PD フィードバックとオフライン回帰子を用いたパラメータ推定則 から構成される FEL 制御系の安定性について

中山 学之*・藤本 英雄*

On Stability of FEL Controller Composed of PD Feedback and Parameter Estimation Law Based on
Offline Regressor

Takayuki NAKAYAMA* and Hideo FUJIMOTO*

Although the *feedback error learning* (FEL) controller had been broadly applied to the robot manipulation problems, the complete proof of the asymptotic stability of the controlled system has not been given clearly. In the previous work, it was made clear that the asymptotically stable trajectory tracking can be achieved by introducing the saturated proportional feedback or third-order position error feedback into the feedback control loop in the FEL controller. However, in the practical robot manipulation, the simple linear PD feedback controller has been extensively used rather than such the nonlinear ones. Thus, this paper proposed a new FEL controller which consists of the linear PD feedback and the adaptive parameter estimation law composed of the off-line regressor matrix and saturated error signals. The asymptotic stability of the controlled system was proven along the LaSalle's invariance theorem for the non-autonomous system.

Key Words: feedback error learning, robotics, trajectory tracking control, asymptotic stability

1. はじめに

ロボットの軌道追従制御問題では、慣性力やコリオリ力、遠心力に含まれる非線形性をいかに補償するかが重要な問題になる。そのため、センサにより取得した関節角度、関節角速度を用いて、ロボットの動力学に含まれる非線形性をフィードバック補償する計算トルク法¹⁾や、ロボットの物理パラメータを推定しながら、漸次的にロボットの動力学をフィードフォワード補償する適応制御則²⁾などが考案されてきた。しかし、これらをヒューマノイドロボットのような自由度の大きいロボットの制御に応用する場合、制御入力の計算に大きな計算時間がかかり、実時間で制御を行なうことができないという問題があった。これに対して小脳の計算モデルとして知られるフィードバック誤差学習法 (FEL)^{3),4)}は、多くの計算を必要とする回帰子の計算を目標軌道に沿って、あらかじめ計算しておくため、複雑な動力学を有するロボットに対しても実時間で適応制御を行なうことができるという利点がある。そのため、FEL は実際のロボットの制御にも広く応用され^{5)~8)}、また、その安定解析も多く試みられてきた^{9)~13)}。

しかし、文献 9)~11) では線形システムに対する安定化条

件のみが考察されており、ロボットのように非線形なシステムに対する安定化条件は考察されておらず、文献 12) では、一般の非線形システムに対する FEL の安定解析が行なわれているものの、ロボットのように未知の物理パラメータを含む慣性行列が最高次の係数行列としてかかる場合の安定解析は行なわれていない。一方、文献 13) では、本論文と同様に多リンクロボットに対する安定解析が行なわれているものの、慣性力、コリオリ力、遠心力のフィードフォワード補償と PD フィードバックによって制御されたシステムの安定性が仮定されており、完全な証明は与えられていない。

これほど単純な制御系にもかかわらず、安定性の証明が困難である背景には、ロボットの動力学に含まれるコリオリ力と遠心力が速度の 2 乗に依存するため、受動性ベースの制御系を構成しようと考えた場合に、誤差信号出力と外乱トルク入力との間の内積をとった式に誤差信号の 3 乗の項が含まれることになり、誤差信号の 2 次形式でリアプノフ関数を構成することができないことに原因がある。

そこで、この問題に対処するべく、Sadegh ら¹⁴⁾は位置と速度誤差に関する 3 次の非線形フィードバックを、有本らは飽和型の位置誤差フィードバックを用いた SPD フィードバックをそれぞれ導入することで、漸近安定な軌道追従制御を実現している¹⁵⁾。しかし、前者では初期誤差に対してフィードバック入力が過剰に大きくなる危険があり、後者では飽和型の位置フィードバックを採用することで、より自然なフィードバック制御を実現できるものの、安定性を保証するには飽

* 名古屋工業大学情報工学専攻 名古屋市昭和区御器所町

* Department of Computer Science and Engineering, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya

