円制限三体問題のラグランジュポイントの安定性に関する 陰的制御的考察

坂 東 麻 衣*・大須賀 公 一**
藤 井 隆 雄***・山 川 宏****

Implicit Control Structure in Lagrangian Points of Circular-restricted Three-body Problem

Mai BANDO*, Koichi OSUKA**,
Takao FUJII*** and Hiroshi YAMAKAWA****

If two bodies move in circular orbits about their common centre of mass and the mass of the third body is too small to affect the motion of the other two bodies, the problem of the motion of the third body is called circular restricted three-body problem (CR3BP). This system has five equilibrium points which is known as Lagrangian points. Among five equilibrium points, L_4 and L_5 Lagrangian points are stable while L_1 , L_2 and L_3 are unstable. In this paper, we consider the motion in the vicinity of the $L_{4,5}$ Lagrangian points where the implicit control structure provides an insight into the control structure underlying the problem.

Key Words: three-body problem, implicit control, inverse problem of optimal control

1. はじめに

太陽-地球-月のように、お互いに相互作用する3つの物体の運動を扱う問題を3体問題という。3つ目の物体の質量が他の2体の運動に影響を及ぼさないほど小さい場合の、3体目の運動を考える問題を制限3体問題という。特に、共通重心のまわりを円運動する2つの天体からの万有引力をうける、十分に小さい質点の運動を考える問題は円制限三体問題とよばれ、ラグランジュポイントとよばれる5つの平衡点が存在することが知られている¹⁾。5つのラグランジュポイントのうち、2天体を結ぶ直線上にある L_1 , L_2 , L_3 点はすべて不安定であるのに対し、2天体を底辺とする正三角形の頂点にある L_4 , L_5 点は(リアプノフの意味で)安定な平衡点である。実際、太陽-木星系の L_4 点にはトロヤ群と呼ばれる小惑星群が

Fig. 1 Trojan asteroids

存在することが知られており²⁾、トロヤ群のように L_4 点に位置する小惑星は他の太陽-惑星系にも存在している(Fig. 1)。また、2つの重心により近似されるピーナツ型の形状をもつ小惑星(Fig. 2)³⁾近傍の $L_{4,5}$ 点に置かれた物体の運動もまた円制限三体問題と同様の安定性をもつことが知られている^{4), 5)}。 $L_{4,5}$ 点は、2質点の重力場と遠心力を導く回転運動の場のポテンシャルを考えたとき、その極大点となっている。このことから、通常、安定な平衡点はポテンシャルの極小点で、平衡点からの微小変位は運動エネルギーの減少をもたらすのに対し、 $L_{4,5}$ 点においては、それとは逆のメカニズムにより安定化されていることがわかる。本研究では、円制限三体問題の $L_{4,5}$ 点の安定性を陰的制御の観点から考察する。本稿では、力学現象である円制限三体問題におけるラグランジュポイントの安定性の表出を、あえて制御則が内在しているか

* 京都大学宇宙総合学研究ユニット 宇治市五ヶ庄

** 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

*** 福井工業大学経営情報学科 福井市学園 3-6-1

**** 京都大学生存圏研究所 宇治市五ヶ庄

* Unit of Synergetic Studies for Space, Kyoto University, Gokasho, Uji

** Graduate School of Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita

*** Department of Management Information Science, Fukui University of Technology, 3-6-1 Gakuen, Fukui

**** Research Institute for Sustainable Humanosphere, Kyoto University, Gokasho, Uji

(Received April 1, 2011)

(Revised April 24, 2012)

Fig. 2 25143 Itokawa³⁾

らだという捉え方をする．そのような見方をするこゝで、天体の運動に対してこれまでとは違った思考が生まれ、新たな展開が期待できると考えられる．そのための第一歩としてここでは、(i) 想定する陰的制御に何らかの意味があるか、(ii) 陰的制御に陽的制御を付加したものに何らかの意味をもたせることができるか、について考察する．

構成は以下のとおりである．2章で、陰的制御という考え方を導入する．3章では、円制限三体問題とその平衡点について説明する．4章では、円制限三体問題における陰的制御として、3つの状況を考える．5章では、4章で考えた陰的制御の最適性について論じ、さらに陽的制御を付加することで漸近安定化をする際に生まれる差異について述べる．6章はまとめとし、陰的制御を導入することで示唆される結論と今後の展開について考察する．

2. 陰 的 制 御

2.1 陰的制御の定義

本章では天体力学と制御工学との橋渡しの役割を担う陰的制御の考え方を紹介する．

一般に何かを制御する場合、「まず制御対象が与えられ、つぎに制御則が装着され、そして制御系が構成される」という流れを考える．もちろん、そのような過程を踏むこともあるが、たとえば生物の制御系を考え、そこから思いを巡らせてみると、制御系における制御対象と制御則の境界は不明瞭であり、さらには制御対象と環境との境界も果たして明確に区別できるのだろうかという疑問が湧き出てくる．さらによく考えてみると、生物に限らず人工物あるいは広く自然物であっても、必ずしも、はじめに制御対象が用意されてそこに制御則が装着された結果制御系が構成されたわけではなく、同時発生的に制御系が構成されたとみなすことができる場合も多々ある．すなわち、これら三者（制御対象、制御則、環境）は区別できないほうがむしろ自然である場合がある．したがって、そのような考え方で一般的な制御系をブロック線図で表現しようとする（通常のブロック線図ではなく）、Fig. 3 のようになるという捉え方が成り立つ．

