対次数が高い程, 学習パラメータの数は削減される。さらに, この構成において, Muramatsu ら⁶⁾の手法を MIMO 系に拡張し, 未知パラメータに線形な誤差モデルを導出した^{9), 10)}。また, 可変ゲイン型の学習則を導入し, パラメータの収束を早めた。

これら既存の FEL には, 以下の (1)~(3) に示すように, 文献 6), 9), 10) の手法に対する問題点が 1 つ, FEL の構成自体に対する問題点が 2 つ存在する。

- (1) 上記文献の手法では, 正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に時変ブロックが挿入される^{6), 9), 10)}。そのため, この時変ブロックによる変動でも系の安定性が損なわれないという意味で (公称の) 閉ループ系の安定性が十分にロバストであることが必要となる。
- (2) 一般に FEL では, 閉ループ系への信号入力点が 2 点必要となる 2 自由度構成をとるため制御系の構成自体が複雑になる。また, プラントは正方 ($m \times m$) に限定され, その出力 (整形したい被制御量) と目標信号の差のみをフィードバック (FB) 制御器に加えるという制約があった。
- (3) FEL では, プラントの直前に入力される FF 制御信号は速応性の代償として急激な変化を伴うため, いわば入力外乱とみなせ, この外乱に閉ループ系が十分に耐えられることが必要である (特に, 実応用では影響が大きいと考えられる)。

そこで, 本論文では, 上記問題点の解決を目的として, 2 自由度構成によらない FEL 制御系を提案する。まず FB 制御器を与えて閉ループ系を構成し, その応答特性を整形するた

* 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科
生駒市高山町 8916-5

* Graduate School of Information Science, Nara Institute of
Science and Technology, 8916-5 Takayama, Ikoma
(Received December 2, 2010)
(Revised September 20, 2011)

めに学習型 FF 制御器を直列結合により前置する．このため閉ループ系への入力点が 1 つに削減され、FB 制御器も自由に設計できるなど、問題点 (2), (3) を回避できる．つまり閉ループ系と FF 制御器を分離して扱える．

つぎに、この学習型 FF 制御器が閉ループ系の逆システムとして動作するよう、Muramatsu ら⁶⁾の手法を改良する．すなわち、2 自由度構成での誤差の代わりに、目標値と被制御量との差を利用することで問題点 (1) も解決する．この差は実際にはフィードバックに用いられないことから本手法を“仮想フィードバック誤差学習”と呼ぶ．さらに、提案の学習則の収束性について、PE 条件のもと解析する．最後に、本手法の有効性をシミュレーションによって確認する．

本論文の構成はつぎのとおりである．2 では、まず準備として従来の FEL について簡単に説明した後、問題の定式化を行なう．3 では、提案法について説明する．まず、FF 制御器の構成を示し、つぎに、その学習則について説明する．4 では、提案の学習則の収束性について検討を行なう．5 では、シミュレーションにより本手法を検証する．

以下では、 m 次の単位行列は I_m と表わすが、文脈から明らかとなるときは次数を明記しないこともある．多項式 $\ell(s)$ が Hurwitz とは、その零点が安定領域 $C_- = \{s \in C \mid \text{Re}(s) < 0\}$ にのみ存在するときをいう．また、行列 A, B の Kronecker 積を $A \otimes B$ で表わす．FF 制御器の実際の構成は時変系となるが、各時刻における動特性を表わすために伝達行列など時不変系の用語を流用する．

2. 準備

2.1 従来の FEL と問題点

まず、既存の多入出力フィードバック誤差学習 (MIMO-FEL) の構成を Fig. 1 に示す．これは、文献 9), 10) の構成を示すと同時に文献 3), 6), 8) をすべて包含する図となっている．FF 制御器に向かう点線で示された信号 $\xi_w, u(t)$ はそれぞれ、プレフィルタの状態変数 (信号 A)、制御入力 (信号 B) を取り出している．文献 3) では、点線 A, B の両方が存在しないが、文献 6) では、点線 A が存在せず、また、文献 8) では、点線 B が存在しない．

Fig. 1 Conventional MIMO-FEL schemes

さて、FEL では、フィードバック誤差 $e(t)$ (もしくは $u_{fb}(t)$) に基づき、FF 制御器 $Q_\Theta(s)$ のパラメータ Θ を調整するこ

とによって、制御目的 $y(t) \rightarrow w(t)$ を達成していた．そしてこれまでに、多入出力化³⁾や学習則における正実性の除去⁶⁾、さらには、学習における冗長性の排除^{8)~10)}などが行なわれてきた．しかしながら、これら既存の FEL には、以下に示すように、3 つの問題点が存在する (特に (1), (3) については、実用上、深刻な問題と成り得る．学習が失敗し、出力が大きく振動もしくは発散する可能性がある)．

(1) 文献 6), 9), 10) の手法では、 $P(s)$ が有限零点を含む場合、正実性の仮定を除去するため Fig. 1 の信号 B を FF 制御に用いている．しかし、これを等価変換すると Fig. 2 のようになり、点線で囲まれている時変ブロックが閉ループ系に挿入されてしまう．これは未知パラメータに線形な誤差モデルを構成するための副作用である．そのため、閉ループ系が十分にロバストであり、この時変ブロックが閉ループ系の安定性を損なわないという仮定が必要となる．

Fig. 2 Conventional FEL scheme by Noguchi et al. 9), 10)