(Received June 20, 2013)

(Revised September 18, 2013)

和型位置フィードバックのゲインを対角行列に取る必要があり、二関節筋のように二つの関節をまたぐ弾性力を生成することができなかった。近年、ロボット制御の分野においても二関節筋の有用性が指摘されており¹⁶⁾、この制限はロボットで実現可能な動作に制限を与えてしまう可能性がある。

そこで、本稿ではPDフィードバックと目標軌道上で計算した回帰子を用いたパラメータ推定則を組み合わせた単純なFEL制御系によって、Pゲインが非対角要素を有する場合にも漸近安定な軌道追従制御を実現することのできるFEL制御則を構成するとともに、制御されたシステムの漸近安定性を理論的に示すことを考える。

まず2章では、FELの安定解析の基礎となる定理として、真の物理パラメータを既知とした場合に目標軌道上で計算した動力学のフィードフォワード補償トルクとPDフィードバックから構成される制御系によって、漸近安定な軌道追従制御が実現されることを示す。本制御則は産業ロボットの制御において広く応用されてきたものであるが、Pゲインが非対角要素を有する場合の漸近安定性は、これまでのところ証明されておらず、またフィードバックゲインが満たすべき安定化条件も明確にされていなかった。そこで、2章では、フィードバックゲインが満たすべき安定化条件を陽に示すとともに、LaSalle's invariance theorem¹⁷⁾に基づいて制御されたシステムの漸近安定性を証明する。そして3章では、2章の安定解析において新しく導入される飽和型の誤差信号と目標軌道上で求めたオフライン回帰子を用いてFEL制御系を構成することにより、Pゲインが非対角要素を有する場合にも漸近安定な軌道追従制御が実現されることを、再びLaSalle's invariance theoremを用いて証明する。

2. PDフィードバックと動力学のフィードフォワード補償によって制御されたロボットの漸近安定性

人間の手足のように回転関節から構成される n リンクロボットの力学は

$$H(q)\ddot{q} + \left\{ \frac{1}{2}\dot{H}(q, \dot{q}) + S(q, \dot{q}) \right\} \dot{q} = \tau \quad (1)$$

の形で記述される。ここで、 $q \in \mathbb{R}^n$ は関節角度ベクトル、 $\dot{q}$ は関節角速度ベクトル、 $H(q)$ は慣性行列、 $S(q, \dot{q})$ はコリオリ力・遠心力に関する歪対称行列、 τ は制御トルクをそれぞれ表わす。運動方程式(1)の左辺は物理パラメータに線形に依存することから、レグレッサ行列 $Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ と物理パラメータを縦に並べたベクトル η を用いることで、

$$Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\eta = H(q)\ddot{q} + \left\{ \frac{1}{2}\dot{H}(q, \dot{q}) + S(q, \dot{q}) \right\} \dot{q} \quad (2)$$

と書くことができる²⁾。

今、物理パラメータ η を既知として、(1)式に支配されるロボットの関節角度 $q(t)$ を目標関節角軌道 $q_d(t)$ に漸近的に追従させる問題を考える。このとき、目標軌道を実現するのに必要なフィードフォワードトルク τ_d は、(2)式の表記を用いて、

Fig. 1 Feedback error learning controller

Fig. 2 Saturated function $\sigma(x)$

$$\tau_d = Y(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d)\eta \quad (3)$$