さて、このような議論をより深く進めるにあたって、議論展開が不明確にならないためには、制御対象や制御則などの用語を改めて定義しておかねばならない．そしてそのためには、定義の起点として、その対象物を注目している「主体とその意

Fig. 3 General structure of control system

図」の存在を仮定することからはじめよう⁶⁾．その上ですべてが含まれている空間全体を「環境： E (Environment)」とする．その中に、主体の「意図（あるいはそれによって生成された運動目的）： T (Task)」が存在し、それに従って運動させたいと意図されている考察の対象が存在しているとする．

このとき、その対象のことを「制御対象： P (Plant)」と呼ぶ．すなわち

$$P = P(T) \quad (1)$$

である．そして、環境の一部分であって制御対象 P を含み、かつ、特にいま注目している意図 T に直接関連し、その意図の達成に効果的に働く集合が存在する場合、それを「場： F (Field)」と定義する．環境 E は主体とその意図 T とは無関係に存在しているが、場 F は意図 T や制御対象 P に依存して存在・不存在が定まることがあり、あるいは、物理的には存在していても意図 T に因って場 F としての意味が表出したり消失したりすると考えている．すなわち

$$F = F(E, T, P) \quad (2)$$

である．上式における T や P の寄与度は場合によって異なる．またいうまでもなく、環境 E の変化に応じて場 F も変化する．つぎに、意図 T 、場 F 、制御対象 P が存在する中で、制御対象 P を意図 T にそって運動させるのに有効に働く要素がある場合、それを「制御則 C (Control Law)」と呼ぶ．すなわち

$$C = C(T, F, P) \quad (3)$$

である．

最後に、場 F 、制御対象 P 、制御則 C をあわせた全体を「制御系 S (Control system)」と呼ぶ．すなわち

$$S = S(F, P, C) \quad (4)$$

である．

われわれはこれまでに、いくつかの事例を考察し発展させた結果、Fig. 3 で表現されている「要素間の重なり」を、それらの間に「制御則的な働きを果たす何らかの要素が挟み込まれている」と捉えることで形式的に分離することが一つの有効な考え方であろうという推察を得るに至った．すなわち、

Fig. 4 Implicit and explicit control law

Fig. 3 のように見える制御系を Fig. 4 のように見なすことを提案している^{6), 7)}.

そして、もし何らかの制御則が埋め込まれていると見なせるならば、その部分の制御則をつぎのように定義しよう。

定義 2.1. 陰的制御則と陽的制御則：意図 T ，制御則 C と制御対象 P あるいは場 F との相互作用の結果，制御対象や場にある種の制御則が存在するとみなされるとき，その制御則を「陰的制御則 C_I (Implicit Control Law)」と呼び，制御則から陰的制御則を除いたものを「陽的制御則 C_X (Explicit Control Law)」と呼ぶ。すなわち，制御則 C (Control Law) は陰的制御則と陽的制御則の合成で構成される^(注1)。次式参照。

$$C = C_I \oplus C_X \quad (5)$$

演算 $A \oplus B$ は要素 A と B との間に共通要素がないとしたときの複合を意味するものとする。

2.2 陰的制御に関する考察

本節では，次章以降の議論を想定して，陰的制御と陽的制御の働きについて，簡単な例を使って考察する。

具体例として，たとえば不安定な制御対象

$$\langle S \rangle: \dot{x} = ax \quad (6)$$

を考え (a は定数)，以下では $\langle S \rangle$ を漸近安定化する過程を段階的に構築してみよう。

まず，制御対象 $\langle S \rangle$ と場との相互作用によって，陰的制御則が生まれ，つぎのようなシステムになっているとする。

$$\langle S_1 \rangle: \dot{x} = (a + f)x \quad (7)$$

ただし， f は適当な定数であり，これが陰的制御則のゲインになっており，この効果によって，制御対象 $\langle S \rangle$ はある程度安定になっているとする。すなわち，陰的制御則はもと

