時間軸状態制御形にもとづく Chained System の安定化条件

山 川 聡 子*

Stabilization Conditions for Chained Systems Based on Time-state Control Form

Satoko YAMAKAWA*

The control method based on the Time-state control form makes it easy to apply the linear control theory into the controller design of chained systems. However, this control method requires the switches of the control inputs. Therefore, we have to discuss the stabilization conditions for the switched system. The sufficient conditions for stabilization have been previously formulated as the condition for the existence of a common Lyapunov function. In this paper, a common Lyapunov function for the switched system is shown explicitly. On the basis of the function, it is clarified that the stabilization conditions for the switched system are equal to those for a basic continuous-time linear system.

Key Words: time-state control form, chained system, switched system, stabilization conditions, common Lyapunov function

1. 緒 言

非線形システムの記述法の一つに chained form と呼ばれる正準形がある¹⁾。二輪車両やけん引車両などの運動モデルがこの正準形に変換できることが知られている。Chained form で表わされたシステム（以下, chained system）に対しては多くの制御手法が提案されている^{2), 3)}。その中の一つに chained system を時間軸状態制御形に変換して制御則を設計する手法がある⁴⁾。この手法を用いると非線形な chained system が、状態制御部と呼ばれる可制御正準形で表わされる線形システムと、見かけ上の時間軸を制御するための線形一次システムに変換される。そのため、線形制御理論を応用して比較的容易に制御系設計ができる。しかし、この手法では時間軸とみなした状態の増減に応じて入力切替が必要となる。

この切替を含めたシステムの安定性について、これまで著者らは周期的に切替を行なった場合の安定化の必要十分条件を示した⁵⁾。特に、3 次のシステムについては、この安定化条件が基本となる連続時間系の安定化条件と等価であることを示した。星・三平らは、共通リアプノフ関数⁶⁾を用いて、入力切替のタイミングにかかわらず安定化するための十分条件を示している⁷⁾。しかし、リアプノフ方程式の解に特殊な条件を課しているため、直接、この条件を満たすコントローラゲインを求めるのは困難として、LMI の可解問題に帰着させてコントローラ設計を行っていた。

本稿では、この安定化条件をさらに明確にするために、共通リアプノフ関数を具体的に示す。このリアプノフ関数にもとづいて、入力切替のタイミングにかかわらずシステムを安定化するための必要十分条件は、基本となる連続時間系が漸近安定であることを明らかにする。この結果、LMI を解くことなく、コントローラが設計できるようになる。

第2章で切替を含むシステムの定式化を示す。第3章では、切替の前後でシステムの極が等しくなるようにフィードバックゲインを選んだ場合について述べる。具体的に共通リアプノフ関数を示すことで、安定化条件を明らかにする。第4章では、切替の前後でシステムの極が異なるコントローラの設計例と安定化条件を示す。

なお、本稿では状態制御部の漸近安定化に関する議論に絞る。残りの時間軸とみなす状態を含む制御戦略については従来^{5), 7)}などを参照されたい。

2. Chained system と時間軸状態制御形

つぎの式で表わされる $n + 1$ 次元 ($n \geq 2$) の chained system を考える。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (1)$$

このシステムに対して、入力変換、

* 東洋大学理工学部 川越市鯨井 2100

* Faculty of Science and Engineering, Toyo University, 2100 Kujirai, Kawagoe

(Received October 16, 2012)

$$u_1 = \mu_2 \quad (2a)$$

$$u_2 = \mu_1 \mu_2 \quad (2b)$$

を用いる. x_0 が時間 t に対して単調増加するとき, すなわち, 入力 μ_2 の符号が正であるときには, x_0 を時間軸とみなすことで時間軸状態制御形が得られる⁴⁾.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_0} \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_1 \\ &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}\mu_1 \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \mu_2 > 0 \quad (3b)$$

(3a) 式は可制御正準形で表わされた線形システムである. 以下では, 状態 $\mathbf{x} = [x_n, \dots, x_2, x_1]^T$ に関するシステム (3a) を基本の連続時間系と呼ぶことにする.

