非線形量子化器を伴う空圧式除振台の制御

小池 雅和*・千田 有一**・池田 裕一**

Control of a Pneumatic Isolation Table Including Non-linear Quantizer

Masakazu KOIKE*, Yuichi CHIDA** and Yuichi IKEDA**

Active control methods are used to suppress vibrations in a pneumatic isolation table. To suppress vibration for large displacements, it is necessary to switch the control input instantaneously to the maximum or minimum input values. Therefore, active control by quantized control input generated using the on-off valves is suitable. To obtain high performance, it is necessary to consider the quantized action by on-off valves and the input time-delay that arises from loss of pressure. An important factor is that the quantizer used in this system is a non-linear quantizer. Although conventional methods can be applied to the system including the non-linear quantizer, it is highly possible that a performance of disturbance attenuation deteriorates compared to when using a linear quantizer. Therefore, a control method that can be applied to the system including the non-linear quantizer and can give high performance is proposed in this study. Furthermore, the proposed method is applied to a pneumatic isolation table and its performance is verified through numerical simulations and experiments.

Key Words: non-linear quantizer, input time-delay, pneumatic isolation table, vibration control

1. はじめに

精密部品の製造、測定分野では、床からの振動を抑制するために空圧式除振台が広く使用されている。また、より高い制振性能、除振性能を得るために空圧式除振台へのアクティブ制御についてこれまで種々の研究がなされている^{1)~3)}。これらの研究では、サーボ弁による線形入力を用いて空気ばね内圧を変化させることで微振動の抑制性能の向上を目指している。一方、加工、測定工程を有する工場の生産ラインではワークを除振台に置いた際に発生する大変位の振動を高速に抑制したいという要求がある。この要求を満たすためには、瞬時に操作量の飽和領域である最大入力または最小入力を切り替える必要があり、on-off 弁を用いて空気ばね内圧を変化させ外力を与えることが合理的である。これにより速い応答が得られると共に、on-off 弁はサーボ弁に比べ安価なため経済的なメリットも高くなる。そこで、本稿では on-off 弁による量子化操作入力を用いた制御問題に焦点を当てる。量子化操作入力を用いた制御問題はこれまでいくつか研究されており、フィードバック変調器^{4),5)}、ハイブリッド制御^{6),7)}、フィリポフ解を用いた手法⁸⁾、最適動的量子化器^{9),10)}などが知られ

ている。その中でも、最適動的量子化器^{9),10)}は動的量子化器の性能限界を示しており、高い性能を有している。文献⁹⁾の量子化器は制御対象とコントローラの情報のみで容易に設計することができるが、極端に大きな入力を要求する場合があります。一方、文献¹⁰⁾の量子化器は想定される静的量子化器への入力の上界値(以下「上界値パラメータ」と呼ぶ)を考慮することができるため、目標値応答に関しては線形および非線形の量子化器を含む対象に対して良好な応答が期待できる。しかし、外乱応答に関しては非線形量子化器を含むシステムに適用すると制御応答が劣化する場合がある。この原因は外乱が一般的には未知であり、設計の段階で上界値パラメータを適切に設定できないためである。さらに、空圧式除振台においては、供給圧の絶対値と排気圧の絶対値が一般的に非対称であることから非線形量子化器となり、最適動的量子化器を含め従来手法^{5)~10)}を適用した場合には、この応答劣化が顕著に現れる。そこで、本稿では、非線形量子化器を含むシステムに対し、目標値応答のみならず外乱応答に対しても応答劣化が少ない新たな制御手法を提案する。提案手法の特徴としては適切な操作量を量子化誤差を考慮したリアプノフ関数に基づいて判断し、応答劣化の少ない入力を選ぶという点である。これによって、量子化操作に起因するシステムの不安定化を避け、適切に操作量を加えることができる。さらに、操作量を加える場合には、複数の固定フィードバックゲインをあらかじめ用意しておき、リアプノフ関数に基づいてフィードバックゲインをオンラインで切り替えることで応答性の向上を目指す。ただし、所望の応答を得るために複

* 信州大学大学院総合工学系研究科 長野市若里 4-17-1

** 信州大学工学部 長野市若里 4-17-1

* Interdisciplinary Graduate School of Science and Technology, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano

** Faculty of Engineering, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano

(Received August 29, 2012)

(Revised November 5, 2012)

数のゲインをどのように決定しておくかが問題となるため、LMIを用いてゲインをシステムティックに決定する方法についても提案する。

空圧式除振台の場合、より高い性能を得るためには量子化操作だけでなく、配管内の圧力損失に起因する入力むだ時間も考慮する必要がある。入力むだ時間を補償する手法については、すでにいくつか研究されているが^{11)~15)}、非線形量子化器を含むシステムに適用し、その性能を評価した例はない。これに対し、本稿では、離散時間系を前提とし、入力むだ時間を状態変数の一部に含めた拡大系を構成することで、入力むだ時間を考慮する。

本稿では、まず制御対象と切替制御則について述べ、つぎにLMIに基づくゲイン決定手法を提案する。そして空圧式除振台の振動抑制制御に提案手法を適用し、計算機シミュレーションと実機実験を通して提案手法の効果を検証する。また、 $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}_+$ はそれぞれ実数の集合、正の整数の集合を表わし、 $I_{n \times n}$, $0_{n \times m}$ はそれぞれ n 次の単位行列、 $n \times m$ 次の零行列を表わす。 $\lambda_{\min}\{*\}$ は行列 $*$ の最小固有値を表わす。

2. 制御対象と切替制御則

2.1 制御対象

次式の1入力離散時間系 G を扱う。

$$G: x[k+1] = Ax[k] + bu[k-d] \quad (1)$$

ここで、 $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}_+$ はステップ数、 $d \in \mathbb{N}_+$ はむだ時間分のステップ数、 $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ は状態変数、 $u \in \mathbb{R}$ は入力である。ただし、むだ時間はサンプリング周期の整数倍とし、 (A, b) は可制御と仮定する。さらに、制御系設計の見通しを良くするために、むだ時間分の過去の入力も状態変数として扱うこととし、つぎのように拡大システム $\tilde{G}$ を設定する。

$$\tilde{G}: \tilde{x}[k+1] = \tilde{A}\tilde{x}[k] + \tilde{b}u[k] \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{x}$, $\tilde{A}$, $\tilde{b}$ は次式である。

$$\tilde{x}[k] = [x[k]^T, u[k-d], u[k-(d-1)], \dots, u[k-1]]^T, \\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & b & 0_{n \times (d-1)} \\ 0_{d \times (n+1)} & I_{(d-1) \times (d-1)} & 0_{1 \times (d-1)} \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0_{(n+d-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