(2) 一般に FEL では、Fig. 1 に示すように、閉ループ系への信号入力点が 2 点必要 (プレフィルタ $W(s)$ の出力信号 $w(t)$ の接続が 1 点、FF 制御器 $Q_\Theta(s)$ の出力信号 $u_{ff}(t)$ の接続が 1 点) となる 2 自由度構成をとるため制御系の構成自体が複雑になる．このため、正方 ($m \times m$) なプラントに限定され、その出力 (整形したい被制御量) と目標信号の差のみをフィードバック (FB) 制御器に加えるという前提があった．

(3) FEL では、プラントの直前に FF 制御信号 $u_{ff}(t)$ の接続が必要となる 2 自由度構成をとることにより、速応性を改善する．しかしながら、その代償として FF 制御信号 $u_{ff}(t)$ は急激な変化を伴うため、これに閉ループ系が十分に耐えられることが必要である (特に、実験では影響が大きいと考えられる)．

2.2 問題の定式化

本論文の目的は、上記 (1)~(3) の問題点を解決する新しい手法を提案することである．そのために、新しく Fig. 3 のような構成、すなわち、2 自由度構成によらない新しい FEL (多入出力仮想フィードバック誤差学習 (MIMO-Virtual Feedback Error Learning: MIMO-VFEL)) を提案する．これにより、閉ループ系への入力点が 1 つに削減されるため、問題点 (2), (3) を回避でき、また、仮想フィードバック誤差 (詳細は後述)

Fig. 3 Proposed MIMO-VFEL scheme

を学習に用いるため、問題点 (1) も回避できる。以下、問題の定式化を行なっていく。Fig. 3 において、 $P(s)$ は未知のプラント、 $K_{fb}(s)$ は $P(s)$ を安定化するために設計者が与えるフィードバック (FB) 制御器、 $\tilde{P}(s)$ は $P(s)$ と $K_{fb}(s)$ を含む閉ループ系、 $\tilde{u}(t)$ と $y(t)$ は $\tilde{P}(s)$ の入力および出力信号、 $e(t)$ は $\tilde{P}(s)$ 内の誤差信号、 $u(t)$ は $P(s)$ の制御入力、 $r(t)$ は外生信号、 $w(t) := W(s)r(t)$ は $\tilde{Q}_\Theta(s)$ 内に統合されているプレフィルタ $W(s)$ の出力で目標値信号、 $\tilde{e}(t)$ は仮想フィードバック誤差信号 ($:= w(t) - y(t)$)、 $\tilde{Q}_\Theta(s)$ は調整パラメータ Θ を含むプレフィルタ統合型 FF 制御器、を表わしている。 $u(t)$ を除くすべての信号は、 m 次元ベクトル値を取る連続時間関数であるとする ($u(t)$ は $\bar{m}$ 次元ベクトル値を取る連続時間関数である)。

まず、プラント $P(s)$ と FB 制御器 $K_{fb}(s)$ に対して、以下の仮定をおく。

(A1) プラント $P(s)$ は、 $m \times \bar{m}$ の多入出力線形時不変系

$$P(s) = (A, B, C, D) \quad (1)$$

であり、行列 A, B, C, D は未知であるとする。

$P(s)$ は安定でなくてもよいが、最小位相であるとする。

(A2) FB 制御器 $K_{fb}(s)$ は $\bar{m} \times m$ の多入出力線形時不変系

$$K_{fb}(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K) \quad (2)$$

であり、制御対象のモデルを用いずに (たとえば PID 設計法などによって) 与えられており、最小位相であるとする。

(A3) $P(s), K_{fb}(s)$ の間で極と零点の消去はなく、

$$P(s)K_{fb}(s) = (A_q, B_q, C_q, D_q) \quad (3)$$

は、 q 次であるとする。さらに、以下の仮定をおく。

(A4) $P(s)$ が未知であることから、閉ループ系

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= (I + P(s)K_{fb}(s))^{-1} P(s)K_{fb}(s) \\ &= (A_p, B_p, C_p, D_p) \end{aligned} \quad (4)$$

も未知となるが、行相対次数 $\rho_1, \dots, \rho_m$ は既知とし、これらの和、最大値をそれぞれ $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$, $\bar{\rho} = \max_{1 \leq i \leq m} \rho_i$ とおく (行相対次数の詳細については、文献 8) を参照)。ただし、 $D_p \neq 0$ のときは、 $\det D_p \neq 0$ であるとする。

以上の前提の下、プレフィルタ $W(s)$ を

$$W(s) = L(s)^{-1}, \quad L(s) = \text{diag}(\ell_1(s), \dots, \ell_m(s)) \quad (5)$$

と設定する。ただし $\ell_i(s)$ は $\ell_i(0) = 1$ となる $\bar{\rho}$ 次 Hurwitz 多項式 ($L(s)$ の全対角要素の次数が $\bar{\rho}$) であり、設計者が任意に与える。