で与えられる。このような、目標とする軌道 q_d から、それを実現するためのフィードフォワードトルク τ_d を求めるモデルのことを逆モデルと呼ぶが、フィードバック誤差学習ではFig. 1に示すように、フィードバック制御トルク τ_{fb} を誤差信号に用いてこの逆モデルを推定するとともに、逆モデルから生成されるフィードフォワード制御トルク τ_{ff} とフィードバック制御トルク τ_{fb} の和によって制御トルクを構成することで漸近安定な軌道追従制御を実現する³⁾。フィードバック制御入力 τ_{fb} としては加速度誤差も含めた線形フィードバックを組むことも可能であるが⁴⁾、加速度フィードバックには大きな観測ノイズが含まれることから、ここでは位置誤差・速度誤差からなる単純なPDフィードバックトルク

$$\tau_{fb} = -K\Delta q - D\Delta \dot{q} \quad (4)$$

によってフィードバック制御入力を構成することを考える。ただし、 Δq は関節角度の追従誤差 $q - q_d$ を表わす。

いま、十分に学習が進み、正確な逆モデル(3)がすでに獲得されている状況を考えると、FEL制御トルクは(3)式、(4)式の和として

$$\tau = \tau_d + \tau_{fb} \quad (5)$$

で構成され、これを(1)式に代入した誤差システムは

$$\{Y(\ddot{q}, \dot{q}, q) - Y(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d)\}\eta = -K\Delta q - D\Delta \dot{q} \quad (6)$$

に従うことになる。このとき誤差システム(6)はつぎの定理1に示すように、線形フィードバックゲイン K 、 D を適当に大きくとることで漸近安定になる。

実際、 $\sigma(\Delta q)$ をFig. 2に示すような、条件

$$\begin{cases} \sigma(x) = -\sigma(-x) \\ |\sigma(x)| \leq \min\{1, |x|\} \\ |\sigma(x)| \geq \min\left\{1, \frac{1}{\gamma}|x|\right\} \\ \sigma(x) = 1, \text{ for } x \geq \gamma \end{cases} \quad (7)$$

を満たす飽和型関数 $\sigma(x)$ を用いて,

$$\sigma(\Delta q) = (\sigma(\Delta q_1) \cdots \sigma(\Delta q_n))^T \quad (8)$$

で定義されるベクトル, $\lambda_{\min}(\cdot)$ を行列の最小固有値, $\lambda_{\max}(\cdot)$ を行列の最大固有値として, つぎの定理が成り立つ.

定理 1. クリストッフエル記号を

$$\Gamma_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{ij}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{kj}(q)}{\partial q_i} \right)$$

のように成分表記し, 定数 $c_1 \sim c_5$ を, 各成分が

$$\begin{aligned} [A_1(q, t)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ik}(q)}{\partial q_j} [\dot{q}_d]_k \\ [A_2(q, t)]_{ij} &= \sum_k \sum_\ell \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ik\ell}(q)}{\partial q_j} [\dot{q}_d(t)]_\ell [\dot{q}_d(t)]_k \right\} \end{aligned}$$

で表わされる任意の姿勢で有界な行列 $A_1(q, t)$, $A_2(q, t)$ と, 各成分が

$$\begin{aligned} [b_1]_i &= \sup_{q, t} |[(H(q) - H(q_d)) \dot{q}_d]_i| \\ [b_2]_i &= \sup_{q, t} \sum_j \sum_k |(\Gamma_{ijk}(q) - \Gamma_{ijk}(q_d)) [\dot{q}_d]_k [\dot{q}_d]_j| \end{aligned}$$

で表わされる任意の姿勢で有界なベクトル b_1 , b_2 を用いて,

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\sum_i \left\{ \max \left\{ [b_1]_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_{q, t} |[A_1]_{ij}| \right\} \right\} \right\}^2} \\ c_2 &= \sup_{q, t} \left\{ \sum_i \sum_j \sum_k |\Gamma_{ijk}(q)| (\|\dot{q}_d\| + \|\sigma(\Delta q)\|) \right\} \\ c_3 &= \sqrt{\sum_i \left\{ \max \left\{ [b_2]_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_{q, t} |[A_2]_{ij}| \right\} \right\} \right\}^2} \\ c_4 &= c_1 + c_3 + \sup_{q, t} \left\| \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right\} \right\| \\ c_5 &= c_2 + \sup_{q, t} \{ \|H(q)\| \|J_\sigma(\Delta q)\| \} \end{aligned}$$