また、本稿では、制御入力 u は **Fig. 1** に示すような量子化器 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ により連続値信号から離散値信号に変換されるものとし、次式の制御入力を用いる。

$$u[k] = \phi(\sigma[k]) \quad (3)$$

ここで、 $\sigma[k]$ は ϕ への入力であり、 ϕ は $\phi(0) = 0$ を満たすものとする。また、量子化誤差を次式で定義する。

$$\varepsilon[k] = \phi(\sigma[k]) - \sigma[k] \quad (4)$$

さらに、 $\varepsilon[k]$ のノルムは次式を満たすものと仮定する。

$$\|\varepsilon[k]\| \leq \bar{\varepsilon} \quad (5)$$

Fig. 1 Quantizer

Fig. 2 Feedback system

ここで、 $\bar{\varepsilon}$ は正のスカラ値である。なお、本稿で扱う量子化器では、量子化幅一定という制約を課していない点に留意する。このような量子化器は、**Fig. 1** で示す Type A の線形量子化器のみならず、Type B, Type C の非線形量子化器も含むことになる。ここで、Type B の量子化器は量子化誤差が正負の符号をとり得るのに対し、Type C の量子化器は量子化誤差の符号が一定となる特徴を有している。

2.2 切替制御則

本稿ではレギュレータ問題について考える。制御システムのブロック線図を **Fig. 2** に示す。**Fig. 2** において、 F はフィードバックゲイン、 Ψ は切替関数を表わす。 F は $F = [F_1^T, F_2^T, \dots, F_m^T]^T \in \mathbb{R}^{m \times (n+d)}$ で定義し、各 $F_j \in \mathbb{R}^{1 \times (n+d)}$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) は線形入力 $u[k] = -F_j \tilde{x}[k]$ を用いたときに、(2) 式を安定化するように設計する。 m は任意であり、後述する制御則により F_j ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) から一つのゲインが選択される。切替関数 $\Psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ は次式で定義する。

$$\Psi([\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]^T) = \begin{cases} \xi_j = -F_j \tilde{x}[k] & \text{if } C_j \text{ is true} \\ & (j \in \{1, 2, \dots, m\}) \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]^T = -F \tilde{x}[k]$ は Ψ の入力であり、 C_j ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) は後述する判別条件である。以上より、切替制御則は次式となる。

$$\sigma[k] = \Psi(-F \tilde{x}[k]) \quad (7)$$

つぎに、判別条件 C_j を以下に示す。

[判別条件]

$$C_j: e_j < 0 \text{ and } e_{\min} = e_j \quad (j \in \{1, 2, \dots, m\}) \quad (8)$$

ただし, e_j , $e_{\min}$ は次式で定義する.

$$e_j = E_1(\tilde{x}) + E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j) + E_3(\varepsilon_j) \quad (9)$$

$$E_1(\tilde{x}) = \tilde{x}[k]^T \{(\tilde{A} - \tilde{b}F_j)^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_j) - P\} \tilde{x}[k]$$

$$E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j) = 2\varepsilon_j[k]^T \tilde{b}^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_j) \tilde{x}[k]$$

$$E_3(\varepsilon_j) = \varepsilon_j[k]^T \tilde{b}^T P \tilde{b} \varepsilon_j[k]$$

$$e_{\min} = \min_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} \{e_j\} \quad (10)$$

$\varepsilon_j[k]$ はゲイン F_j を用いたときの量子化誤差を表わし, 次式で定義する.

$$\varepsilon_j[k] = \phi(-F_j \tilde{x}[k]) - (-F_j \tilde{x}[k]) \quad (11)$$

また, P は F_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ から任意の一つ選んだ F_a と任意に与えられた正定対称行列 Q に対する次式の離散リアプノフ方程式を満たす正定対称行列解である.

$$(\tilde{A} - \tilde{b}F_a)^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_a) - P = -Q \quad (12)$$

上記判別条件においては, 条件 C_j が真となる場合にはゲイン F_j が選択され $\Psi(-F_j \tilde{x}[k]) = -F_j \tilde{x}[k]$ となる. ただし, $e_{\min} = e_j = e_i$ となる場合は, i あるいは j のうち, 適切な一方を選択する. 一方, すべての条件 C_j が偽となる場合には, $\Psi(-F_j \tilde{x}[k]) = 0$ となる.

以上より (2) 式に (3) 式, (7) 式を施した閉ループ系は次式となる.

$$\tilde{x}[k+1] = \tilde{A}\tilde{x}[k] + \tilde{b}\phi(\Psi(-F_j \tilde{x}[k])) \quad (13)$$

さらに, (8) 式において C_j が真の場合, (13) 式は次式となる.

$$\tilde{x}[k+1] = \tilde{A}\tilde{x}[k] + \tilde{b}\phi(-F_j \tilde{x}[k]) \quad (14)$$

(11) 式を用いると (14) 式は次式と表わされる.

$$\begin{aligned} \tilde{x}[k+1] &= \tilde{A}\tilde{x}[k] + \tilde{b}\varepsilon_j[k] - \tilde{b}F_j \tilde{x}[k] \\ &= (\tilde{A} - \tilde{b}F_j)\tilde{x}[k] + \tilde{b}\varepsilon_j[k] \end{aligned} \quad (15)$$

つぎに, 次式の離散リアプノフ関数の候補を考える.

$$V[k] = \tilde{x}[k]^T P \tilde{x}[k] \quad (16)$$

ここで P は (12) 式の解行列である. (15) 式, (16) 式を用いると $\Delta V[k]$ は次式となる.

$$\begin{aligned} \Delta V[k] &= V[k+1] - V[k] \\ &= \tilde{x}[k]^T \{(\tilde{A} - \tilde{b}F_j)^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_j) - P\} \tilde{x}[k] \\ &\quad + 2\varepsilon_j[k]^T \tilde{b}^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_j) \tilde{x}[k] \\ &\quad + \varepsilon_j[k]^T \tilde{b}^T P \tilde{b} \varepsilon_j[k] \\ &= e_j[k] \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式は (9) 式の e_j がゲイン F_j を用いたときの ΔV と等価であることを示している. また, (8) 式の判別条件から, ゲイン F_j は ΔV を最も小さくするように選ばれているため, ゲイン F_j は最も高い収束性能をもたらすと期待できる.

このとき, (13) 式のシステムの有界性はつぎのように保証される.