上記仮定より $\tilde{P}(s)$ が安定かつ最小位相であることから、

$$\tilde{P}(s)\tilde{Q}(s) = W(s) \quad (6)$$

を満たす安定バイプロバな FF 制御器 $\tilde{Q}(s)$ が存在する。本論文では、このような $\tilde{Q}(s)$ を、FF 制御器の真値と呼ぶことにする。Fig. 3 において、 $\tilde{Q}_\Theta(s) = \tilde{Q}(s)$ のときは、どのような $r(t)$ に対しても仮想フィードバック誤差が以下のようになる。

$$\tilde{e}(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (7)$$

いま、FB 制御器 $K_{fb}(s)$ によって閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ は安定化されているが、目標値追従特性は十分でないと仮定する。そのため、FF 制御器 $\tilde{Q}_\Theta(s)$ を接続し、 Θ を調整することによって改善を図る。よって、制御目的は、 $y(t)$ が $w(t)$ に追従するように入力信号 $\tilde{u}(t)$ を加えることである。

以下では、まず、閉ループ系に対して直列結合される学習型 FF 制御器の構成を示す。つぎに、学習型 FF 制御器が閉ループ系の逆システムとして動作するよう、Muramatsu ら⁶⁾ の手法を援用し、学習則を導く。さらに、学習則の収束性について解析し、シミュレーションによって提案法の有効性を検討する。

3. 提案法

3.1 プレフィルタ統合型 FF 制御器の構成と真値

FF 信号の真値は、

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{Q}(s)r(t) = \tilde{P}(s)^{-1}W(s)r(t) \quad (8)$$

と与えられる。閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ が未知であるため仮想フィードバック誤差 $\tilde{e}(t)$ を利用して学習パラメータ Θ を調整したい。まず、以下の補題 1 によって、プレフィルタ統合型 FF 制御器の真値を与える。

[補題 1] ν 次モニック Hurwitz 多項式 $f(s) = s^\nu + f_1 s^{\nu-1} + \dots + f_\nu$ を設定し、

$$\begin{aligned} A_f &= I_m \otimes \bar{A}_f, \quad B_f = I_m \otimes \bar{B}_f, \\ \bar{A}_f &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -f_\nu & \cdots & -f_2 & -f_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

とおく。ただし、 $\nu := q - \rho$, $A_f \in \mathbf{R}^{\nu m \times \nu m}$, $B_f \in \mathbf{R}^{\nu m \times m}$ である。このとき、(5) 式の因子 $W(s)$ を統合した FF 制御器の真値は、上記のフィルタ (A_f, B_f) を用いることで、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &= A_f \eta_1(t) + B_f w(t) \\ \dot{\eta}_2(t) &= A_f \eta_2(t) + B_f \tilde{u}_0(t) \\ \tilde{u}_0(t) &= \Theta_0 \eta(t) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\Theta_0 = [F_0, G_0, E_0] \in \mathbf{R}^{m \times \kappa}, \quad (11)$$

$$E_0 = [H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}] \quad (12)$$

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\kappa, \quad \kappa := (2\nu + \bar{\rho} + 1)m, \quad (13)$$

$$\xi_w = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\bar{\rho}} \end{bmatrix} \otimes W(s) \right) r \quad (14)$$

と構成できる。つまり、パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ が存在して、(10) 式の第 3 式が FF 制御器の出力の真値信号 $\tilde{u}_0(t) = \tilde{Q}(s)r(t) = \tilde{P}(s)^{-1}W(s)r(t)$ を実現できる。

(証明) まず、

$$V_F(s) := (sI - A_f)^{-1}B_f = G_F(s)\frac{1}{f(s)}, \quad (15)$$

$$G_F(s) = I_m \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

を定義する。つぎに、これを (10) 式に利用すると、 $r(t)$ から $\tilde{u}_0(t)$ への関係は、

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(t) &= \{I_m - G_0 V_F(s)\}^{-1} \{F_0 V_F(s)W(s) + H_0 W(s) \\ &\quad + J_{01}sW(s) + \dots + J_{0\bar{\rho}}s^{\bar{\rho}}W(s)\}r(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$= [\tilde{X}(s)]^{-1}\tilde{Y}(s)W(s)r(t), \quad (18)$$

$$:= \tilde{Q}_{\Theta_0}(s)r(t), \quad (19)$$

$$\tilde{X}(s) = [f(s)I_m - G_0 G_F(s)], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(s) &= [s^{\bar{\rho}}f(s)J_{0\bar{\rho}} + s^{\bar{\rho}-1}f(s)J_{0(\bar{\rho}-1)} \\ &\quad + \dots + sf(s)J_{01} + f(s)H_0 + F_0 G_F(s)] \end{aligned} \quad (21)$$

と表わされる。これが $\tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ に一致するように、 $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を求めれば良い。これらのパラメータは、極零相殺がなければ、SISO 系では、分母、分子の係数となる。よって、 $r(t)$ から $\tilde{u}_0(t)$ への伝達行列は $\tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ に一致し、これは FF 制御器の真値 $\tilde{Q}(s)$ に等しい。 ■

3.2 学習則

前節のパラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を適切に設定することで、FF 制御器の真値 $\tilde{Q}(s)$ を (18) 式の形式で得ることができる。しかしながら、閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ は未知となるため、本節では Muramatsu ら⁶⁾の発想をもとに、パラメータを調整するための学習則を導く。(10) 式では、FF 制御器の出力の真値信号 $\tilde{u}_0(t)$ を使っているが、これは未知なので、閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ への入力 $\tilde{u}(t)$ を用いると、実際の前置型 FF