で定義すると, フィードバックゲイン K , D が十分に大きく,

$$\lambda_{\min}(D) > \frac{2}{3}(c_4 + 3c_5) \quad (9)$$

$$\lambda_{\min}(K) > \frac{1}{2}(3c_4 + c_5) + \lambda_{\max}(D) \quad (10)$$

を満たすとき, 誤差システム (6) の解軌道に沿って

$$\frac{d}{dt} V(\Delta \dot{q}, \Delta q) + W(\Delta \dot{q}, \Delta q) \leq 0 \quad (11)$$

を満たす正定値関数 $V(\Delta \dot{q}, \Delta q)$ と $W(\Delta \dot{q}, \Delta q)$ が存在し, 漸近的に追従誤差 $\Delta \dot{q}$, Δq は 0 に収束する.

証明. 付録 A を参照. $\square$

注意 1. なお, 本証明は文献 15) と同様の方法で行なわれており, 一部議論の重複する部分もあるが, ここでは安定化条件を陽に記述するため, 各項の評価についても詳細に記述することとした.

本定理の証明において, (6) 式の両辺に左側から付録 A の (A.1) 式で定義される誤差信号 e の転置ベクトルをかけた式が (11) 式を満たすことが示されたが, この事実から文献 15) と同様の議論により, 誤差信号 e をフィードバック誤差信号に用いて FEL 制御則を構成することで, 次章に示すように物理パラメータが未知の場合にも漸近安定な軌道追従制御を実現することができる.

3. PD フィードバックとオフライン回帰子を用いたパラメータ推定則から構成される FEL 制御系によって制御されたロボットの漸近安定性

FEL ではフィードバック誤差信号を用いて内部モデルを更新することにより逆モデルの推定を行なう. FEL 制御則としてはこれまでに多くのものが提案されているが^{4)~13)}, ここでは, もっとも単純な目標軌道上で計算した回帰子を用いたパラメータ推定則¹⁵⁾によってフィードバック誤差学習則を構成することを考える. このように目標軌道上で計算される回帰子はオフライン回帰子と呼ばれ, 大きな計算量を必要とする回帰子の計算を運動に先駆けて事前に行なっておくことができるため, 自由度の大きなロボットに対しても実時間で適応制御入力を構成できるという特徴をもつ¹⁵⁾.

今, フィードバック誤差信号を, (A.1) 式と同じ

$$e = \Delta \dot{q} + \lambda_{\min}(K) K^{-1} \sigma(\Delta q) \quad (12)$$

にとり, 以下, 文献 15) と同様にオフライン回帰子を用いたパラメータ修正則を

$$\frac{d\hat{\eta}(t)}{dt} = -\Gamma^{-1} Y^T(\ddot{q}_d(t), \dot{q}_d(t), q_d(t)) e(t), \quad (13)$$

オフライン回帰子を用いたフィードフォワード補償トルクを

$$\tau_{ff}(t) = Y(\ddot{q}_d(t), \dot{q}_d(t), q_d(t)) \hat{\eta}(t), \quad (14)$$

制御トルクを

$$\tau(t) = \tau_{ff}(t) + \tau_{fb}(t) \quad (15)$$

で構成する. ここで, Γ は推定パラメータの収束速度を決める正定値定数行列である. このとき, 誤差システムは

$$\begin{aligned} Y(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)) \eta - Y(\ddot{q}_d(t), \dot{q}_d(t), q_d(t)) \hat{\eta}(t) \\ = -K \Delta \dot{q} - D \Delta \dot{q} \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられ, これは以下の定理に示すようにフィードバックゲイン K , D を適当に大きく取ることによって漸近安定になる.

定理 2. 制御則を (4), (13), (14), (15) 式のように構成し,

フィードバックゲイン K , D を条件 (9), (10) を満たすようにとったとき, 制御されたシステムは漸近安定になり, 軌道追従誤差 $\Delta q(t)$ は漸近的に 0 に収束する.