(注1) この考え方は自律分散システム⁸⁾，創発システム⁹⁾，そして移動知¹⁰⁾の研究の流れをくむものである。

もと不安定であった制御対象をできるだけ安定化することはできるが漸近安定にするほどの能力はないという状況を想定する。

そこでつぎにわれわれは，本システムに陽的制御 u を加えられるようにすることで $\langle S_1 \rangle$ を漸近安定化することを目指す。すなわち，

$$\langle S_2 \rangle: \dot{x} = (a + f)x + u \quad (8)$$

なるシステムを構築し， $\langle S_2 \rangle$ の安定化を考えるとしよう。ここで，陽的制御 u の設計には自由度があるが，たとえばつぎの評価関数 ($q > 0$)

$$J = \int_0^\infty (qx^2 + u^2)dt \quad (9)$$

に対する最適制御則を求めることは合理的であろう。そうすると，本問題に対する最適制御則（陽的制御）は次式のように求まる。

$$u = u_2 = -k_2x \quad (10)$$

ただし，

$$k_2 = a + f + \sqrt{(a + f)^2 + q} \quad (11)$$

である。

さて，ここでつぎのシステムを考えよう。

$$\langle S_3 \rangle: \dot{x} = ax + (fx + u_2) \quad (12)$$

本システムは，陰的制御則と付加的に設計した陽的制御則をあわせた制御則が，もともとの制御対象に対してどのような意味があるか（意味をもたせることができるか）を検討するためのシステム表現である。すなわち，制御対象 $\langle S \rangle$ に対して入力

$$u_3 = fx + u_2 = -kx \quad (13)$$

を考える。ただし，

$$k = -f + \left(a + f + \sqrt{(a + f)^2 + q} \right) \quad (14)$$

$$= a + \sqrt{(a + f)^2 + q} \quad (15)$$

である。

これが，

$$\langle S_3^* \rangle: \dot{x} = ax + u \quad (16)$$

の何らかの最適制御になっているかを確認しよう（逆最適）。それには，上の制御則ゲイン k が，未知定数 $q_x > 0$ を含む評価関数

$$J_x = \int_0^\infty (q_x x^2 + u^2)dt \quad (17)$$

を考えたときの最適制御則ゲイン

$$k_x = a + \sqrt{a^2 + q_x} \quad (18)$$

と一致するような定数 $q_x > 0$ が逆算できればよい。そこで，

$k = k_x$ とおくことにより, 求めるべき q_x が満たすべき関係式がつぎのように求まる.

$$q_x = f^2 + 2af + q > 0 \quad (19)$$

ただし, 本式は常に成り立つものではない. 本式が成り立つための必要十分条件は, 本式は f の 2 次方程式とみなすことができるので,

$$D = a^2 - q \quad (20)$$

とすれば, つぎの 2 つのケースが得られる.

Case 1 $D < 0$ ($a^2 < q$) のときは f にかかわらず常に $q_x > 0$ となり, その結果, k は $< S_3^* >$ に対する最適ゲインになっている.

Case 2 $D \geq 0$ ($a^2 \geq q$) のときは

$$f \leq -a - \sqrt{a^2 - q} \quad (21)$$

のとき $q_x > 0$ となるので, 本条件を満たすとき k は $< S_3^* >$ に対する最適ゲインになっている (注 2).

以上からいえることは, つぎのようなことである. 「ある制御対象 ($< S >$) に対して陰的制御を加えたもの ($< S_1 >$) に対して陽的制御として最適制御則を設計したとき, その入力と陰的制御による入力もあわせたものが元の制御対象に対して最適になっていることがある. その条件は, (i) $< S_1 >$ に対する最適制御を考えるとときの評価関数において状態に対する重み q の値が大きいときは常に最適ゲインとなる (定量的には Case 1), (ii) q の値が小さいときは, f の大きさに制限が加わる (定量的には Case 2), のいずれかが成り立つことである.」

3. 円制限三体問題

3.1 円制限三体問題

質量が m_1, m_2 の天体からの引力のもとで運動する質点 m の物体の運動を考える. m が m_1, m_2 に比べて十分小さいとき, 2 つの質点は二体問題の解であるケプラー運動を行なう. このように, 3 体のうち 1 体の質量をゼロと考え, 質量ゼロの天体はこの 2 体の引力のもとで運動を行なうとする問題を制限三体問題という (詳しい導出は付録を参照). 特に 2 つの質点の運動が円運動である場合を円制限三体問題という. 円運動の角速度を Ω とすると, 2 質点の重心に固定した回転座標系における質点 m の物体の運動方程式は,

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x = -\frac{Gm_1}{r_1^3}(x + \mu d) - \frac{Gm_2}{r_2^3}[x - (1 + \mu)d] \quad (22)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = -\frac{Gm_1}{r_1^3}y - \frac{Gm_2}{r_2^3}y \quad (23)$$

$$\ddot{z} - \frac{Gm_1}{r_1^3}z - \frac{Gm_2}{r_2^3}z \quad (24)$$

(注 2) 条件 $f > -a + \sqrt{a^2 - q}$ も出てくるが今の問題設定においては無意味であるので外す.

Fig. 5 Restricted three-body problem

である^{1),2)}. ここで m_1, m_2 は 2 天体の質量, G は万有引力定数, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ は質量比, d は 2 天体の間の距離であり, 座標系の原点は天体の重心にとった (Fig. 5). 擬似ポテンシャル W を

$$W = U + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (25)$$

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \quad (26)$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu d)^2 + y^2 + z^2} \quad (27)$$

$$r_2 = \sqrt{[x - (1 + \mu)d]^2 + y^2 + z^2} \quad (28)$$

と定義すると, (22)~(24)式は

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (29)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad (30)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (31)$$

と表わされる. (25)の第一項は重力ポテンシャル, 第二項は遠心力を導くポテンシャルに対応している.