制御器 $\tilde{Q}_{\Theta}(s)$ の構成は、以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= A_f \xi_1(t) + B_f w(t) \\ \dot{\xi}_2(t) &= A_f \xi_2(t) + B_f \tilde{u}(t) \\ \tilde{u}(t) &= \Theta(t)\xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\Theta(t) = [F(t), G(t), E(t)] \in \mathbf{R}^{m \times \kappa}, \quad (23)$$

$$E(t) = [H(t), J_1(t), \dots, J_{\bar{\rho}}(t)], \quad (24)$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\kappa \quad (25)$$

ここで、学習パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を調整可能な係数行列 $F(t), G(t), H(t), J_1(t), \dots, J_{\bar{\rho}}(t)$ に置き換え、調整パラメータ行列 $\Theta(t)$ としてまとめている。ただし、学習が開始されるためには、任意の初期値 $\Theta(0) \neq 0$ を与えなければならない。したがって、(22) 式の第 3 式で記述される FF 制御器の出力 $\tilde{u}(t)$ によって閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ への制御入力を与えられる。提案法では、文献 8)~10) と同様に、閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ が有限零点をもたない場合 (SISO では分子が定数の場合) には、 $\nu = 0$ となり、フィルタ $V_F(s)$ は不要となる。

(23) 式のパラメータを調整するために、本手法では、Muramatsu ら⁶⁾と同じ発想で、誤差信号 $\tilde{e}(t)$ を効果的に用いる。これは、 $\tilde{Q}_{\Theta}(s) \rightarrow \tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ が達成されるときに、 $\tilde{e}(t) \rightarrow 0$ になるという基本的な考え方に基づいている。以下、学習則を導くために、 Θ_0 によって線形パラメータ表示される信号を導出する。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(t) - \tilde{u}(t) &= \tilde{P}(s)^{-1}W(s)r(t) - \tilde{P}(s)^{-1}y(t) \\ &= \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e} \end{aligned} \quad (26)$$

の関係を、(11), (13) 式と一緒に使うことで、 $\tilde{u}(t)$ をまず、一時的につぎのように記述する。

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \tilde{u}_0(t) - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \\ &= \Theta_0 \eta(t) - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 式の記述で、 $\eta(t)$ の要素 $\eta_2(t)$ は学習に利用できない。なぜなら、 $\eta_2(t)$ は、未知の信号 $\tilde{u}_0(t)$ を用いて (10) 式の第 2 式によって生成されるからである。その問題を回避するため、(27) 式を、学習に利用できる $\xi(t)$ を用いた形式へ変形する。まず、(10) 式と (22) 式を比較し、両フィルタの安定性から

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(t) &\rightarrow \xi_1(t) \\ \eta_2(t) &\rightarrow \xi_2(t) + V_F(s)\tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

となる。ただし、(26) 式を用いている。以上の準備のもと、(27) 式に (28) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= [F_0, G_0, E_0] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) + V_F(s)\tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Theta_0 \xi(t) + G_0 V_F(s) \tilde{P}(s)^{-1} \tilde{e}(t) - \tilde{P}(s)^{-1} \tilde{e}(t) \\
&= \Theta_0 \xi(t) - (I_m - G_0 V_F(s)) \tilde{P}(s)^{-1} \tilde{e}(t) \quad (29)
\end{aligned}$$

となる.

ここで, (17) 式, (19) 式および $\tilde{Q}_{\Theta_0}(s) = \tilde{P}(s)^{-1} W(s)$ より,

$$\begin{aligned}
&\{I_m - G_0 V_F(s)\} \tilde{P}(s)^{-1} \\
&= \{F_0 V_F(s) + H_0 + s J_{01} + \cdots + s^{\bar{p}} J_{0\bar{p}}\} \quad (30)
\end{aligned}$$

となり, これを (29) 式へ代入すると,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= \Theta_0 \xi(t) - \{F_0 V_F(s) + H_0 \\
&\quad + s J_{01} + \cdots + s^{\bar{p}} J_{0\bar{p}}\} \tilde{e}(t) \quad (31)
\end{aligned}$$

となる. いま, (31) 式の右辺にはプロバでない伝達行列を含むので, 両辺に安定な伝達関数 $\frac{1}{\ell(s)}$ を掛ける. ただし, $\ell(s)$ は $\bar{p}$ 次モニック Hurwitz 多項式であり, 設計者が任意に与える. したがって, 以下のようになる^(注 1).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell(s)} \tilde{u}(t) &= \Theta_0 \frac{1}{\ell(s)} \xi(t) \\
&\quad - \left\{ F_0 V_F(s) \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) + H_0 \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) \right. \\
&\quad \left. + J_{01} s \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) + \cdots + J_{0\bar{p}} s^{\bar{p}} \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) \right\} \quad (32) \\
&= \Theta_0 \tilde{\xi}(t), \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{\ell(s)} \xi(t) - \begin{bmatrix} V_F(s) \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) \\ 0 \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\xi_e = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\bar{p}} \end{bmatrix} \otimes \left(I_m \frac{1}{\ell(s)} \right) \right) \tilde{e} \quad (35)$$

したがって, 未知パラメータに線形な誤差モデル

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\ell(s)} \tilde{u}(t) - \hat{u}(t), \quad \hat{u} = \Theta(t) \tilde{\xi}(t) \quad (36)$$

が構築される. そこで, 固定ゲイン型のパラメータ調整則は, 適当なスカラー α を用いて

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = \alpha \epsilon(t) \tilde{\xi}(t)^T, \quad \alpha > 0 \quad (37)$$