《定理 1》 $(\tilde{A} - \tilde{b}F_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ が安定行列であり, (12) 式の解行列 P が $\tilde{A}^T P \tilde{A} - P \geq 0$ を満たすと仮定する. このとき, (3) 式から (11) 式で表わされる制御則により, (13) 式のシステムの状態変数 $\tilde{x}$ は集合 $\Omega := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+d} : \|\tilde{x}\| \leq E_x\}$ に収束する. ただし, E_x は次式で与える.

$$\begin{aligned} E_x &:= \frac{\bar{\varepsilon} \|P^{-1/2}\| \|P^{1/2} \tilde{A} P^{-1/2}\|}{\lambda_{\min}\{P^{-1/2} Q P^{-1/2}\}} \left(\|\tilde{b}^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_a) P^{-1/2}\| \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\|\tilde{b}^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_a) P^{-1/2}\|^2 + \lambda_{\min}\{P^{-1/2} Q P^{-1/2}\} \|\tilde{b}^T P \tilde{b}\|} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

(証明) 付録 A 参照 ■

(注意 1) (18) 式において, 量子化誤差のノルムの上限值 $\bar{\varepsilon}$ が 0 であるならば, E_x は 0 となる. これは, $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ ならば, 提案手法により (13) 式のシステムの平衡点の安定性が保証されることを意味する.

《定理 2》 $(\tilde{A} - \tilde{b}F_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ が安定行列であり, (12) 式の解行列 P が $\tilde{A}^T P \tilde{A} - P < 0$ を満たすと仮定する. このとき, (3) 式から (11) 式で表わされる制御則により, (13) 式のシステムの原点は漸近安定となる.

(証明) 付録 B 参照 ■

2.3 オンラインでの制御入力計算手順

制御入力計算手順は以下になる.

Step 0 任意の m 個の F_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ を各 $(\tilde{A} - \tilde{b}F_j)$ が安定行列となるように設定する. つぎに, 適切な $Q > 0$ を用いて (12) 式を解いて $P > 0$ を求める.

Step 1 (1) 式の状態変数 $x[k]$ をリアルタイムでモニタリングする. さらに (2) 式の状態変数の一部である過去の入力 $u[k-d]$, $u[k-(d-1)]$, $\dots$, $u[k-1]$ をメモリに保持しておく.

Step 2 $x[k]$ と $u[k-d]$, $u[k-(d-1)]$, $\dots$, $u[k-1]$ の情報から, (2) 式の状態変数 $\tilde{x}[k]$ を求める.

Step 3 (11) 式に従って各量子化誤差 $\varepsilon_j[k]$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ を計算する.

Step 4 (9) 式に従って各 e_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ を計算する.

Step 5 $e_{\min} = e_j < 0$ であれば, F_j を用いたフィードバック入力 $u[k] = \phi(-F_j \tilde{x}[k])$ を印加する. そうでなければ $u[k] = 0$ とする.

Step 6 Step 1 に戻り, 同じ手順を繰り返す.

3. LMI に基づくゲイン決定手法

2.2 節の切替制御においては, 所望の性能をもたらす適切なゲイン F_j の設定が必要となる. そこで本稿では, Type C の量子化器の使用を前提としたゲイン F_j の決定手法を提案する. ただし, 2.2 節では m 個のゲインを扱っていたが, こ

ここでは $m = 2$ と限定して F_1, F_2 を適切に選ぶ手法を示す.

基本的なアイデアは F_1 に加えて F_2 を用いることにより, $e_{\min} < 0$ となる時間を増やすことである. そのための一つの方法としては, $e_1 > 0$ (あるいは $e_2 > 0$) となる場合に $e_2 < 0$ (あるいは $e_1 < 0$) となるようにゲイン F_1, F_2 を選択することである. そうすれば, たとえ $e_1 > 0$ または $e_2 > 0$ となる時間帯が存在しても, $e_2 < 0$ または $e_1 < 0$ となり, $e_{\min}$ を負にすることができる. そのために, (9) 式の右辺各項の符号に着目する. 第1項 $E_1(\tilde{x})$ に関しては $(\tilde{A} - \tilde{b}F_1)$ がリアプノフ方程式を満たすようにゲイン F_1 が選ばれていれば, 常に負となる. 一方, 第3項 $E_3(\varepsilon_j)$ に関しては常に正となる. これに対し, 第2項 $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ に関してはゲインの値によって負となり得る. そこで, $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ の符号が F_1 と F_2 で反転するようにフィードバックゲインを決定する. そうすれば, $e_1 > 0$ のときに $e_2 < 0$ に, $e_2 > 0$ のときに $e_1 < 0$ となり得る. そこで, 以下の条件を満たすようにフィードバックゲインを決定する.

(条件 A-1) F_1 および F_2 のいずれを用いた場合においても $E_1(\tilde{x}) < 0$ となる.

(条件 B-1) $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ の符号が F_1 を用いた場合と F_2 を用いた場合で反転する.

(条件 A-1) は $\varepsilon \rightarrow 0$ とした場合の線形システムの平衡点が安定となるための十分条件である. (条件 A-1) は以下の (条件 A-2) と等価となる.

(条件 A-2) 以下の LMI を満たすこと. ただし, $P > 0$ である.

$$(\tilde{A} - \tilde{b}F_1)^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_1) - P < 0 \quad (19)$$

$$(\tilde{A} - \tilde{b}F_2)^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_2) - P < 0 \quad (20)$$

一方, Type C の量子化器においては $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0$ が満たされるため (条件 B-1) は以下の (条件 B-2) と等価になる.

(条件 B-2) ゲイン F_1, F_2 が次式を満たす.

$$\tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_2) = -\alpha \tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_1) =: r \quad (21)$$

ここで, α は正のスカラー値である.

(21) 式の近似解は以下の γ 最小化問題を解くことで得ることができる.

$$\{\tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_2) - r\} \{\tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_2) - r\}^T < \gamma \quad (22)$$

しかし, 解 F_1, F_2 を同時に得ることは難しい. そこで, 簡易な決定手法を以下に示す.

Step 1 F_1 を最適レギュレータなどで決定し, $F_a = F_1$ と適当な Q を用いて (12) 式を解くことで P を導出する.