一方, ケプラーの第 3 法則 $G(m_1 + m_2) = \Omega^2 d^3$ を使うと,

$$Gm_1 = (1 - \mu)\Omega^2 d^3, \quad Gm_2 = \mu\Omega^2 d^3 \quad (32)$$

という関係が得られる. (32)式の関係式を考慮すると, (22)~(24)式は, 角速度 Ω を用いて

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x = -\frac{(1 - \mu)\Omega^2 d^3}{r_1^3}(x + \mu d) - \frac{\mu\Omega^2 d^3}{r_2^3}[x - (1 + \mu)d] \quad (33)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = -\frac{(1 - \mu)\Omega^2 d^3}{r_1^3}y - \frac{\mu\Omega^2 d^3}{r_2^3}y \quad (34)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1 - \mu)\Omega^2 d^3}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z \quad (35)$$

と表わされる.

3.2 円制限三体問題の平衡点

円制限三体問題においては, 三体が特殊な配置にあるとき平衡解をもつことが知られている. 以下では, 平面運動 ($z = \dot{z} = 0$) を考える. (33)~(35)式の平衡点は, 2 天体を結ぶ直線上 ($y = 0$) で重力と遠心力がつりあう直線解 (L_1, L_2, L_3 点とよぶ) と, $y \neq 0$ の三角形解 (L_4, L_5 点とよぶ) に分類

Fig. 6 Lagrangian points

され、三角形解は、2天体を底辺とする正三角形の頂点

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} d/2(1-2\mu) & \sqrt{3}d/2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

で与えられる。これらの平衡点はラグランジュ点とよばれる (Fig. 6)。

つぎに、平衡点におけるシステム (33)~(34) の安定性を考える。 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T$ とおくと、(33)~(34) 式の状態方程式表現は、

$$\dot{\mathbf{x}} = A_0 \mathbf{x}, \quad (37)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} & 0 & 2\Omega \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} & -2\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

となる。ここで $\mathbf{r}$ は原点から質点 m へのベクトル (Fig. 5 参照)、 $\mathbf{r}_0$ は質点 m が平衡点にあるときの $\mathbf{r}$ である。簡単のため $\mu < 0.5$ とする。行列 A の特性方程式は

$$\lambda^4 + (4\Omega^2 - a - c)\lambda^2 + ac - b^2 = 0 \quad (39)$$

で与えられる。ここで

$$a = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, b = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, c = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \quad (40)$$

とおいた。 $L_1 \sim L_5$ 点の安定性を判定すると、 $L_{1,2,3}$ はすべての μ で不安定であるのに対し、正三角形解 $L_{4,5}$ 点においては、 $\mu < 0.03852$ で安定であることがわかる。実際、固有値は

$$\lambda_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm j \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}$$

で与えられる純虚数である。 Fig. 7 に、擬似ポテンシャル

Fig. 7 Pseudo-potential and Lagrangian points

W を示す。 $L_{1,2,3}$ 点は曲面の鞍点、 $L_{4,5}$ 点は極大点に位置し、静的不安定であることがわかる。ここで、これらの平衡点におかれた物体が平衡点からずれて速度をもって運動をはじめると、その速度に対して垂直な力であるコリオリ力が働く。このとき、 $L_{4,5}$ 点においては、ポテンシャル面の勾配とコリオリ力の大きさが釣りあって、物体が安定化されていると解釈できる。一方、 $L_{1,2,3}$ 点においては、同様にコリオリ力は働くが、ポテンシャル面の勾配が大きく、結果的に不安定になると解釈できる。また、 $L_{1,2,3}$ はすべての μ で不安定であるのに対し、正三角形解 $L_{4,5}$ 点においては μ の条件により安定となることがわかる。

4. 円制限三体問題における陰的制御

4.1 陰的制御則

前節の考察により、円制限三体問題の5つの平衡点のうち、 $L_{4,5}$ 点は他の平衡点にはない安定性をもつことがわかった。2章によると、制御系が与えられたとき、意図と制御対象と場を定めるとそれに応じて陰的制御が定まってくるという図式である。円制限三体問題の L_4 点での安定化問題において、制御対象は質点 m とすると、質点に働く力である重力、遠心力・コリオリ力は、制御対象が2天体の重力場、2天体とともに回転する座標系の効果による遠心力・コリオリ力に対応する場におかれてはじめて生じる力であり、場と制御対象を切り離すことにより消失する。これらの力を陰的制御と考えると、場の想定仕方に自由度があるため、以下の三つの場合について考える。簡単のため $\Omega = 1, d = 1$ とし、 L_4 点における線形化方程式 (37) を考える。

状態方程式 (37) において、 $L_{4,5}$ 点の安定性を生み出す2天体の重力、回転座標系による遠心力・コリオリ力を状態フィードバックとみなし、以下のように書き換える。

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} = A_0\mathbf{x} \quad (41)$$