証明. 定理 1 の証明内で示されたように, (6) 式の両辺に左から e^T をかけたものは付録 A 内の (A.11), (A.12) 式で与えられる関数 $V(\Delta\dot{q}, \Delta q)$, $W(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ に対して (A.13) 式を満たす. これより, 誤差システム (16) の両辺に左から e^T をかけた式は, $\eta - \hat{\eta}$ を $\Delta\eta$ と書いて,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(\Delta\dot{q}, \Delta q) + W(\Delta\dot{q}, \Delta q) \\ & + e^T Y(\ddot{q}_d(t), \dot{q}_d(t), q_d(t)) \Delta\eta \\ & = \frac{d}{dt} \left\{ V(\Delta\dot{q}, \Delta q) + \frac{1}{2} \Delta\eta^T \Gamma \Delta\eta \right\} + W(\Delta\dot{q}, \Delta q) \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

を満たすことがいえる. (17) 式において

$$\bar{V}(\Delta\dot{q}, \Delta q, \Delta\eta) = V(\Delta\dot{q}, \Delta q) + \frac{1}{2} \Delta\eta^T \Gamma \Delta\eta \quad (18)$$

は状態空間 $(\Delta\dot{q}, \Delta q, \Delta\eta)$ 上で正定値かつ radially unbounded な連続関数であり, また $W(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ は非負定値連続微分可能関数であるから, 非自励系に対する LaSalle's invariance theorem¹⁷⁾より, (17) 式が成り立つとき, 漸近的に

$$W(\Delta\dot{q}, \Delta q) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (19)$$

が成り立つことがいえる. ここで $W(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ は付録 A の議論から条件 (9), (10) が満たされるならば正定値となり, $(\Delta\dot{q}, \Delta q) = (0, 0)$ においてのみ 0 になる. したがって, (19) 式より漸近的に

$$\Delta\dot{q} \rightarrow 0, \quad \Delta q \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つことがいえる. 以上より定理 2 が証明された. $\square$

4. おわりに

本論文では, P ゲインが非対角要素をもつ場合にも, PD フィードバックとオフライン回帰を用いたパラメータ推定則から構成される FEL 制御則によって漸近安定な軌道追従制御が実現可能であることを, LaSalle's invariance theorem を用いて証明するとともに, フィードバックゲインが満たすべき安定化条件を陽に示した. また, 従来から産業ロボットなどで広く使用されてきた, 物理パラメータを既知として計算した動力学的フィードフォワード補償と PD フィードバックから構成される制御系によっても, 漸近安定な軌道追従制御が実現されることを理論的に証明した. 提案制御則では, 従来の FEL 制御則からフィードバック誤差信号のみをわずかに変更するだけで, P ゲインが非対角要素を含む一般的な場合にも漸近安定な軌道追従制御系を構成することができるため, 産業ロボットなどの実践的なロボット制御系にも容易に導入することができ, 実用性の観点からも有用性の高い制

御則であるものと推察する.