Step 2 $r = -\alpha \tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_1)$ として γ を最小化する以下の LMI 最適化問題を解き F_2 を導出する.

$$\min_{F_2 \in \mathbb{R}^{1 \times (n+d)}} \gamma \quad \text{s.t.} \quad (20), (22) \quad (23)$$

4. 空圧式除振台への応用

4.1 空圧式除振台

制御対象は Fig. 3 に示す空圧式除振台 (Herz 社製 DT-4048A) であり, 台を四つの空気ばねにより支える構造をとっている. さらに, 振動絶縁性能を向上させるために Fig. 4 に示すように空気ばねがバッファタンクと繋がっている点の特徴である. 四つの空気ばねの内圧を同時にアクティブに変化させることで鉛直並進方向の運動を制御する. この構成を前提とし, 2章で述べた制御手法により台上で発生した大変位の振動を高速に抑制することを目指す.

鉛直並進方向の変位 z はキーエンス社製レーザ変位センサ LB-02 で検出する. 速度 $\dot{z}$ は変位信号を差分速度演算すること入手する. 空気ばねの内圧 p_a とバッファタンクの内圧 p_b はコガネイ社製圧力センサ GS610A で検出する. 以上より, すべての状態変数 $\tilde{x}[k]$ の値が観測可能である. 空気ばねの内圧は電磁弁の開閉状態を変えることで空気ばねに流入出する空気の流れを調整することで調整する. なお, 電磁弁は Fig. 4 の空圧回路に示すように計 6 個用いており, それぞれの弁の開閉状態の組み合わせを変えることで空気の流れを多段階に調整できる. これによって制御入力である質

Fig. 3 Pneumatic isolation table

Fig. 4 Pneumatic circuit

量流量は量子化入力となる．電磁弁 #1, #2 はコガネイ社製 K2-100HF-04-NC を, #3~#6 はクロダニューマティクス社製 VA01HPSC24-1PE-L5 を使用する．また, 配管による圧力損失などにより弁を開いてから空気ばねに空気が流れるまでに一定のむだ時間 ($L = 10$ ms) が存在する．各センサで取得した変位および圧力信号は, 16 bit の A/D を介して DSP (mtt 社製 HeronDSP6x67) に送られ, 制御演算を行なう．その後, デジタル I/O を介して電磁弁に指令電圧を加える．サンプリング時間は 2 ms としてデジタル制御を行なう．

4.2 制御モデル

空圧式除振台のモデルを **Fig. 5** に示す．このモデルは四つの空気ばねを一つの空気ばねに見たモデルである．本稿では鉛直並進方向のみの運動に限定して考える．空気ばね内の熱力学的な平衡条件を考慮すると, 空圧式除振台の運動方程式は次式となる．

$$M\ddot{z} + c_p\dot{z} + k_p z = S p_a \quad (24)$$

$$\dot{p}_a = \frac{\kappa R_s T_s}{(z_a + h_p z) S} (u(t - L) - \mu(p_a - p_b)) - \frac{\kappa(p_0 + p_a)}{z_a + h_p z} h_p \dot{z} \quad (25)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\kappa R_s T_s}{z_b S} \mu(p_a - p_b) \quad (26)$$

ここで, z は除振台の鉛直方向の変位である． p_a は平衡点圧力 p_0 からの空気ばね内圧変化, p_b は平衡点圧力 p_0 からのバッファタンク内圧変化である． u は空気ばねに流入する質量流量, M は除振台の質量, k_p は四つの空気ばねの等価ばね定数, c_p は四つの空気ばねの等価粘性定数である． S は除振台と空気ばねの接触面積, R_s は気体定数, κ は比熱比である． T_s は気体温度, μ はバルブ係数, L は質量流量のむだ時間である． V_a は平衡点圧力での空気ばねの体積, V_b はバッファタンクの体積である． z_a は等価空気ばね高さで $V_a = S z_a$ を満たす値, z_b は等価バッファタンク高さで $V_b = S z_b$ を満たす値である． V は平衡点体積 V_a からの体積変化である． h_p は体積変換係数で $V = h_p S z$ を満たす値である．パラメータはインパルス状の外乱に対する実機実験による自由応答から求めた．各パラメータの値を **Table 1** に示す．本システムでは $z_a \gg h_p z$, $p_0 \gg p_a$ の関係が成り立つので, (25) 式を次式のように近似する．

$$\dot{p}_a = K_{gp} u(t - L) - K_{zp} \dot{z} - K_a p_a + K_a p_b \quad (27)$$

ここで $K_{gp} = \frac{\kappa R_s T_s}{z_a S}$, $K_{zp} = \frac{\kappa p_0 h_p}{z_a}$, である．さらに $K_a = K_{gp} \mu$, $K_b = \frac{\kappa R_s T_s}{z_b S} \mu$ とおいた．以上より, 状態変

数を $x = [z, \dot{z}, p_a, p_b]^T$ とし, 制御入力を u とすれば, 状態方程式は次式となる．

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + b_c u(t - L) \quad (28)$$

ここで, A_c , b_c は次式である．

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_p/M & -c_p/M & S/M & 0 \\ 0 & -K_{zp} & -K_a & K_a \\ 0 & 0 & K_b & -K_b \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{gp} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

また電磁弁の開閉の組み合わせを **Table 2** のように限定し, 適切に動かすことで, 量子化器 ϕ は次式に示すように 5 値に量子化する関数となる．

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} G_{2+} & , \text{if } \sigma_{2+} \leq \sigma \\ G_{1+} & , \text{if } \sigma_{1+} \leq \sigma \leq \sigma_{2+} \\ G_{1-} & , \text{if } \sigma_{2-} \leq \sigma \leq \sigma_{1-} \\ G_{2-} & , \text{if } \sigma \leq \sigma_{2-} \\ 0 & , \text{others} \end{cases} \quad (30)$$

ここで $\sigma = \Psi(-F\hat{x}[k])$ は ϕ への入力であり, σ_{2+} , σ_{1+} , σ_{1-} , σ_{2-} は量子化器の設計パラメータである．ここで, 3 章のゲイン決定手法によって得られたゲインを用いて所望の応