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} \quad (42)$$

ここで、

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ は陰的制御則とみなす状態フィードバックである. A_0 のどの部分を陰的制御と見なすかにより, A として以下の3種類のケースが考えられる. 閉ループ系 $A - BK$ は元のシステムと一致し, $\mu < 0.03852$ で安定となっている.

case (i)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{5}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$K = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

このとき, A の固有値は

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{1-3\mu(1-\mu)}},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm j \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{1-3\mu(1-\mu)}}$$

となり不安定極をもつことがわかる.

case (ii)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$K = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{5}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

となり, A の固有値は ($\lambda_{1,2} = 0$ (重根), $\lambda_{3,4} = \pm j$ (重根))

となり, 安定である.

case (iii)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

(a) Mass in the vicinity of the two bodies (case (i))

(b) Mass on rotating disk (case (ii))

(c) Mass on disk (case (iii))

Fig. 8 Three types of plant and field

$$K = - \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

このとき, A の固有値は $\lambda_{1,2,3,4} = 0$ (4重根) となり, 安定である.

4.2 陰的制御の物理的意味

すべてのケースにおいて陰的制御は「虚軸上に全極を配置する制御」とみなすことができる. ここで, 2天体の回転運動は本来取り除くことができない効果であるが, 回転運動の効果の陰的制御の物理的意味をより明確にするため, 2天体は質量の無視できる棒でつながれているものとする. このとき, 陰的制御の物理的意味として以下のような解釈をすることができる. case (i) は, 2天体の重力場において, 質点 m を一点 (L_4 点) に安定化する問題に対応する (Fig. 8(a)). このとき, 質点 m は2天体の重力により, 重心方向に引っ張られるのに対し, 外向きの力である遠心力・コリオリ力を陰的制御則とみなしている. case (ii) は角速度 Ω で回転する円盤におかれた質点 m を, 円盤上の一点 (L_4 点) に安定化する問題に対応する (Fig. 8(b)). このとき, 制御入力がない状態で

は、質点 m は遠心力・コリオリ力により L_4 点から遠ざかる向きに運動を行なう。平衡点を生み出している内向きの力である2天体からうける重力を、この系における陰的制御則とみなしている。case (iii) は、2天体も回転円盤も取り除かれた、何もない状況に対応する (Fig. 8(c))。このため遠心力・コリオリ力、重力すべての力を陰的制御則とみなしている。

5. 円制限三体問題における陰的制御の特徴付け

5.1 陰的制御の LQ 最適性からの特徴付け

前節で述べた陰的制御 $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ が最適制御の逆問題でいう LQ 最適性を有するかどうかについて考察する。前章で定式化した円制限三体問題は、本来、力学系であるので、位相空間における軌道は、最小作用の原理より、作用積分の停留値をとるような経路となっている¹¹⁾。また、その線形化方程式(37)に対応するハミルトニアンは一般化座標と一般化運動量の二次形式となっている。この点に注目して本節では、この力学系の一部に対応する陰的制御 $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ に制御理論的な考察を加える。具体的には、本制御が LQ 最適性を有するか、また有するとしたらどのような評価関数に対して最適になるのか、さらにその評価関数は一意に定まるのか、について考察を行ない、陰的制御を LQ 最適性の観点から非常に特異な制御 (LQ 最適性を最大限排除した制御) として特徴づける。

制御対象(41)に対する陰的制御(42)が、この LQ 最適性を有する、つまり $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ が何らかの2次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt \quad (49)$$

を最小化するためには、少なくとも還送差条件

$$\Phi(j\omega) = T(-j\omega)^T T(j\omega) - I \geq 0 \quad a.e. \omega \in R \quad (50)$$

$$T(s) := I + K(sI - A)^{-1}B$$

が成立しなければならない。しかし、つぎに示すように、陰的制御系は閉ループ極がすべて虚軸上にあるため、還送差条件を満たさない。

定理 5.1. 閉ループ極をすべて虚軸上に配置するようなフィードバック制御 $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ ($K \neq 0$) は、一般に還送差条件を満足しない。

証明. 背理法で証明する。最適制御の逆問題の結果より、 $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ が還送差条件を満たすとすると、次式を満たす実対称行列 $P \geq 0$ と評価関数の重み行列 $Q = C^T C \geq 0$ が存在する¹²⁾。

$$PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0 \quad (51)$$

$$K = B^T P \quad (52)$$

このリカッチ方程式に対応するハミルトン行列

$$H = \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (53)$$

は、閉ループ行列 $A - BB^T P = A - BK$ と同じ固有値をもつから、虚軸上に4個の固有値をもつ。したがってリカッチ方程式の解の性質¹³⁾から A もこれら4個の固有値を (Q, A) の不可観測モードとしてもつ。 A の全固有値が (Q, A) の不可観測モードとなるから $Q = 0$ を得る。これをリカッチ方程式(51)に代入すると解 $P = 0$ を得る。この解は

$$\operatorname{Re} \lambda(A - BB^T P) = \operatorname{Re} \lambda(A) = 0 \leq 0 \quad (54)$$