と構成される. つぎに, 可変ゲイン型の調整則は, 誤差モデル (36) 式の逐次最小 2 乗解 (2 乗誤差 $J(\Theta) = \int_0^t \|\epsilon(\tau)\|^2 d\tau$ の最適解) として

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = \epsilon(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t) \quad (38)$$

と構成すればよい^{9), 10)}. ただし, $Z(t)$ は信号ベクトル $\tilde{\xi}(t)$ を含む以下の行列微分方程式の解行列である.

$$\frac{d}{dt} Z(t) = -Z(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t), \quad (39)$$

(注 1) $s^k \frac{1}{\ell(s)}$ ($k = 1, \dots, \bar{p}$) はプロバである.

$$Z(0) = \sigma I, \quad \sigma \gg 1$$

4. 安定性解析

本章では, 提案の MIMO-VFEL の学習則の安定性について, 固定ゲイン型と可変ゲイン型に分けて解析を行なう. 基本的には, 文献 9), 10) の解析手法に従う.

4.1 固定ゲイン型の学習則の安定性

まず, パラメータの誤差

$$\Psi(t) := \Theta(t) - \Theta_0 \quad (40)$$

を考え, (36) 式に (33) 式を用いると

$$\epsilon(t) = \Theta_0 \tilde{\xi}(t) - \Theta(t) \tilde{\xi}(t) = -\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \quad (41)$$

を得る. これを, (37) 式に代入すると,

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = -\alpha \Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T, \quad \alpha > 0 \quad (42)$$

となる. ここで, (40) 式を時間微分し, (42) 式を代入することで,

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = -\alpha \Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T, \quad \alpha > 0 \quad (43)$$

が得られる. この系の安定性は以下の補題 2 によって確認できる.

[補題 2] $\tilde{\xi}(t)$ を有界な任意の時変ベクトルとすると, 行列微分方程式 (43) の解は, $\Psi_0 \tilde{\xi}(t) = 0$ であるような定数行列 Ψ_0 に収束する. もしも, $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば, Ψ_0 は零行列に等しい.

(証明) 付録 A を参照. ■

4.2 可変ゲイン型の学習則の安定性

以下, 可変ゲイン型の学習則 ((38) 式と (39) 式) の安定性について考える^{11), 12)}. まず,

$$A(t) := \sigma^{-1} I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \quad (44)$$

とおくと, よく知られた公式

$$\frac{d}{dt} (A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt} A(t) \right) A(t)^{-1}$$

により, $Z(t) = A(t)^{-1}$ は方程式 (39) の解であることがわかる. つぎに, 初期値 $\Theta(0) = \Theta_*$ に対して

$$\Theta(t) := \left(\sigma^{-1} \Theta_* + \Theta_0 \int_0^t \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right) Z(t) \quad (45)$$

とおくと, これは方程式 (38) を満たすことが (33), (36) 式より示される. これらの準備の下, つぎの補題 3 が得られる.

[補題 3] $\tilde{\xi}(t)$ を有界な任意の時変ベクトルとし, 可変ゲイン型の学習則 ((38) 式と (39) 式) を用いる. このとき, (40) 式に定めるパラメータの誤差 $\Psi(t)$ は, 定数行列 Ψ_0 に収束する. もしも, $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば, Ψ_0 は零行列に等しい.

(証明) 付録 B を参照. ■

補題 2, 3 によりつぎの定理を得る.

《定理 1》 信号 $\tilde{\xi}$ が PE 条件を満たすとの仮定の下, 固定ゲイン型あるいは可変ゲイン型の学習則 (37), (38) 式により制御目的

$$\tilde{e}(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が達成される.

(証明) 学習パラメータが真値に収束するので, 漸近的に

$$\tilde{u}(t) \rightarrow \tilde{u}_0(t)$$

が成立する. したがって, $y(t) \rightarrow w(t)$ より, $\tilde{e}(t) \rightarrow 0$ となるため, 定理が成立する. ■

5. シミュレーション

5.1 SISO プラント

本節では, 矩形波を目標軌道とし, シミュレーションにより, 提案法と従来法とを比較する. 特に, 従来法 6), 9), 10) における問題点, すなわち, 正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に挿入されてしまう時変ブロック (以下, ループ $G(t)$ と呼ぶ) の影響に対して検討を行なう.

まず, 従来法 9), 10) について検討する. SISO プラント

$$P(s) = \frac{s+1}{(s^2+s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{s^3+3s^2+3s+2}$$

を考える. このプラントの相対次数は 2 であるから, $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると, プレフィルタは, $W(s) = L(s)^{-1}$ となる. この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は,

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられる. また, $\nu = 3 - 2 = 1$ より, 行列 A_f, B_f は 1 次元となる (このことから, FEL 制御系に対して, ループ $G(t)$ が挿入されることがわかる). よって, FF フィルタを $A_f = [-a]$, $B_f = [1]$, $a = 1.5$ とする. また, FB 制御器には, PI 制御器 $K_{fb}(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$ を用いる. 以下のシミュレーションでは, 目標軌道として, 振幅 1, 周期 5 sec の矩形波を用いる. また, 固定ゲイン型の学習則を用い, 固定ゲイン $\alpha = 0.1$ と設定している. 従来法 9), 10) による目標軌道追従特性を Fig. 4 に示している. Fig. 4 からわかるとおり, 従来法ではループ $G(t)$ の影響を受け, 閉ループ系が不安定化し, 目標軌道追従誤差が発散してしまう.