Table 1 Plant parameter values

Displacement of isolation table	z	[m]
Air spring pressure deviation	p_a	[Pa]
Buffer tank pressure deviation	p_b	[Pa]
Control input (mass flow rate)	u	[kg/s]
Primary pressure	p_0	0.035 [MPa]
Mass of table	M	13.6 [kg]
Equiv. spring constant	k_p	9.34×10^3 [N/m]
Equiv. damping coefficient	c_p	25.6 [Ns/m]
Contact area of air spring	S	2.83×10^{-3} [m ²]
Gas constant	R_s	287 [J/(kg·K)]
Ratio of specific heat	κ	1.4 [-]
Gas temperature	T_s	293 [K]
Valve coefficient	μ	2.34×10^{-7} [kg/(s·Pa)]
Time-delay of mass flow rate	L	10 [ms]
Equiv. air spring height	z_a	0.050 [m]
Equiv. buffer tank height	z_b	0.365 [m]
Volume conversion coefficient	h_p	2 [-]
Max. mass flow rate	G_{2+}	5.14×10^{-4} [kg/s]
Second-largest mass flow rate	G_{1+}	1.93×10^{-4} [kg/s]
Second-smallest mass flow rate	G_{1-}	-2.57×10^{-4} [kg/s]
Min. mass flow rate	G_{2-}	-3.64×10^{-4} [kg/s]

Table 2 Driving pattern of the solenoid valve

	Val. #1	Val. #2	Val. #3	Val. #4	Val. #5	Val. #6	Control input
Inflow	On	On	-	-	-	-	G_{2+}
	On	-	-	-	-	-	G_{1+}
Outflow	-	-	On	On	-	-	G_{1-}
	-	-	On	On	On	On	G_{2-}
	-	-	-	-	-	-	0

On: Valve is open. -: Valve is closed.

Fig. 5 Model

Fig. 6 Quantization for the pneumatic isolation table

答を得るためには Type C の量子化器を用いる必要がある。そこで、 σ_i は量子化誤差の符号がなるべく一定になるように、 $\sigma_{2+} = G_{1+}$, $\sigma_{1+} = 0$, $\sigma_{1-} = G_{1-}$, $\sigma_{2-} = G_{2-}$ と設定した。その結果、量子化器は Fig. 6 (a) に示す Type C' の量子化器となる。各パラメータの値を Table 1 に示す。また、後述する従来手法においては量子化誤差が小さくなるように Fig. 6 (b) に示す Type B の量子化器を用いることにする。この場合のパラメータは $\sigma_{2+} = (G_{1+} + G_{2+})/2$, $\sigma_{1+} = G_{1+}/2$, $\sigma_{1-} = G_{1-}/2$, $\sigma_{2-} = (G_{1-} + G_{2-})/2$ と設定した。(注意 2) Fig. 6 (a) に示す Type C' の量子化器は、 $\sigma \leq \sigma_A$ の領域で $\varepsilon_j \geq 0$ となり、この領域で Fig. 1 の Type C と同様に 3 章の方法における前提条件を満たす。

4.3 制御系設計

対象システム (1) 式の係数行列 A , b は (29) 式の係数行列 A_c , b_c をサンプリング周期 2ms で入力に 0 次ホールドを適用して離散化したものとする。むだ時間ステップ数は $d = 5$ となる。以上より (2) 式の拡大系の状態変数は次式となる。

$$\hat{x}[k] = [x[k]^T, u[k-5], u[k-4], \dots, u[k-1]]^T \quad (31)$$

(6) 式の切替関数 Ψ は二つの条件 C_1 , C_2 によって実行することとし、フィードバックゲインは F_1 と F_2 の二つを用いる。フィードバックゲイン F_1 は以下の重み行列 Q_1 , R_1 を用いた最適レギュレータによって $(\tilde{A} - \tilde{b}F_1)$ が安定行列となるように、 $Q_1 = \text{diag}\{10^3, 10^{13}, 10^0, 10^3, 10^{13}, 10^{13}, 10^{13}, 10^{13}, 10^{13}\}$, $R_1 = 1$ とした。 Q_1 は状態変数に対する重み行列、 R_1 は入力に対する重み行列である。 Q_1 はつぎの考え方で定めた。本制御対象においては、台の速度 $\dot{z}[k]$ に対する重みを大きく設定し、空気ばね内圧 $p_a[k]$ に対する重みは小さめに設定すると、原点への収束性が増す傾向にある。そのため、 R_1 は固定し、発散しない範囲で $\dot{z}[k]$ に対する重みを大きく設定し、その後、 $p_a[k]$ に対する Q_1 の重みを小さくするように微調整した。 P は $F_a = F_1$ とし、 Q を $Q = I_{9 \times 9}$ として (12) 式を解いて求めた。このとき、 Q は対角行列であれば、性能はほとんど変わらなかったため、もっとも単純な構造である単位行列を選んだ。最後に、求めた F_1 と P を用いて (23) 式の LMI を $\alpha = 1$ として解くことで F_2 を求めた。その結果、得られた F_1 と F_2 は以下ようになった。 $F_1 = [1.03 \times 10^0, 2.81 \times 10^{-1}, 5.52 \times 10^{-7}, 2.28 \times 10^{-6}, 9.09 \times$

Fig. 7 Simulation results

$10^{-1}, 8.65 \times 10^{-1}, 8.11 \times 10^{-1}, 7.40 \times 10^{-1}, 6.43 \times 10^{-1}]$, $F_2 = [-1.41 \times 10^0, -7.86 \times 10^{-3}, 1.49 \times 10^{-7}, 5.39 \times 10^{-7}, 2.84 \times 10^{-1}, 3.69 \times 10^{-1}, 5.00 \times 10^{-1}, 7.01 \times 10^{-1}, 1.01 \times 10^0]$.

(注意 3) (10) 式の P は (12) 式だけでなく、 $\tilde{A}^T P \tilde{A} - P < 0$ も満たすように導出すれば、定理 2 よりシステムの漸近安定が保証される。しかし、この場合に得られるゲインは保守的になってしまう。そのため、速い応答性を得るために、(12) 式のみを解くことで P を導出した。この場合、システムの有界性のみしか保証されないが、実験結果によれば、この制御対象に関しては実用上の問題はない。

(注意 4) (23) 式の LMI を用いずにゲインを試行錯誤により決定する場合には、高い制振性能をもたらすゲインの組を見つけるのは多大な時間を要し、非常に難しい。

5. 数値シミュレーション結果

5.1 数値シミュレーション条件

(28) 式をサンプリング周期 2ms で離散化した制御対象に対して、数値シミュレーションを実行した。インパルス状の外乱に対する変位 z の時間応答を確認する。外乱は 1s 経過後に加える。なお、これは台の上方向 30cm の位置から野球ボール (質量 200g) を自由落下させたことに相当する。

5.2 提案手法によるシミュレーション結果

提案手法を用いた結果を Fig. 7 に示す。Fig. 7 において、上から 1 段目は変位 z を示し、2 段目は 1 段目の応答における 1s~1.5s の拡大図である。また、3 段目は提案手法を用いた場合の制御入力 u を示している。Fig. 7 の 1 段目、2 段目の応答図において、ODQ は設計した最適動的量子化器⁹⁾を Fig. 6 (b) に示す Type B の非線形量子化器に適用した場合