を満たすから(51)の最大解であり¹⁴⁾、明らかに最小準正定解でもあるから、準正定一意解である。ゆえに(52)より $K = 0$ となり、矛盾が生じる。 $\square$

この結果より、陰的制御は通常の意味、つまり(49)の二次形式評価関数に関して LQ 最適性を有しないことがわかる。そこで、評価関数を状態と入力のカロス積の項も含む準正定二次形式

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T W_{11} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T W_{12} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt \quad (55)$$

のクラスに広げて考察してみる。一般に、任意の K を最適制御にする評価関数の重み W_{11}, W_{12}, W_{22} は無数に存在することが知られている。この事実は、通常の2次形式評価関数では文献12)の系8で示されているが、状態と入力のカロス項を含む(55)式の評価関数についても同様に証明できる。しかし、ここで考えている陰的制御については、つぎの結果が得られる。

定理 5.2. 閉ループ極をすべて虚軸上に配置するようなフィードバック制御 $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ ($K \neq 0$) は、(56)式の評価関数に対してのみ最適になる。

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T K^T K \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T K^T \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt \quad (56)$$

証明. 評価関数(55)の重みをまとめて

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} \geq 0$$

と表わす。この評価関数に関する最適制御則 K は下記のようにリカッチ方程式の解 P を用いて

$$PA + A^T P - (PB + W_{12})(B^T P + W_{12}^T) + W_{11} = 0 \quad (57)$$

$$K = B^T P + W_{12}^T \quad (58)$$

と表わされる。(57)にフィードバック変換¹⁴⁾

$$\begin{aligned} A &\rightarrow F := A - BW_{12}^T, \\ W_{11} &\rightarrow Q := W_{11} - W_{12}W_{12}^T, \\ W_{12} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

を施し、これを等価変形すると

$$PF + F^T P - PBB^T P + Q = 0 \quad (59)$$

を得る. 定理 5.1 の証明と同様に, リカッチ方程式(59)に対応するハミルトン行列, つまり(53)で A を F に置き換えたものは, 閉ループ行列

$$F - BB^T P = A - B(B^T P + W_{12}^T) = A - BK \quad (60)$$

と同じ固有値をもつから, 虚軸上に4個の固有値をもつ. これをもとに以下同様にして $Q = 0, P = 0$ を得る. したがって $P = 0$ と(58)より $W_{12}^T = K$, これと $Q = 0$ より $W_{11} = W_{12}W_{12}^T = K^T K$ を得る.

逆にこのような重み W に対して陰的制御 $u = -Kx$ が(56)を最小化することは自明である. $\square$

全極を虚軸上に配置する陰的制御は, 定理 5.1 と 5.2 より, 1) 還送差条件も満足せず, 2) 評価関数を一般化して状態と入力の積の項を含めても, すべてのフィードバック制御 $u = -Kx$ が共通に最適化する評価関数

$$J = \int_0^\infty \|Kx + u\|^2 dt \quad (61)$$

しか最小化しないことがわかる (一般には多数の評価を最適化する). このことから, 陰的制御は LQ 最適性を最適性を最大限排除した形になっていると解釈できる. あるいは, すべての閉ループ極を虚軸上に配置することが強い制約として働いており, その結果, 評価関数を選択する自由度がなくなり, 一意になってしまう, という解釈もできる.

5.2 陽的制御を付加した陰的制御系の最適性について

5.1 節の結果より, 陰的制御は通常の二次形式評価関数に関して LQ 最適性を有しないことがわかった. また, $L_{4,5}$ 点近傍の線形化方程式は虚軸上に極をもつ安定であり, 陰的制御のみで漸近安定化することはできない. 本節では, 陰的制御にある評価関数を最小化する陽的制御を付加することでシステムを漸近安定化する. その際に, 4 章で考えた3つの場に対して, 陽的制御 $u = -Kx$ を以下のリカッチ方程式の解 P を用いて設計する.

$$PA_0 + A_0^T P - PBB^T P + Q = 0 \quad (62)$$

$$K = B^T P \quad (63)$$

このとき, 陽的制御は

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T u) dt \quad (64)$$

という評価関数を最小化する安定化フィードバックとなっている. $Q = qI$ ($q = 1, 10, 10^8$), $\mu = 0.02$ に対応する陽的制御のフィードバックゲインは

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.3632 & -0.9428 & 1.520 & -0.1523 \\ 2.9699 & 3.9300 & -0.1523 & 2.8684 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3.3169 & -0.6166 & 3.9899 & 0.1713 \\ 3.5984 & 5.8755 & 0.1713 & 4.7336 \end{bmatrix}$$

Table 1 Return difference condition

	case(i)	case(ii)	case(iii)
K_1	$\times$	$\times$	$\times$
K_2	$\times$	$\circ$	$\times$
K_3	$\circ$	$\circ$	$\circ$

Fig. 9 Return difference condition (K_1, K_2)

$$K_3 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.0001 & -0.0001 & 1.0001 & 0.0000 \\ 0.0003 & 1.0002 & 0.0000 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