いま, ループ $G(t)$ の影響によって, 閉ループ系が不安定化したことを確認するために, Fig. 5 の構成にて追加シミュレーションを試みる. シミュレーションの条件は前のものと同じである. Fig. 5 は, 先程検討したオリジナルの FEL 制御系 (Block A) とループ $G(t)$ のみをもつ FEL 制御系 (Block B) の 2 ブロックからなり, 全く同じ閉ループ系を核として構成されている. これらのブロックは, 1 つの外生信号 $r(t)$ を入力信号として, Block A では信号 $y(t)$ を, Block B では信号 $y_2(t)$ を出力する. そして, Block B のパラメータ行列

$G(t)$ は, Block A のそれに完全に同期して発展する.

Fig. 6 に Fig. 5 の Block B における目標軌道追従特性を示している. Fig. 6 から, Block B の出力 $y_2(t)$ が不安定化していることがわかる. すなわち, 本例題においては, ループ $G(t)$ の影響が顕著に現れて閉ループ系の安定性が乱れてしまい, Fig. 4 に示すように, Block A の出力 $y(t)$ が不安定化してしまったといえる.

つぎに, 提案法について検討する. 上記と同じ SISO プラント $P(s)$ および FB 制御器 $K_{fb}(s)$ を用いる. このとき, 閉

Fig. 4 Tracking by a conventional scheme: SISO case

Fig. 5 Testing conventional FEL scheme consists of block A and block B

Fig. 6 Testing the conventional scheme with block B: SISO case

ループ系は,

$$\tilde{P}(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 1}$$

であり, $q = 4$, また閉ループ系の相対次数は 2 となるから, $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると, プレフィルタは, $W(s) = L(s)^{-1}$ となる. また, $\nu = 2$ より, 行列 A_f, B_f は 2 次元となる (FEL 制御系がループ $G(t)$ をもつことがわかる). よって, FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2a \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a = 1.5$$

とする. 以下のシミュレーションでは, 従来法と同様に, 目標軌道として, 振幅 1, 周期 5 sec の矩形波を用いる. また, 固定ゲイン型の学習則を用い, 固定ゲイン $\alpha = 2$ と設定している. 提案法による目標軌道追従誤差を Fig. 7 に示している (ここでは, 簡単のため, 誤差のみを示す). 提案法はループ $G(t)$ をもつにもかかわらず, 良好な目標軌道追従を達成できていることがわかる. ただし, Fig. 7 に示しているとおり, 目標軌道追従誤差の収束はきわめて遅い. これは, 従来法と VFEL との比較を行なうために固定ゲイン型を用いたためである. 5.2 節で述べるよう, 可変ゲイン型を用いれば収束速度ははるかに速いが, 従来法における過渡状態と比較する必要から, 収束速度をあえて遅くするために固定ゲイン型を用いている.

Fig. 7 Tracking error by the scheme of VFEL (fixed gain type)

5.2 MIMO プラント

本節でも同様, 矩形波を目標軌道とし, シミュレーションにより, 提案法と従来法とを比較する. SISO の場合と同様, 特に, ループ $G(t)$ の影響に対して検討を行なう.

まず, 従来法^{9), 10)}について検討する. MIMO プラント

$$P(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 1 & -2s - 19 \\ 2s^2 + 9s + 7 & s^2 + 5s - 18 \end{bmatrix},$$

$$d(s) = s^3 + 8s^2 + 19s + 23$$

を考える. このとき, 行相対次数は 1, 1 であるから, $L(s) = \text{diag}((1/6)s + 1, (1/7)s + 1)$ と定めると, プレフィルタは, $W(s) = L(s)^{-1}$ となる. よって, この最小実現 (A_w, B_w, C_w)

は,

$$A_w = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

と与えられる. また, $\nu = 3 - 2 = 1$ より, 行列 A_f, B_f は 2 次元となる (FEL 制御系に対して, ループ $G(t)$ が挿入されることがわかる). よって, FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a = 3$$

とする. また, FB 制御器は, $K_{fb}(s) = \text{diag}[0.5, 0.5]$ を用いる. 以下のシミュレーションでは, 振幅と周期が異なる 2 種類の矩形波を用いる. すなわち, $r = [r_1, r_2]^T$, r_1 は振幅 1, 周期 5 sec, r_2 は振幅 0.8, 周期 4 sec, を用いる. また, 可変ゲイン型の学習則を用い, $\sigma = 200$ と設定している. 従来法^{9), 10)}による目標軌道追従特性を Fig. 8 に示している. Fig. 8 からわかるとおり, 従来法ではループ $G(t)$ の影響を受け, 閉ループ系が不安定化し, 目標軌道追従誤差が発散してしまう.

Fig. 8 Tracking by a conventional scheme: MIMO case

いま, ループ $G(t)$ の影響によって閉ループ系が不安定化したことを確認するために, SISO の場合と同様, Fig. 5 に基づく追加シミュレーションを試みる. シミュレーションの条件は前のものと同じである. ここに, Fig. 5 の Block B における目標軌道追従特性を Fig. 9 に示す. Fig. 9 から, Block B の出力 $y_2(t) = [y_{2.1}(t), y_{2.2}(t)]^T$ が不安定化していることがわかる. このことから, 本例題においても, ループ $G(t)$ の影響が顕著に現れて閉ループ系の安定性が乱されてしまったことがわかる. よって, Fig. 8 に示すように, Block A の出力 $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ が不安定化してしまったといえる.