の応答を示し、ODQ-Iは設計した最適動的量子化器を Fig. 1 に示す Type A の線形量子化器に適用した場合の応答を示している。なお、外乱応答に関しては適切な上界値パラメータを事前を知ることはできないため、文献 10) の最適量子化器を使うことができない。そこで、ここでは文献 9) の最適動的量子化器を比較対象として用いた。2 段目の変位 z に示すように、ODQ-I では理想的な応答を示すものの、ODQ の応答は収束応答が劣化することがわかる。これは非線形量子化器を用いていることに起因する。一方、提案手法を用いた場合には Fig. 6 (a) に示す Type C' の非線形量子化器を用いているにもかかわらず、変位 z は ODQ と比べると原点近傍に素早く収束していることがわかる。なお、結果は省略するが、提案手法を Fig. 6 (b) に示す Type B の非線形量子化器に適用した場合にも同様の応答を得る。以上より提案手法がインパルス外乱抑制に効果的であることが確認できた。

(注意 5) 仮に上界値パラメータが適切に設定できたとすると、文献 10) の量子化器によって望ましい応答が得られることも確認している。しかし、設定した上界値と異なる上界値をもつ外乱が加わると、応答が極端に劣化してしまうため、文献 10) の手法を用いて高い外乱抑制性能を得るのは難しい。

6. 実験結果

6.1 実験概要

提案手法の効果を確認するために、空圧式除振台を用いたインパルス外乱による実機実験結果を示す。インパルス状の外乱の影響を確認する。外乱は数値シミュレーション時に想定したものと同様である。なお、外乱は実験開始 1s 経過後に加えた。また、(8) 式の条件 $e_j < 0$ では圧力信号ノイズに敏感に反応してしまい、外乱を印加する前から予期せぬ入力を加えてしまうため $e_j < 0$ を $e_j < -1.5 \times 10^5$ と修正して 2.2 節の提案手法を適用する。なお、 e_j の値は 10^7 オーダまで変動する。これは圧力 p_a が 10^3 オーダで変動し、(12) 式の解である P の要素に 10^{10} オーダを超える大きな値が存在することに起因している。そのため、 -1.5×10^5 は比較的小さい値であるといえる。また、設計パラメータは数値シミュレーションに使用したものと同様である。

6.2 実験結果

Fig. 8 に実験結果を示す。Fig. 8 の上から 1 段目～5 段目の図はそれぞれ、変位 z 、提案手法を用いた場合の制御入力 u 、 $\text{sgn}(\varepsilon_1[k]\varepsilon_2[k])$ の値、(9) 式の $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ の値、選択されたゲインを示している。制御入力 u である流量は直接測定したものではなく、Table 2 の組み合わせで弁を開いたときの静的な流量特性を予備実験により求め、弁を開くための指令電圧から対応する流量 (Table 2 の G_{2+} など) を表示している。なお、3 段目～5 段目の応答図は入力に変化のあった 1s～1.5s 間を表示している。1 段目の変位 z において、ODQ は 5.2 節で述べた最適動的量子化器を Fig. 6 (b) に示す Type B の非線形量子化器に適用した場合の応答である。一方、提案手法では Fig. 6 (a) に示す Type C' の非線形量子化器を用い

Fig. 8 Experimental results

た。1 段目の変位 z を見ると、提案手法を用いた場合、変位 z は ODQ と比べると原点近傍に素早く収束していることがわかる。このとき、ODQ を用いた場合の応答の整定時間は 0.50s であった。ここで、整定時間は制御なしの場合における変位の最大振幅の $\pm 10\%$ 以内に留まるまでの時間とした。一方、提案手法の場合には、整定時間は 0.26s であり、提案手法により高い制振性能を得ていることがわかる。

3 章のゲイン決定手法によって適切にゲインが決定されているならば、(9) 式の $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ の符号は F_1 と F_2 を用いた場合とで反転し、 $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ が負になるゲインが選択されると期待される。このことを確認するために、3 段目～5 段目の応答図に着目する。3 段目の $\text{sgn}(\varepsilon_1[k]\varepsilon_2[k])$ の値を見ると、1.2s 付近以降はおおむね $\text{sgn}(\varepsilon_1[k]\varepsilon_2[k]) = 1$ であり、 $\varepsilon_1[k]$ と $\varepsilon_2[k]$ は同符号であることがわかる。つまり、この時間帯においては、3 章の方法における前提条件を満たしていることになる。このとき、4 段目の $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ を見ると、同時時間帯において、 $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ の符号は F_1 と F_2 を用いた場合とで反転していることがわかる。さらに、5 段目の選択されたゲインを見ると、同時時間帯において、4 段目の $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ が負に

なるゲインをおおむね選択しており、(9)式の $E_2(\tilde{x}, \varepsilon_j)$ の影響によりリアプノフ関数の時間差分を小さくしていることがわかる。よって、3章のゲイン決定手法によって適切にゲインが決定されていることが確認できる。一方、3段目の図を見ると、1.2s 付近までは、 $\varepsilon_1[k]$ と $\varepsilon_2[k]$ は同符号と異符号を頻繁に繰り返している。これは、実際に使用した量子化器は Type C のような完全に量子化誤差が正になる量子化器ではなく、Fig. 6(a) の Type C' のように $\sigma > \sigma_A$ の入力に対しては量子化誤差が負になってしまうことに起因している。しかし、このような場合でも、結果的には制御則は有効に機能していることがわかる。なお、ゲイン F_1 のみを用いて提案手法を適用した場合には、制振性能は劣化した。このことから、提案手法において複数のゲインを用いたほうが有効であることが確認できた。また、量子化器として Fig. 6(b) に示す Type B の量子化器を用いた場合にも、同様の制振性能を得ることができており、必ずしも ε_1 と ε_2 の符号が同符号とまらない状況においても提案手法が有効に働くことを確認した。以上より、提案手法が外乱抑制に有効であることがわかる。なお、定理 1 の E_x の値は 10^{18} オーダとなっていたが、これは $\lambda_{\min}\{P^{-1/2}QP^{-1/2}\}$ が 10^{-15} オーダであることに大きく起因している。一方、 $\|\tilde{x}\|$ は 10^3 オーダで変動していたため、 $\|\tilde{x}\| \leq E_x$ は満たされているものの、保守的な結果となった。より保守的でない条件の導出は今後の課題である。