となる. これらの陽的制御と陰的制御をあわせたものをひとつの入力とみなし, その制御入力を加える前のシステムに対して, LQ 最適性をもつか調べた結果を **Table 1** にまとめる. case (i), (iii) では, 小さな Q に対して還送差条件を満たさないのに対して, case (ii) では, ある大きさの Q に対しては, 還送差条件を満たしていることが数値計算により確認された. つまり, 重力項を陰的制御とみなした場合, それに陽的制御を付加したものが, case (ii) のシステムに対して最適性を有することがわかった. このことは, 2.2 節の1入力系の例題からの類推から十分大きな Q を取れば最適となることに対応していると考えられる. その制御入力を加える前のシステムに対して, 陽的制御のゲインを K_1, K_2 のとしたときの還送差行列の行列式を調べた結果を **Fig. 9** に示す. この結果は理論的に保証されるものではないが, 2 次系に対して

は、陰的制御則と陽的制御則をあわせた制御則は、陰的制御を除いたシステム A に対しては必ずしも最適とならず、最適となるために満たすべき陰的制御と陽的制御の Q の条件が示されている¹⁵⁾。

つぎに、2 天体の質量比 μ を陽的制御を設計した値 $\mu = 0.02$ から変化した場合の最適性を考える。このとき、陽的制御 K_2 は設計した $\mu = 0.4$ で、選送差条件を満たさなくなるのに対して、陰的制御と K_2 との和はすべての $\mu \in [0, 1]$ で選送差条件を満たすことがわかった。重力項を陰的制御とみなした場合には、質量比の変化により陰的制御は自動的に変更され、最適性が維持されていると考えられる。このことから、同一のシステムであっても、見方を変えることで、最適性といった望ましい性質が得られることがあることがわかる。

6. おわりに

円制限三体問題における、 $L_{4,5}$ 点の安定性を陰的制御の観点から考察した。ラグランジュ点の安定性を生み出す 2 天体の重力場、回転座標系の効果による遠心力・コリオリ力を制御対象と場との相互作用から生まれる陰的制御とみなし、最適性に関して考察した。その結果、陰的制御単独では、通常の意味での最適性をもたないこと、評価関数にクロス積の項を含む最適制御問題の解として評価関数が一意に決まるという興味深い結論が得られた。この「一意性」については、一意であるがゆえそこに物理的意味が見いだせるのではないかと推察している。今後の課題である。さらに、陰的制御に最適制御を付加した場合、システムのどの部分を制御対象と見なすかにより最適性の違いが生まれることがわかった。このことは、従来の制御系設計において、制御対象は固定的と考えるのに対し、「どの部分までを制御対象と見るか」という問題を考える必要性を示唆するものである。

円制限三体問題における質点の運動において、陰的制御という視点を導入することの可能性として、2 つの可能性を考えている。1 つ目は、平衡点近傍での宇宙機の制御において、場との相互作用を有効活用できる可能性がある点である。陽的制御を付加して LQ 最適にしようとした意図は、陰的制御だけでは L_4 点は漸近安定になっていないので、工学的にその点を活用するために、陽的制御を加えることによって漸近安定化したい、というところにある。その際、注目したのは、われわれが制御したいのは微小質点であり、微小質点と陰的制御則からなる制御系ではないということである。陰的制御則と陽的制御則をあわせた制御則を考えることで、微小質点に対してダイレクトに制御則を設計するよりも、陰的制御則という力学的作用力を巧く利用して設計した陽的制御則のほうが何らかの意味で節約になる可能性が期待される。2 つ目に、平衡点近傍のダイナミクスを制御系と捉え、制御系としての性質を知ることができる可能性がある。はじめに述べたように、2 つの重心により近似できるピーナツ型の形状をもつ小惑星近傍の物体の運動もまた、円制限三体問題と同様の性質をもつ^{4), 5), 16)}。小惑星のパラメータ（質量、密度、

形状、自転速度など）は一般に、不確定性を多く含むため、平衡点の安定性を論じることが難しいが、制御工学的な解析を用いることで小惑星近傍の平衡点の安定性の小惑星パラメータに関するロバスト性などといった知見が得られると考えられる。