参考文献

- 1) J.Y.S. Luh, M.W. Walker and R.P.C. Paul: Resolved acceleration control of mechanical manipulators, IEEE Trans. Automatic Control, **25**-3, 468/474 (1980)
- 2) J.J.E. Slotine and W. Li: On the Adaptive Control of Robot Manipulators, The International Journal of Robotics Research, **6**-3, 49/59 (1987)
- 3) 川人光男: 脳の計算理論, 産業図書 (1996)
- 4) H. Gomi and M. Kawato: Neural Network Control for a Closed-Loop System Using Feedback Error-Learning, Neural Networks, **6**-7, 933/946 (1993)
- 5) 牛田, 岸本, 木村: フィードバック誤差学習による非線形 DD アームの適応制御, 第 30 回制御理論シンポジウム予稿集, 85/88 (2001)
- 6) 齊藤, 羅, 渡部, 村松, 藤井: 未知の動的環境におけるロボットの 2 自由度適応力追従制御, システム制御情報学会論文誌, **18**-6, 203/212 (2005)
- 7) B. Alali, K. Hirata and K. Sugimoto: Feedback Error Learning for Writing One Stroke Characters by Two-Link Manipulator, システム制御情報学会論文誌, **20**-12, 475/481 (2007)
- 8) 武居, 中山, 野畑, 藤本: フィードバック誤差学習法を用いたパラメータ同定および適応インピーダンス制御, 第 25 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 3E11 (2007)
- 9) A. Miyamura and H. Kimura: Stability of Feedback Error Learning Scheme, Systems & Control Letters, **45**-4, 303/316 (2002)
- 10) E. Muramatsu and K. Watanabe: Feedback Error Learning Control without Recourse to Positive Realness, IEEE Transactions on Automatic Control, **49**-10, 1762/1767 (2004)
- 11) B. Alali, K. Hirata and K. Sugimoto: Generalization of Feedback Error Learning (FEL) to MIMO Systems, 計測自動制御学会論文集, **43**-4, 293/302 (2007)
- 12) J. Nakanishi and S. Schaal: Feedback error learning and nonlinear adaptive control, Neural Networks, **17**-10, 1453/1465 (2004)
- 13) S. Ushida and H. Kimura: Adaptive Control of Nonlinear Systems with Time Delay based on the Feedback Error Learning Method, Proceedings of SICE Annual Conference (2002)
- 14) N. Sadegh and R. Horowitz: Stability and robustness analysis of a class of adaptive controllers for robotic manipulators, International Journal of Robotics Research, **9**-3, 74/92 (1990)
- 15) 有本 卓: 新版 ロボットの力学と制御, 朝倉書店 (2002)
- 16) 吉田, 内田, 堀: 二関節同時駆動機構を備えたロボットアームの実現と筋の粘弾性を生かした制御に関する研究, 産業計測制御研究会, IIC-07-65, 77/82 (2007)
- 17) H.K. Khalil: *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Prentice Hall (2002)

《付 録》

A. 定理 1 の証明

まず, (7) 式で定義される飽和関数 $\sigma(\cdot)$ に関する二つの補助定理を示す.

補助定理 1. a, b を任意の正の定数とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\min \{a, b|x|\} \leq \max \{a, \gamma b\} \sigma(|x|)$$

が成り立つ.

証明. まず $a \geq \gamma b$ の場合を考える. このとき, **Fig. A.1(a)** に示すように, $|x| \leq \gamma$ に対して,

$$|a\sigma(x)| \geq a \left| \frac{x}{\gamma} \right| \geq b|x|$$

が成り立ち, $|x| \geq \gamma$ に対して, $|a\sigma(x)| = a$ が成り立つので,

$$\max\{a, \gamma b\} \sigma(|x|) = |a\sigma(x)| \geq \min\{a, b|x|\}$$

となることがいえる. また, $a \leq \gamma b$ の場合には, **Fig. A.1(b)** より $|x| \leq \gamma$ に対して,

$$|\gamma b\sigma(x)| \geq b|x|$$

が成り立ち, $|x| \geq \gamma$ に対して, $|\gamma b\sigma(x)| = \gamma b \geq a$ が成り立つので,

$$\max\{a, \gamma b\} \sigma(|x|) = |\gamma b\sigma(x)| \geq \min\{a, b|x|\}$$

となることがいえる. これらより任意の正の定数 a, b に対して,

$$\min\{a, b|x|\} \leq \max\{a, \gamma b\} \sigma(|x|)$$

が成り立つことがいえる. $\square$

Fig. A.1 Feedback error learning controller

補助定理 2. 正の定数 $c_i (i = 1 \dots n)$ と有界な $n \times n$ 行列 $A(x)$ に対して,

$$b = A(x)x, \quad |b_i(x)| \leq c_i$$

が成り立つならば,

$$\|b\| \leq a \|\sigma(x)\|$$

を満たす定数 a が存在する. ここで a は

$$a = \sqrt{\sum_i \max \left\{ c_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_x |A_{ij}(x)| \right\} \right\}^2}$$

で与えられる.