7. おわりに

本稿では、非線形量子化器を含むシステムに対し、目標値応答のみならず外乱応答に対する性能向上を目指し、量子化操作によって生じる量子化誤差を考慮した複数ゲインの切替による制御法を提案した。さらに、複数ゲインの LMI に基づくシステムティックな決定手法を提案した。空圧式除振台への応用結果を通して、提案手法が高い制振性能を有することを確認した。ヘルツ株式会社様には除振台実験装置、センサをご提供いただきました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) K. Kawashima, T. Kato, K. Sawamoto and T. Kagawa: Realization of virtual sub chamber on active controlled pneumatic isolation table with pressure differentiator, *Precision Engineering*, **31**-2, 139/145 (2007)
- 2) P.H. Chang, D.K. Han, Y.H. Shin and K.J. Kim: Effective suppression of pneumatic vibration isolators by using input-output linearization and time delay control, *Journal of Sound and Vibration*, **329**-10, 1636/1652 (2010)
- 3) S. Wakui: Inline compensation control using an air-spring type active isolated apparatus, *Precision Engineering*, **27**-2, 170/174 (2003)
- 4) 小池, 中澤, 千田, 池田, 安田: On-Off 操作と入力むだ時間の補償による空圧式除振台の高速振動抑制制御, 日本機械学会論文集 C 編, **77**-779, 2613/2626 (2011)
- 5) M. Ishikawa, I. Maruta and T. Sugie: Practical Controller Design for Discrete-valued Input Systems using Feedback Modulators, *Proc. ECC07*, 3269/3274 (2007)
- 6) A. Sellier, X. Brun, S. Sesmat, J.M. Retif, X.L. Shi, D. Thomasset and M. Smaoui: Hybrid Force Control With

On/Off Electropneumatic Standard Distributors, *International Journal of Fluid Power*, **7**-1, 51/60 (2006)

- 7) X. Legrand, J.M. Retif, M. Smaoui, X. Brun, D. Thomasset and X.F.L. Shi: Hybrid control with on/off electropneumatic standard valve for tracking positioning, *Power Transmission and Motion Control*, 45/57 (2005)
- 8) D. Akasaka and K.Z. Liu: Nonlinear feedback control of a class of on-off control systems: An approach based on analytical solution of PDEs, *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, 86/91 (2007)
- 9) 南, 東, 杉江: 離散値入力型フィードバック制御における最適動的量子化器, 計測自動制御学会論文集, **43**-3, 227/233 (2007)
- 10) 東 俊一: 離散値入力型制御系の実践的設計法—動的量子化器を用いたアプローチ, システム/制御/情報, **55**-11, 465/472 (2011)
- 11) O.J.M. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, *ISAJ*, **6**-2, 28/33 (1959)
- 12) 岡島, 梅本, 松永, 川路: むだ時間を有する 2 自由度 IMC における動的量子化器の構成, 計測自動制御学会論文集, **46**-3, 149/156 (2010)
- 13) 阿部, 児島: むだ時間・分布定数系の制御, コロナ社 (2007)
- 14) E. Fridman and M. Dambrine: Control under quantization, saturation and delay: An LMI approach, *Automatica*, **45**-10, 2258/2264 (2009)
- 15) D. Liberzon: Quantization, Time Delays, and Nonlinear Stabilization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**-7, 1190/1195 (2006)

《付 録》

A. 定理 1 の証明

集合 $\chi := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n+d} : \|\tilde{z}\| \leq H\}$, $\bar{\chi} := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n+d} : \|\tilde{z}\| > H\}$, $\chi_z := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n+d} : \|\tilde{z}\| \leq E_z\}$ を定義しておく。ここで、 $\tilde{z}$ は (12) 式の解である $P > 0$ による座標変換 $\tilde{x}[k] = P^{-1/2}\tilde{z}[k]$ で定義される新たな状態変数である。 H , E_z は次式で定義する。

$$H := \frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda_{\min}\{P^{-1/2}QP^{-1/2}\}} \left(\|\tilde{b}^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_a)P^{-1/2}\| + \sqrt{\|\tilde{b}^T P(\tilde{A} - \tilde{b}F_a)P^{-1/2}\|^2 + \lambda_{\min}\{P^{-1/2}QP^{-1/2}\}\|\tilde{b}^T P\tilde{b}\|} \right)$$

$$E_z := \|P^{1/2}\tilde{A}P^{-1/2}\|H$$

なお、定理 1 の仮定である $\tilde{A}^T P \tilde{A} - P \geq 0$ は $\|P^{1/2}\tilde{A}P^{-1/2}\| \geq 1$ と等価であるため、 $E_z \geq H$ は明らかである (Fig. A.1 (a) 参照)。

まず初めに、 $\tilde{z}[k] \in \bar{\chi}$ ならば $\Delta V < 0$ であることを示す。

Fig. A.1 State transition

座標変換 $\tilde{x}[k] = P^{-1/2} \tilde{z}[k]$ を用いると, (16) 式は次式となる.

$$V[k] = \tilde{z}[k]^T \tilde{z}[k] \quad (\text{A.1})$$

(15) 式と $\tilde{x}[k] = P^{-1/2} \tilde{z}[k]$ を用いれば, $\Delta V[k]$ は次式となる.

$$\begin{aligned} \Delta V[k] &= \tilde{z}[k]^T P^{-1/2} \{ (\tilde{A} - \tilde{b}F_j)^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_j) - P \} P^{-1/2} \tilde{z}[k] \\ &\quad + 2\varepsilon_j[k]^T \tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_j) P^{-1/2} \tilde{z}[k] + \varepsilon_j[k]^T \tilde{b}^T P \tilde{b} \varepsilon_j[k] \\ &= e_j[k] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ここで, ゲイン F_a を用いたときの $\Delta V[k]$ である $e_a[k]$ が $e_a[k] < 0$ となるための十分条件を導出する. (A.2) 式に (5) 式と (12) 式の関係を用いれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} e_a[k] &\leq -\tilde{z}[k]^T P^{-1/2} Q P^{-1/2} \tilde{z}[k] \\ &\quad + 2\|\varepsilon_a[k]^T \tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_a) P^{-1/2} \tilde{z}[k]\| \\ &\quad + \varepsilon_a[k]^T \tilde{b}^T P \tilde{b} \varepsilon_a[k] \\ &\leq -\lambda_{\min}\{P^{-1/2} Q P^{-1/2}\} \|\tilde{z}[k]\|^2 \\ &\quad + 2\tilde{\varepsilon} \|\tilde{b}^T P (\tilde{A} - \tilde{b}F_a) P^{-1/2}\| \|\tilde{z}[k]\| + \tilde{\varepsilon}^2 \|\tilde{b}^T P \tilde{b}\| \\ &=: H_s[k] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