謝辞 本研究の一部は、最先端研究開発プログラム (FIRST)、「健康長寿社会を支える先端人支援技術」の助成によるものである。

参考文献

- 1) 木下 宙：天体と軌道の力学，東京大学出版会 (1998)
- 2) C.D. Murray and S.F. Dermott: Solar system dynamics, Cambridge Univ Press (1999)
- 3) 宇宙航空研究開発機構：小惑星イトカワの素顔に迫る—「はやぶさ」科学的観測の成果—, http://www.jaxa.jp/article/special/hayabusa_sp3/index_j.html
- 4) T. Prieto-Llanos and M.A. Gomez-Tierno: Stationkeeping at Libration Points of Natural Elongated Bodies, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **14**-7, 787/794 (1994)
- 5) M. Hirabayashi, M.Y. Morimoto, H. Yano, J. Kawaguchi and J. Bellerose: Linear stability of collinear equilibrium points around an asteroid as a two-connected-mass: Application to fast rotating Asteroid 2000EB14, Icarus, **206**, 780/782 (2010)
- 6) 大須賀，石黒，鄭，杉本，大脇：制御系に埋め込まれた陰的制御則が適応機能の鍵を握る!?, 日本ロボット学会誌, **28**-4, 491/502 (2010)
- 7) 大須賀公一：制御系における「埋め込み問題」とは？—生物/人工物の運動制御機能の理解に向けて—, 計測と制御, **48**-9, 493/499 (2009)
- 8) 伊藤正美：自律分散システム，文部省科学研究費補助金平成 2～4 年度研究成果報告書 (1994)
- 9) 北村新三：創発的機能形成のシステム理論，文部省科学研究費補助金研究の成果の概要と評価 (1998)
- 10) 浅間 一：身体・脳・環境の相互作用による適応的運動機能の発現—移動知の構成論的理解—, 平成 17～21 年度研究成果報告書 (2010)
- 11) H. Goldstein: Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading (1980)
- 12) 藤井隆雄：最適レギュレータの逆問題，計測と制御, **27**-8, 717/726 (1988)
- 13) V. Kucera: A Contribution to Matrix Quadratic Equations, IEEE Trans. Automatic Control, **17**-3, 344/347 (1972)
- 14) 須田，児玉：システム制御のためのマトリクス理論，コロナ社 (1981)
- 15) K. Osuka, T. Fujii and M. Bando: Optimality of Plug-in Optimal Control, Proc. SICE Annual Conference, 2249/2250 (2011)
- 16) 坂東，大須賀，藤井，山川：ピーナツ形状小惑星のラグランジュポイントの安定性に関する陰的制御的考察，SICE 制御部門講演会, 168-3-4 (2011)

《付 録》

A. 円制限三体問題の導出

お互いに引力を及ぼしあって運動する 3 質点のハミルトニアンは、質点の運動エネルギーと双方向に作用する引力によるポテンシャルエネルギーから構成される。

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p}_3^T \mathbf{p}_3}{2m_3}$$

$$-\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}-\frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|}-\frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|}$$

簡単のため $m_1 + m_2 = 1$ として, 質量比 $\epsilon = \frac{m_3}{m_1+m_2} = m_3 \ll 1$ をパラメータとして級数展開すると

$$H = H_0 + \epsilon H_1 + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.1})$$

$$H_0 = H|_{\epsilon=0} = \frac{\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2}{2m_2} - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \quad (\text{A.2})$$

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} = \frac{\mathbf{p}_3^T \mathbf{p}_3}{2m_3^2} - \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} - \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|} \quad (\text{A.3})$$

H_0 は 2 体問題のハミルトニアンであり, ケプラー運動が解となる. 解として, 円運動と仮定し, その解を $(\mathbf{q}_{10}, \mathbf{p}_{10}), (\mathbf{q}_{20}, \mathbf{p}_{20})$ とする. この解を摂動ハミルトニアン $H = H_0 + \epsilon H_1$ に代入すると,

$$H = H_0|_{(\mathbf{r}_{10}, \mathbf{p}_{10}), (\mathbf{r}_{20}, \mathbf{p}_{20})} + \frac{\mathbf{p}_3^T \mathbf{p}_3}{2m_3^2} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_{20}|} - \frac{Gm_1m_3}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_{10}|} \quad (\text{A.4})$$

となり, 微小質点 m_3 の運動方程式が導かれる (円制限三体問題).

$$m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_{20}|^3}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_{20}) - \frac{Gm_1m_3}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_{10}|^3}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_{10}) \quad (\text{A.5})$$

[著者紹介]

坂東麻衣 (正会員)

2008 年京都大学工学研究科航空宇宙工学専攻修了. 同年京大生圏研究所ミッション専攻研究員, 2010 年京都大学宇宙総合学研究所ユニット特定助教, 現在に至る. 宇宙機の軌道力学・制御工学に従事. 博士 (工学).

大須賀公一 (正会員)

1984 年大阪大学大学院基礎工学研究科修士課程 (制御工学) 修了. 同年 (株) 東芝入社, 総合研究所勤務. 86 年大阪府立大学工学部助手. その後, 講師, 助教授を経て, 98 年京都大学大学院情報学研究科助教授, 2003 年神戸大学工学部教授, 2009 年大阪大学大学院工学研究科機械工学専攻教授となり現在に至る. ロボティクス, 制御工学, レスキュー工学などの研究に従事. 工学博士.

藤井隆雄 (正会員)

1969 年大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程中途退学. 同大学助手, 助教授を経て, 90 年九州工業大学情報工学部教授, 95 年大阪大学基礎工学部教授, 2006 年福井工業大学工学部教授, 現在に至る. 制御理論とその応用に関する研究に従事. 工学博士.

山川 宏 (正会員)

1993 年東京大学大学院工学系研究科航空科専攻修了. 同年宇宙科学研究所助手, 99 年同助教授, 2003 年 JAXA 助教授, 2006 年京大生圏研究所教授, 現在に至る. 宇宙機の軌道工学, 宇宙システム工学の研究に従事. 博士 (工学).