つぎに, 提案法について検討する. 上記と同じ MIMO プラント $P(s)$ および FB 制御器 $K_{fb}(s)$ を用いる. このとき, 閉ループ系は,

$$\tilde{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$P_{11}(s) = \frac{0.5}{s + 4.5}, P_{21}(s) = \frac{1}{s + 4.5},$$

$$P_{12}(s) = \frac{-s - 9.5}{s^3 + 9s^2 + 23.75s + 15.75},$$

$$P_{22}(s) = \frac{0.5s^2 + 2.75s - 7.75}{s^3 + 9s^2 + 23.75s + 15.75}$$

Fig. 9 Testing the conventional scheme with block B: MIMO case

であり, $q = 3$ で, 閉ループ系の行相対次数は 1, 1 となるから, $L(s) = \text{diag}((1/6)s + 1, (1/7)s + 1)$ と定めると, プレフィルタは, $W(s) = L(s)^{-1}$ となる. また, $\nu = 3 - 2 = 1$ より, 行列 A_f, B_f は 2 次元となる (FEL 制御系がループ $G(t)$ をもつことがわかる). よって, FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a = 3$$

とする. 以下のシミュレーションでは, 従来法と同じ矩形波の目標軌道を用いる. また, 可変ゲイン型の学習則を用い, $\sigma = 5 \times 10^4$ と設定している. 提案法による目標軌道追従特性を Fig. 10 に示している. 提案法はループ $G(t)$ をもつにもかかわらず, MIMO においても良好な目標軌道追従を達成できていることがわかる. 最後に, 提案法における学習パラメータ $\Theta(t)$ は短時間で収束することを確認したので, ここに付記しておく.

Fig. 10 Tracking properties by the scheme of MIMO-VFEL (variable gain type)

6. おわりに

本論文では, 正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に時変ブロックが挿入されてしまう問題を解決するため, 仮想フィードバック誤差学習を提案した. すなわち, 閉ループ系に対して, 学習型 FF 制御器を直列結合し, 仮想フィードバック誤差をもとに学習を行なう新しい FEL 制御系を提案した. これにより, 閉ループ系への信号入力点が従来の 2 点から 1 点に削減されるため非正方のプラントに対しても適用可能となり, また, FF 制御信号の接続によるプラントの直前への入力外乱としての影響をも排除できる.

さらに, 閉ループ系の逆システムを構成するために, 従来法と若干異なるタイプのプレフィルタ統合型 FF 制御器を導入した. また, Muramatsu らの手法を援用し, 仮想フィードバック誤差に基づく学習則を導いた. (MIMO 系では行列の積が非可換であるためこの拡張は自明ではない).

なお, 本論文で議論しなかった PE 条件を満たさない場合の仮想フィードバック誤差信号の収束性については, 今後の課題としたい.

参考文献

- 1) M. Kawato, K. Furukawa and R. Suzuki: A hierarchical neuralnetwork model for control and learning of voluntary movement, *Biol. Cybern.*, **57**-3, 169/185 (1987)
- 2) A. Miyamura and H. Kimura: Stability of feedback error learning scheme, *Systems & Control Letters*, **45**-4, 303/316 (2002)
- 3) B. Alali, K. Hirata and K. Sugimoto: Generalization of Feedback Error Learning (FEL) to MIMO Systems, 計測自動制御学会論文誌, **43**-4, 293/302 (2007)
- 4) B. Alali, K. Hirata and K. Sugimoto: Feedback Error Learning for Writing One Stroke Characters by Two-Link Manipulator, システム制御情報学会論文誌, **20**-12, 475/481 (2007)
- 5) K. Sugimoto, B. Alali, and K. Hirata: Feedback Error Learning with Insufficient Excitation, *IEICE Trans. Fundamental*, **E91-A**-10, 3071/3075 (2008)
- 6) E. Muramatsu and K. Watanabe: Feedback error learning control without recourse to positive realness, *IEEE Trans. Automatic Control*, **49**-10, 1762/1767 (2004)
- 7) 斎藤, 羅, 渡辺, 村松, 藤井: 未知の動的環境におけるロボット の 2 自由度適応力追従制御, システム制御情報学会論文誌, **18**-6, 203/212 (2005)
- 8) 野口, 杉本: プレフィルタの状態を利用したフィードバック誤差学習, システム制御情報学会論文誌, **23**-5, 105/110 (2010)
- 9) 野口, 杉本: 正実性によらない多入出力フィードバック誤差学習—プレフィルタ統合型学習則の改善—, システム制御情報学会論文誌, **24**-3, 61/72 (2011)
- 10) K. Sugimoto and M. Noguchi: Improved Feedback Error Learning with Prefilter State Variables and RLS Criterion, *IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC)*, 41/46 (2010)
- 11) S. Sastry: *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*, Prentice Hall, NJ, U.S.A (1989)
- 12) P.A. Ioannou and B. Fidan: *Adaptive Control Tutorial*, Advances in Design and Control, SIAM (2006)