一方, $\mu_2 < 0$ のときには, x_0 は時間 t に対して単調減少するので, x_0 のかわりに $x_0' = -x_0$ を時間軸とみなす. このとき, 時間軸状態制御形は,

$$\frac{d}{dx_0'} \mathbf{x} = E_n A E_n \mathbf{x} + (-1)^n E_n \mathbf{b} \mu_1 \quad (4a)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \mu_2 < 0 \quad (4b)$$

となる. ただし, E_n は

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{-1} \\ &= \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^{n-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

を満たす対角行列である.

ここで, あらためて時間軸として,

$$\tau = \int_0^t |\mu_2| dt' \quad (6)$$

を定義する. この τ と x_0 の関係は, $\mu_2 > 0$ では,

$$\frac{d\tau}{dx_0} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{dx_0} = \mu_2 \frac{1}{\mu_2} = 1$$

であり, $\mu_2 < 0$ では,

$$\frac{d\tau}{dx_0'} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{dx_0'} \frac{dx_0}{dx_0'} = (-\mu_2) \frac{1}{\mu_2} (-1) = 1$$

である. この τ を用いると, システム (3a) (4a) は,

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \begin{cases} A\mathbf{x} + \mathbf{b}\mu_1 & (\mu_2 > 0) \\ E_n A E_n \mathbf{x} + (-1)^n E_n \mathbf{b}\mu_1 & (\mu_2 < 0) \end{cases} \quad (7)$$

と共通の時間軸を用いて書き表わされる.

μ_2 の符号に応じて入力 μ_1 を

$$\mu_1 = \begin{cases} -\mathbf{k}\mathbf{x} & (\mu_2 > 0) \\ -(-1)^n \mathbf{k} E_n \mathbf{x} & (\mu_2 < 0) \end{cases} \quad (8)$$

と切替える. ただし, $\mathbf{k}$ は定数のゲインベクトルであり, $\mathbf{k} = [k_n, \dots, k_2, k_1]$ とおく. このとき, 状態 $\mathbf{x}$ はつぎの

区分的線形システムの状態として表わされる.

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \begin{cases} (A - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{x} & (\mu_2 > 0) \\ E_n (A - \mathbf{b}\mathbf{k}) E_n \mathbf{x} & (\mu_2 < 0) \end{cases} \quad (9)$$

注 1) フィードバックゲインを (8) 式のように選ぶと, (9) 式において μ_2 が正の場合と負の場合のシステムの極は等しい.

3. 共通リアプノフ関数

星らは, 切替を含むシステム (9) に対して,

$$V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (10)$$

が $\mu_2 > 0$ と $\mu_2 < 0$ の場合に共通なリアプノフ関数となる条件を示し, μ_2 の符号の切替タイミングにかかわらず状態 $\mathbf{x}$ が漸近的に $\mathbf{0}$ に収束するための十分条件を示している. その条件は, 以下の三つの条件を満たす対称行列 $P > 0$ が存在することである⁷⁾.

- 1) $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})^T P + P(A - \mathbf{b}\mathbf{k}) \leq -\mathbf{c}^T \mathbf{c}$
- 2) $P_{ij} = 0 \quad (i+j: \text{奇数})$
- 3) $(\mathbf{c}, (A - \mathbf{b}\mathbf{k}))$ が可観測

条件 2) は $P = E_n P E_n$ を満たすための P の i 行目 j 列目成分に関する条件である. 文献 7) では, 条件 1)~3) を満たす行列 P とゲイン $\mathbf{k}$ を直接解いて求めることは困難であるとし, LMI の可解問題に帰着してゲイン $\mathbf{k}$ を求める方法を提案している.

本稿では, 共通リアプノフ関数となる条件を満たす P 行列を具体的に示すことで, $\mathbf{x}$ が漸近的に $\mathbf{0}$ に収束するための必要十分条件は, $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ が漸近安定 ($\text{Re}(\lambda_i(A - \mathbf{b}\mathbf{k})) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) であることを示す.