証明. $|b_i(x)|$ が

$$\begin{cases} |b_i(x)| \leq c_i, \\ |b_i(x)| = \left| \sum_j A_{ij}(x)x_j \right| \leq \sum_j |A_{ij}(x)| |x_j| \end{cases}$$

を満たすことから,

$$\begin{aligned} |b_i(x)| &\leq \min \left\{ c_i, \sum_j |A_{ij}(x)| |x_j| \right\} \\ &\leq \sum_j \min \left\{ c_i, \left\{ \sup_x |A_{ij}(x)| \right\} |x_j| \right\} \\ &\leq \sum_j \left\{ \max \left\{ c_i, \gamma \left\{ \sup_x |A_{ij}(x)| \right\} \right\} \sigma(|x_j|) \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 3 行目の不等式を示すにあたり, 補助定理 1 の結果を利用した. これより,

$$\begin{aligned} b_i(x)^2 &\leq \sum_j \max \left\{ c_i, \gamma \left\{ \sup_x |A_{ij}(x)| \right\} \right\}^2 \sigma(|x_j|)^2 \\ &\leq \max \left\{ c_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_x |A_{ij}(x)| \right\} \right\}^2 \|\sigma(x)\|^2 \end{aligned}$$

となることがいえる. したがって,

$$\begin{aligned} \|b(x)\| &\leq \sqrt{\sum_i \max \left\{ c_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_x |A_{ij}(x)| \right\} \right\}^2} \|\sigma(x)\| \end{aligned}$$

が成り立つ. $\square$

以上の準備の上に, (6) 式の左辺のノルムの評価を行なう. まず, 誤差信号 e を

$$e = \Delta \dot{q} + \lambda_{\min}(K) K^{-1} \sigma(\Delta q) \quad (\text{A.1})$$

で定義し, (6) 式の左辺を

$$\begin{aligned} &Y(\ddot{q}, \dot{q}, q) \eta - Y(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d) \eta \\ &= H(q) \ddot{q} + \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}, q) + S(\dot{q}, q) \right\} \dot{q} \\ &\quad - H(q_d) \ddot{q}_d - \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q_d) + S(\dot{q}_d, q_d) \right\} \dot{q}_d \\ &= H(q) \dot{e} + \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}, q) + S(\dot{q}, q) \right\} e \\ &\quad + h(\dot{q}, q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と展開する. ここで, $h(\dot{q}, q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d)$ は $\lambda_{\min}(K)$ を α と書いて

$$\begin{aligned} &h(\dot{q}, q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d) \\ &= (H(q) - H(q_d)) \ddot{q}_d - \alpha H(q) K^{-1} J_\sigma(\Delta q) \Delta \dot{q} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}, q) + S(\dot{q}, q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) - S(\dot{q}_d, q) \right\} \left\{ \dot{q}_d - \alpha K^{-1} \sigma(\Delta q) \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q_d) - S(\dot{q}_d, q_d) \right\} \dot{q}_d \\ &\quad - \alpha \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right\} K^{-1} \sigma(\Delta q) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

で与えられる関数, $J_\sigma(\cdot)$ は (7) 式で定義される飽和型関数

$\sigma(\cdot)$ のヤコビ行列を表わす.

(A.3) 式の右辺第 1 項は, 慣性行列 $H(q)$ の各成分が C^∞ 関数であることから, 平均値の定理により, $0 \leq \bar{\beta}_{ikjl} \leq 1$ を満たす実数 $\bar{\beta}_{ikjl}$ を用いて

$$[\bar{q}_{ikj}]_l = \bar{\beta}_{ikjl} [q]_l + (1 - \bar{\beta}_{ikjl}) [q_d]_l,$$

と表わされるベクトル $\bar{q}_{ikj}$ が存在して,

$$\begin{aligned} & [(H(q) - H(q_d)) \ddot{q}_d]_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ikj}(q)}{\partial q_j} \right\}_{\bar{q}_{ikj}} [\ddot{q}_d]_k \Delta q_j \end{aligned}$$