もし, $H_s[k] < 0$ であれば, $e_a[k] < 0$ が満たされる. $H_s[k] < 0$ の不等式を解の公式を用いて $\|\tilde{z}[k]\|$ について解く. その結果, $e_a[k] < 0$ の十分条件として次式を得る.

$$\|\tilde{z}[k]\| > H \quad (\text{A.4})$$

よって, もし, $\tilde{z}[k] \in \bar{\chi}$ ならば $e_a[k] < 0$ が満たされる. つまり, $\tilde{z}[k] \in \bar{\chi}$ で (8) 式に従ってゲイン F_a が選択されれば, $\Delta V < 0$ となる. 一方, $\tilde{z}[k] \in \bar{\chi}$ において, ほかのゲイン F_j ($j \neq a$) が選択される場合には, (8) 式の条件 C_j が真であるので, 明らかに $e_j[k] \leq e_a[k]$ が満たされている. その結果, たとえゲイン F_j ($j \neq a$) が選ばれたとしても $\Delta V < 0$ が満たされる. 以上より, $\tilde{z}[k] \in \bar{\chi}$ ならば, $\Delta V < 0$ であり, $\|\tilde{z}[k+1]\| < \|\tilde{z}[k]\|$ が満たされる. そのため, 初期値 $\tilde{z} \in \bar{\chi}$ に対して, $\tilde{z}[k^*] \in \chi_z$ となるような時刻 $k = k^*$ が存在する. そこで, $\tilde{z}[k^*] \in \chi_z$ となった後の $\tilde{z}[k]$ の遷移について考える. $\tilde{z}[k] \in \chi_z$ かつ $\tilde{z}[k] \notin \chi$ のとき, $\Delta V < 0$ が保証されているため, $\|\tilde{z}[k+1]\| < \|\tilde{z}[k]\|$ が満たされ, $\tilde{z}[k]$ は集合 χ_z の外には遷移しない. したがって, つぎの二つの遷移が考えられる.

Case 1: $\tilde{z} \in \chi_z$ かつ $\tilde{z} \notin \chi$ の状態に再び遷移する場合

Case 2: $\tilde{z} \in \chi$ の状態に遷移する場合

Case 1 の場合には, つぎの状態遷移で再び Case 1 あるいは Case 2 となる. 一方, Case 2 の場合は, $\tilde{z} \in \chi$ となるが, この場合には, $\Delta V = e_j < 0$ が保証されないため, 入力を印加する場合 ($u[k] = \phi(-F_j \tilde{x}[k])$) と印加しない場合 ($u[k] = 0$) が起こり得る. 入力を印加する場合は $\Delta V < 0$ が保証されているので $\|\tilde{z}[k+1]\| < \|\tilde{z}[k]\|$ が満たされ, $\tilde{z}[k+1]$ は $\tilde{z} \in \chi$ の

状態に再び遷移する (Case 3). 一方, 入力を印加しない場合, $\tilde{z}[k+1]$ は $\tilde{z}[k+1] = P^{1/2} \tilde{A} P^{-1/2} \tilde{z}[k]$ に従って振舞う. このとき, $\|\tilde{z}[k+1]\| \leq \|P^{1/2} \tilde{A} P^{-1/2}\| \|\tilde{z}[k]\|$ と $\|\tilde{z}[k]\| \leq H$ の関係式は明らかなので $\tilde{z}[k+1]$ は次式を満たす.

$$\|\tilde{z}[k+1]\| \leq E_z \quad (\text{A.5})$$

(A.5) 式より, $\tilde{z}[k+1]$ は集合 χ には属さない可能性はあるものの, 少なくとも集合 χ_z に属することは明らかである. つまり, $\tilde{z}[k] \in \chi$ において入力が印加されない場合, つぎの二つの遷移が考えられる.

Case 3: $\tilde{z} \in \chi$ の状態に再び遷移する場合

Case 4: $\tilde{z} \in \chi_z$ かつ $\tilde{z} \notin \chi$ の状態に遷移する場合

よって, 一度 $\tilde{z}[k]$ が集合 χ_z に属すると, $\tilde{z}[k]$ は Case 1 ~ Case 4 の遷移パターン (Fig. A.1 (b) 参照) を遷移し, $\tilde{z}$ は集合 χ_z に留まる.

以上より, $\|\tilde{x}[k]\| \leq \|P^{-1/2}\| \|\tilde{z}[k]\|$ と $\|\tilde{z}[k]\| \leq E_z$ の関係を用いれば, $\tilde{x}[k]$ は集合 Ω に収束することがわかる.

B. 定理 2 の証明

もし, 条件 C_j が真ならば, (8) 式と (17) 式より $e_j = \Delta V < 0$ ($\tilde{x} \neq 0$) が満たされる. 一方, すべての条件 C_j が偽ならば, (13) 式のシステムは $\tilde{x}[k+1] = \tilde{A} \tilde{x}[k]$ となる. このとき, $\Delta V = \tilde{x}^T[k] \{ \tilde{A}^T P \tilde{A} - P \} \tilde{x}[k]$ となり, 定理 2 の仮定より $\tilde{A}^T P \tilde{A} - P < 0$ が満たされているため $\Delta V < 0$ ($\tilde{x} \neq 0$) となる. よって, $\Delta V < 0$ ($\tilde{x} \neq 0$) が満たされ, (13) 式のシステムは漸近安定となる.

[著者紹介]

小池 雅和 (学生会員)

1981 年 6 月 12 日生. 2006 年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士前期課程修了. 同年エンジニアリングシステム (株) 入社. 2010 年信州大学大学院総合工学系研究科博士後期課程に進学し, 現在に至る. 日本機械学会の会員.

千田 有 一 (正会員・フェロー)

1990 年千葉大学大学院博士課程修了 (学術博士). 同年 (株) 東芝入社. 94~97 年東京工業大学情報理工学研究科客員助教授. 2002 年信州大学工学部, 現在同教授. システム制御情報学会, 日本機械学会, 電気学会, IEEE などの会員.

池田 裕 一 (正会員)

2006 年電気通信大学大学院電気通信学研究科博士後期課程修了 (工学博士). 同年釧路工業高等専門学校助手, 2007 年同助教. 2009 年信州大学工学部助教, 現在に至る. システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEE などの会員.