以下では, n 次元の $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ を A_n と書き表わす.

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & \cdots & -k_2 & -k_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

また, $\mathbf{c}_n$ を n 次元のベクトル,

$$\mathbf{c}_n = [\cdots \sqrt{2} k_5 \ 0 \ \sqrt{2} k_3 \ 0 \ \sqrt{2} k_1] \quad (12)$$

とおく.

つぎの漸近式で表わされる $n \times n$ 行列 P_n を定義する.

$$P_1 = k_1$$

$$P_n = \Gamma_n + \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & & \\ \vdots & & P_{n-1} \\ \hline 0 & & \end{bmatrix} \quad (n \geq 2) \quad (13)$$

ただし, 行列 Γ_n の i 行目 j 列目成分 Γ_{nij} は, $(i+j)$ が奇数であるときには 0 であり, $(i+j)$ が偶数であるときには,

$$\Gamma_{nij} = \begin{cases} (-1)^{i+1} k_n k_{(n+1)-(i+j)} & (n+1 > i+j) \\ (-1)^{i+1} k_n & (n+1 = i+j) \\ 0 & (n+1 < i+j) \end{cases} \quad (14)$$

である.

$(i+j)$ が奇数のときに Γ_{nij} は 0 であることから, (13) 式で定義した P_n , $n = 1, 2, \dots$ は $P_n = E_n P_n E_n$ (条件 2)) を満たす.

以上の行列について, つぎの関係が成り立つ.

《補題 1》

(11)~(13) 式の A_n , c_n , および P_n は,

$$A_n^T P_n + P_n A_n = -c_n^T c_n \quad (15)$$

を満たす. $\square$

(証明)

まず, $n = 1$ のとき,

$$A_1 = -k_1, \quad P_1 = k_1, \quad c_1 = \sqrt{2} k_1 \quad (16)$$

であるので (15) 式が成り立つ.

つぎに, $n = m$ のときに (15) 式が成り立つと仮定する. m が偶数のとき, $n = m+1$ では,

$$\begin{aligned} & P_{m+1} \\ &= \begin{bmatrix} k_{m+1}k_m & 0 & k_{m+1}k_{m-2} & 0 \cdots & 0 & k_{m+1} \\ 0 & -k_{m+1}k_{m-2} & 0 & \cdots & -k_{m+1} & 0 \\ k_{m+1}k_{m-2} & 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & -k_{m+1} & \ddots & & & \mathbf{0} \\ k_{m+1} & 0 & & & & \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P_m \\ 0 & \end{bmatrix} \\ &A_{m+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_m \\ -k_{m+1} & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} & P_{m+1} A_{m+1} \\ &= \begin{bmatrix} -k_{m+1}^2 & 0 & -k_{m+1}k_{m-1} & 0 & -k_{m+1}k_{m-3} \cdots -k_{m+1}k_1 \\ 0 & 0 & -k_{m+1}k_{m-2} & 0 & -k_{m+1}k_{m-4} \cdots -k_{m+1} \\ 0 & k_{m+1}k_{m-2} & 0 & k_{m+1}k_{m-4} & \\ \vdots & 0 & -k_{m+1}k_{m-4} & \ddots & \\ \vdots & k_{m+1}k_{m-4} & & \ddots & \\ \vdots & & & & \mathbf{0} \\ 0 & k_{m+1} & & & \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ -k_{m+1}d_m & P_m A_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である. ただし, d_m は P_m の m 列目のベクトルである. (13), (14) 式において Γ_m の m 列目は m が奇数のとき, $[k_m \ 0 \cdots 0]^T$ であり, m が偶数のときは $\mathbf{0}$ であることに注意すれば, P_m の m 列目は,