《付 録》

A. 補題 2 の証明⁹⁾

(証明) リアプノフ関数

$$V(t) = \frac{1}{2} \text{tr} [\Psi(t)^T \Psi(t)] \quad (\text{A.1})$$

を定義すると, この (43) 式に沿った時間微分は,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \text{tr} [\Psi(t)^T \dot{\Psi}(t)] = -\alpha \text{tr} [\Psi(t)^T \Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T] \\ &= -\alpha \|\Psi(t) \tilde{\xi}(t)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と計算される. これにより, $\dot{V}(t) \rightarrow 0$. よって, $\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ となる. そして, (43) 式において $\tilde{\xi}(t)$ が有界なので, $\frac{d\Psi(t)}{dt} \rightarrow 0$

となる。したがって、 $\Psi(t) \rightarrow \Psi_0$ となり、このとき $\Psi_0 \tilde{\xi}(t) = 0$ である。

さらに、もしも、 $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば、このとき学習則は大域的に指数安定である。すなわち、“PE と指数安定性定理”^{11), 12)} に基づき $\Psi(t) \rightarrow 0$ である（詳細は、文献 9) 付録 3. の公式を (43) 式に適用することによって示される）。

B. 補題 3 の証明⁹⁾

(証明) まず、前半部分の証明を行なう。リアプノフ関数

$$V(t) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[Z(t)^T Z(t) \right] \quad (\text{B.1})$$

を定義すると、この (39) 式に沿った時間微分は、

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \text{tr} \left[Z(t)^T \dot{Z}(t) \right] \\ &= \text{tr} \left[Z(t)^T \left(-Z(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t) \right) \right] \\ &= -\text{tr} \left[Z(t)^T Z(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t) \right] \\ &= -\left\| Z(t) \tilde{\xi}(t) \right\|_{Z(t)}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と計算される。ここに、 $Z(t) = Z(t)^T \geq 0, \forall t \geq 0$ を用いている。これにより、 $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ 。よって、 $Z(t) \tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ となる。そして、(39) 式において $\tilde{\xi}(t)$ が有界なので、 $\frac{dZ(t)}{dt} \rightarrow 0$ となる。したがって、 $Z(t) \rightarrow \bar{Z}$ となり、このとき $\bar{Z} \tilde{\xi}(t) = 0$ である。よって、(39) 式は、非増加関数（減衰関数）であり、 $Z(t)$ は、 $t \rightarrow \infty$ のとき定数行列 $\bar{Z}$ に収束する。さて、(40) 式に定めるパラメータの誤差 $\Psi(t)$ に関する恒等式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Psi(t) Z(t)^{-1}) &= \left(\frac{d}{dt} \Psi(t) \right) Z(t)^{-1} + \Psi(t) \left(\frac{d}{dt} Z(t)^{-1} \right) \\ &= -\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t) Z(t)^{-1} \\ &\quad + \Psi(t) \left\{ -Z(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt} Z(t) \right) Z(t)^{-1} \right\} \\ &= -\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T \\ &\quad - \Psi(t) Z(t)^{-1} \left(-Z(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t) \right) Z(t)^{-1} \\ &= -\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T + \Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

を得ることができるため、初期値を $Z(0), \Psi(0)$ とするとき、

$$\Psi(t) Z(t)^{-1} = \Psi(0) Z(0)^{-1} = \sigma^{-1} \Psi(0) = \text{const} \quad (\text{B.4})$$

である。したがって、(B.4) 式より、

$$\Psi(t) = \sigma^{-1} \Psi(0) Z(t) \quad (\text{B.5})$$

となることから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \sigma^{-1} \Psi(0) \bar{Z} = \Psi_0 = \text{const} \quad (\text{B.6})$$

であることがわかる。

つぎに、後半部分の証明を行なう。(44), (45) 式を用いることで、パラメータの誤差 $\Psi(t)$ は、次式のように記述できる。

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Theta(t) - \Theta_0 \\ &= \left[\sigma^{-1} \Theta_* + \int_0^t \Theta_0 \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right] \\ &\quad \times \left[\sigma^{-1} I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} - \Theta_0 \\ &= \sigma^{-1} (\Theta_* - \Theta_0) \left[\sigma^{-1} I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \\ &= \sigma^{-1} \Psi(0) \left[\sigma^{-1} I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

したがって、 $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たせば、 $t \rightarrow \infty$ のときに、

$$\left[\sigma^{-1} I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau) \tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \rightarrow 0 \quad (\text{B.8})$$

となり（詳細は、文献 9) の零行列への収束に関する証明を参照）、よって、 $\Psi(t) \rightarrow 0$ となる。

[著 者 紹 介]

野 口 慎 (正会員)

2006 年米子工業高等専門学校専攻科生産システム工学専攻修了、同年大学評価・学位授与機構より学士を授与、2008 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程情報システム学専攻修了（修士）、2011 年同研究科博士後期課程修了（博士）、現在は鳥取県産業技術センター研究員。在学中はフィードバック誤差学習の研究などに従事。システム制御情報学会の会員。

杉 本 謙 二 (正会員)

1982 年京都大学大学院修士課程修了後、三菱電機、京都大学、岡山大学、名古屋大学を経て奈良先端科学技術大学院大学教授となり現在に至る。制御理論に関する研究に従事。工学博士。IEEE、システム制御情報学会の会員。2007 年計測自動制御学会、2010 年システム制御情報学会からそれぞれ論文賞受賞。