$$d_m = [\cdots k_5 \ 0 \ k_3 \ 0 \ k_1]^T \quad (17)$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} & A_{m+1}^T P_{m+1} + P_{m+1} A_{m+1} \\ &= \begin{bmatrix} -2k_{m+1}^2 & 0 & -k_{m+1}k_{m-1} & 0 & -k_{m+1}k_{m-3} \cdots -k_{m+1}k_1 \\ 0 & & & & \\ -k_{m+1}k_{m-1} & & & & \\ 0 & & & & \mathbf{0} \\ -k_{m+1}k_{m-3} & & & & \\ \vdots & & & & \\ -k_{m+1}k_1 & & & & \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -k_{m+1}d_m^T \\ -k_{m+1}d_m & A_m^T P_m + P_m A_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2k_{m+1}^2 & 0 & -2k_{m+1}k_{m-1} & 0 & -2k_{m+1}k_{m-3} \cdots -2k_{m+1}k_1 \\ 0 & & & & \\ -2k_{m+1}k_{m-1} & & & & \\ 0 & & & & -c_m^T c_m \\ -2k_{m+1}k_{m-3} & & & & \\ \vdots & & & & \\ -2k_{m+1}k_1 & & & & \end{bmatrix} \\ &= -c_{m+1}^T c_{m+1}, \\ & c_{m+1} = [\sqrt{2} k_{m+1} \ 0 \ \sqrt{2} k_{m-1} \ 0 \ \sqrt{2} k_{m-3} \ \cdots \ \sqrt{2} k_1] \end{aligned} \quad (18)$$

より, $n = m+1$ でも (15) 式が成り立つ. 一方, m が奇数の場合は,

$$\begin{aligned}
& P_{m+1} \\
& = \begin{bmatrix} k_{m+1}k_m & 0 & k_{m+1}k_{m-2} & 0 & \cdots & k_{m+1}k_1 & 0 \\ 0 & -k_{m+1}k_{m-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{m+1}k_{m-2} & 0 & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ k_{m+1}k_1 & 0 & & & & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & & & & & \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_m & \\ 0 & & & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
& P_{m+1}A_{m+1} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & k_{m+1}k_m & 0 & k_{m+1}k_{m-2} & 0 & \cdots & k_{m+1}k_1 \\ 0 & 0 & -k_{m+1}k_{m-2} & 0 & -k_{m+1}k_{m-4} & \cdots & 0 \\ k_{m+1}k_{m-2} & 0 & k_{m+1}k_{m-4} & & & & \\ 0 & -k_{m+1}k_{m-4} & & & & & \\ \vdots & k_{m+1}k_{m-4} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{m+1}\mathbf{d}_m & P_m A_m & & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned}
& A_{m+1}^T P_{m+1} + P_{m+1} A_{m+1} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & k_{m+1}k_m & 0 & k_{m+1}k_{m-2} & 0 & \cdots & k_{m+1}k_1 \\ k_{m+1}k_m & 0 & & & & & \\ 0 & k_{m+1}k_{m-2} & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ k_{m+1}k_1 & & & & & & \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -k_{m+1}\mathbf{d}_m^T \\ -k_{m+1}\mathbf{d}_m & A_m^T P_m + P_m A_m \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & -\mathbf{c}_m^T \mathbf{c}_m & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \\
& = -\mathbf{c}_{m+1}^T \mathbf{c}_{m+1}, \\
& \mathbf{c}_{m+1} = [0 \ \sqrt{2}k_m \ 0 \ \sqrt{2}k_{m-2} \ 0 \cdots \ \sqrt{2}k_1] \quad (19)
\end{aligned}$$

となり, $n = m + 1$ で (15) 式が成り立つ. よって, 数学的帰納法により, (15) 式は任意の $n \geq 1$ で成り立つ. ■

つぎに, $(\mathbf{c}_n, A_n)$ の可観測性について示す.

《補題 2》

A_n が漸近安定ならば, (11), (12) 式の $(\mathbf{c}_n, A_n)$ は可観測である. □

(証明)

I_n を n 次元の単位行列とする.

$$\begin{aligned}
& \text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A_n \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \\
& = \text{rank} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & -1 \\ k_n & \cdots & k_3 & k_2 & s + k_1 \\ \cdots & \sqrt{2}k_3 & 0 & \sqrt{2}k_1 \end{bmatrix} \\
& = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ |sI_n - A_n| & \cdots & s^2 + k_1s + k_2 & s + k_1 \\ (k_1s^{n-1} + k_3s^{n-3} + \cdots) & \cdots & k_1s & k_1 \end{bmatrix} \\
& = (n-1) + \text{rank} \begin{bmatrix} |sI_n - A_n| \\ k_1s^{n-1} + k_3s^{n-3} + \cdots \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と計算できるので, 右辺二項目のベクトル,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} |sI_n - A_n| \\ f_2(s) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& f_2(s) \\
& = \begin{cases} k_1s^{2m} + k_3s^{2(m-1)} + \cdots + k_n & (n=2m+1) \\ s(k_1s^{2(m-1)} + k_3s^{2(m-2)} + \cdots + k_{n-1}) & (n=2m) \end{cases}
\end{aligned}$$

を $\mathbf{0}$ にする複素数 s が存在しなければ可観測である. A_n が漸近安定であるとき, 実部が非負の s に対して $|sI_n - A_n| \neq 0$ である. そこで, 実部が負である複素数 λ が $f_2(\lambda) = 0$, および $|\lambda I_n - A_n| = 0$ を同時に満たすと仮定する. $|sI_n - A_n|$ を

$$|sI_n - A_n| = f_1(s) + f_2(s), \quad (21)$$

$$f_1(s) = \begin{cases} s(s^{2m} + k_2s^{2(m-1)} + \cdots + k_{n-1}) & (n=2m+1) \\ s^{2m} + k_2s^{2(m-1)} + \cdots + k_n & (n=2m) \end{cases}$$

と分けて書くと, λ は $f_1(s) = 0$ の解でもある. $f_1(s)$, および $f_2(s)$ は偶関数か, それに s を乗じたものなので, 複素平面で λ に原点对称な複素数 λ' も $f_1(s) = 0$, および $f_2(s) = 0$

の解である。すなわち、実部が正である λ' も $|sI_n - A_n| = 0$ の解となり、 A_n が漸近安定であることに矛盾する。以上より、 A_n が漸近安定ならば、 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ を満たす s は存在せず、 $(\mathbf{c}_n, A_n)$ は可観測である。 ■

以上より、つぎの結果が得られる。

《定理》

Chained system に対して、状態フィードバック則 (8) を用いる。このとき、入力 μ_2 の符号の切替タイミングにかかわらず、 $\tau \rightarrow \infty$ で状態 $\mathbf{x}(t)$ が漸的に $\mathbf{0}$ に収束するための必要十分条件は、 $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ が漸近安定であることである。 □

(証明)

$A_n = (A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ が漸近安定であるとき、補題2より $(\mathbf{c}_n, A_n)$ は可観測なので、方程式 (15) の唯一解 P_n は正定である⁸⁾。この P_n を用いた関数、

$$V = \mathbf{x}^T P_n \mathbf{x} \quad (22)$$

の τ に関する微分をシステム (9) の解に沿って求める。 $\mu_2 > 0$ の場合、補題1の結果を用いることで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V &= \mathbf{x}^T (A_n^T P_n + P_n A_n) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{c}_n^T \mathbf{c}_n \mathbf{x} \end{aligned} \quad (23)$$

である。同様に、 $\mu_2 < 0$ の場合については $P_n = E_n P_n E_n$ を満たすことから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V &= \mathbf{x}^T E_n (A_n^T E_n P_n E_n + E_n P_n E_n A_n) E_n \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T E_n (A_n^T P_n + P_n A_n) E_n \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T E_n \mathbf{c}_n^T \mathbf{c}_n E_n \mathbf{x} \end{aligned} \quad (24)$$

と計算できる。(23), (24) 式より、 $dV/d\tau \leq 0$ である。 $(\mathbf{c}_n, A_n)$ は可観測であり、座標変換した $(\mathbf{c}_n E_n, E_n A_n E_n)$ も可観測である。したがって、 $\tau \rightarrow \infty$ で状態 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{0}$ に漸的に収束する。

一方、たとえば有限回で μ_2 の符号の切替を止める場合を考える。最後の切替以降、状態 $\mathbf{x}$ は (9) 式の $\mu_2 > 0$ もしくは $\mu_2 < 0$ の場合のいずれかに従って変化し続けるので、 $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ 行列が漸近安定でないならば $\mathbf{0}$ に収束しない。よって、入力の切替タイミングにかかわらず $\mathbf{x}(t)$ が $\mathbf{0}$ に収束するためには、 $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ が漸近安定であることが必要である。 ■

注2) 状態 $\mathbf{x}(t)$ を $\mathbf{0}$ に収束させる入力 μ_1 、すなわち、 $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ を漸近安定にするゲイン $\mathbf{k}$ は、LMI を解かなくても線形制御理論にもとづいて求めることができる。

4. 極を変更するフィードバック則

$\mu_2 < 0$ の場合のフィードバックゲイン $\mathbf{k}$ を

$$\mathbf{k}' = [k_n' \cdots k_2' k_1'] \quad (25)$$

$$k_i' = \begin{cases} \alpha k_i & (i \text{ は奇数}) \\ k_i & (i \text{ は偶数}) \end{cases}$$

にすることを考える。ただし、 α は $A_n' = (A - \mathbf{b}\mathbf{k}')$ を漸近安定とするような正の定数である。(12)~(14) 式の k_i を k_i' に置き換えた行列を $\mathbf{c}_n'$ 、 P_n' 、および Γ_n' とおく。 k_i を k_i' に置き換えても補題1は成り立ち、

$$(A_n')^T P_n' + P_n' A_n' = -(\mathbf{c}_n')^T \mathbf{c}_n' \quad (26)$$

である。 Γ_n' の i 行目 j 列目の成分は、 $(i+j)$ が奇数のときは Γ_n と同じく 0 である。 $(i+j)$ が偶数のときは、(14) 式において、 n か $(n+1-(i+j))$ のいずれか一方は奇数であること、および $n+1=i+j$ を満たす n は奇数であることから、 Γ_n の要素を α 倍したものである。したがって、

$$\Gamma_n' = \alpha \Gamma_n \quad (27)$$

である。(27) 式を (13) 式に用いれば、 P_n' についても

$$P_n' = \alpha P_n \quad (28)$$

という関係が得られる。このとき、(24) 式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V &= \mathbf{x}^T E_n ((A_n')^T P_n' + P_n' A_n') E_n \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{x}^T E_n ((A_n')^T P_n' + P_n' A_n') E_n \mathbf{x} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。(26) 式を代入すれば、

$$\frac{d}{d\tau} V = -\frac{1}{\alpha} \mathbf{x}^T E_n (\mathbf{c}_n')^T \mathbf{c}_n' E_n \mathbf{x} \quad (30)$$

となり、 $\alpha > 0$ より、 $dV/d\tau \leq 0$ である。 A_n' が漸近安定ならば、補題2より $(\mathbf{c}_n', A_n')$ も可観測であるので、前述の定理と同様に $\tau \rightarrow \infty$ で状態 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{0}$ に漸的に収束する。

以上より、以下の結果が得られる。

《系》

Chained system に対して、(25) 式の $\mathbf{k}'$ を用いて入力 μ_1 を

$$\mu_1 = \begin{cases} -\mathbf{k}\mathbf{x} & (\mu_2 > 0) \\ -(-1)^n \mathbf{k}' E_n \mathbf{x} & (\mu_2 < 0) \end{cases} \quad (31)$$

とする。入力 μ_2 の符号の切替タイミングにかかわらず、 $\tau \rightarrow \infty$ で状態 $\mathbf{x}(t)$ が漸的に $\mathbf{0}$ に収束するための必要十分条件は、 $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$ 、および $(A - \mathbf{b}\mathbf{k}')$ が漸近安定であることである。 □

注3) (31) 式のコントローラは、文献7) で述べられているゲインの自由度を利用したことに相当する。

5. 数値シミュレーション

例として、4次元の chained system ($n=3$) で $(A - \mathbf{b}\mathbf{k})$

Fig. 1 Time responses of x_0 , x , V and μ_2 with $\mu_1(8)$

Fig. 2 Time responses of x_0 , x , V and μ_2 with $\mu_1(31)$, $\alpha = 2$

の固有値が $(-2, -2 \pm i)$ になるようにフィードバックゲインを $k = (10, 13, 6)$ と選んだ。 $|\mu_2| = 1$ とし、 $0 \sim 2$ の乱数値の時間間隔で μ_2 の符号を切替えた。初期値を $x_0(0) = 0$, $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ としたときの状態 x_0 , x , (22) 式のリアプノフ関数 V , および入力 μ_2 の時間変化を Fig. 1 にプロットする。入力 μ_2 の符号が切替わっても V の値が単調減少していることが確認できる。また、状態 x が 0 に収束するようすも確認できる。

つぎに、(25) 式において $\alpha = 2.0$ とし、 $\mu_2 < 0$ のときのフィードバックゲインを $k' = (20, 13, 12)$ とした。このとき、 A_n' の固有値は $(-10.98, -0.509 \pm 1.250i)$ である。 $|\mu_2| = 1$ とし、Fig. 1 と同じ間隔で μ_2 の符号を切替えたときの結果を Fig. 2 にプロットする。 $\mu_2 < 0$ でのシステムの極を変更しているので、状態 x の変化は Fig. 1 とは異なっている。それでも、 V の値は単調減少し、状態 x も 0 に収束している。

6. 結 言

本稿では、時間軸状態制御形にもとづいて chained system を安定化するための条件を共通リアプノフ関数を用いて論じた。具体的にリアプノフ関数を示すことで、時間軸となる状態の増減の切替わるタイミングにかかわらず安定化するための必要十分条件は、基本となる連続時間系が漸近安定である

ことを示した。この結果、従来のように LMI の可解問題に持ち込むことなく、連続時間系の線形制御理論にもとづいて安定性を保証するフィードバックゲインを設計できる。また、切替の前後で極が異なるコントローラ的设计例と安定化条件も示した。

参 考 文 献

- 1) 小林啓吾：Chained form による非ホロノミック系の表現と制御，計測と制御，**45-7**, 568/573 (2006)
- 2) 三平満司：非ホロノミック系のフィードバック制御，計測と制御，**36-6**, 396/403 (1997)
- 3) 小林啓吾：非ホロノミックシステムに対するハイブリッド制御，計測と制御，**44-7**, 471/476 (2005)
- 4) M. Sampei: A Control Strategy for a Class of Non-Holonomic Systems: Time-State Control Form and its Application, Proc. 33rd CDC, 1120/1121 (1994)
- 5) 藤本，山川，舟橋：時間軸状態制御形にもとづいた切替制御，計測自動制御学会論文集，**36-6**, 512/518 (2000)
- 6) D. Liberzon: Switching in Systems and Control, Birkhäuser (2003)
- 7) 星，三平，中浦：時間軸状態制御形に基づく Chained System のハイブリッド制御，計測自動制御学会論文集，**40-10**, 1038/1045 (2004)
- 8) 兄玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，コロナ社 (1978)

[著 者 紹 介]

山 川 聡 子 (正会員)

1997 年名古屋工業大学大学院博士後期課程修了。同年名古屋工業大学機械工学科助手，2005 年東洋大学工学部機能ロボティクス学科助教授，2009 年より同理工学部機械工学科准教授，現在に至る。非線形制御，人間機械系の研究に従事 (博士 (工学))。