を満たすことがいえる. また, 回転関節から構成されるロボットでは, 慣性行列 $H(q)$ の各成分は関節角度に関する三角関数で与えられ, 一様に有界であることから,

$$[b_1]_i = \sup_{q,t} |[(H(q) - H(q_d)) \ddot{q}_d(t)]_i|$$

となる正の定数 $[b_1]_i$ ($i = 1 \cdots n$) が存在する. したがって, 行列 $A_1(q, t)$ を

$$[A_1(q, t)]_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ik}(q)}{\partial q_j} \Big|_{\bar{q}_{ikj}} [\ddot{q}_d(t)]_k$$

で定義すると, 補助定理 2 から,

$$\|(H(q) - H(q_d)) \ddot{q}_d\| \leq c_1 \|\sigma(\Delta q)\| \quad (\text{A.4})$$

を満たす定数

$$c_1 = \sqrt{\sum_i \left\{ \max \left\{ [b_1]_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_{q,t} |[A_1]_{ij}| \right\} \right\} \right\}^2} \quad (\text{A.5})$$

が存在する.

一方, (A.3) 式の右辺第 2 項は,

$$\alpha \|K^{-1}\| = \lambda_{\min}(K) \|K^{-1}\| \leq 1 \quad (\text{A.6})$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} & \alpha \|H(q)K^{-1}J_\sigma(\Delta q)\Delta \dot{q}\| \\ & \leq \|H(q)\| \|\alpha K^{-1}\| \|J_\sigma(\Delta q)\| \|\Delta \dot{q}\| \\ & \leq \left\{ \sup_{q,t} \{ \|H(q)\| \|J_\sigma(\Delta q)\| \} \right\} \|\Delta \dot{q}\| \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と評価される. ここで飽和型関数 $\sigma(\cdot)$ の定義から $\|J_\sigma(\Delta q)\|$ が有界であることから, $\sup_{q,t} \{ \|H(q)\| \|J_\sigma(\Delta q)\| \}$ も有界になることに注意する.

また, (A.3) 式の右辺第 3 項の第 i 成分はクリストッフエル記号の定義

$$\Gamma_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{ij}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{kj}(q)}{\partial q_i} \right)$$

から,

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}, q) + S(\dot{q}, q) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) - S(\dot{q}_d, q) \right\} \{ \dot{q}_d - \alpha K^{-1} \sigma(\Delta q) \} \right]_i \\ &= \sum_j \sum_k \left\{ \Gamma_{ijk}(q) \Delta \dot{q}_k [\dot{q}_d - \alpha K^{-1} \sigma(\Delta q)]_j \right\} \\ &= \sum_j \sum_k \left\{ \Gamma_{ijk}(q) [\dot{q}_d - \alpha K^{-1} \sigma(\Delta q)]_k \right\} \Delta \dot{q}_j \end{aligned}$$

と書きかえられる. ここで, クリストッフエル記号が q に関する三角関数で構成され, q に関して一様に有界な関数であることに注意すると, (A.3) 式右辺第 3 項の L_2 ノルムは

$$c_2 = \sup_{q,t} \left\{ \sum_i \sum_j \sum_k |\Gamma_{ijk}(q)| (\|\dot{q}_d\| + \|\sigma(\Delta q)\|) \right\}$$

において,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}, q) + S(\dot{q}, q) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) - S(\dot{q}_d, q) \right\} \{ \dot{q}_d - K^{-1} \sigma(\Delta q) \} \right\| \\ & \leq \sum_j \sum_k |\Gamma_{ijk}(q)| (\|\dot{q}_d\| + \|\alpha K^{-1} \sigma(\Delta q)\|) \|\Delta \dot{q}\| \\ & \leq c_2 \|\Delta \dot{q}\| \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

と上から抑えられることがいえる. ただし, 最後の不等号の導出にあたって (A.6) 式を用いた.

同様に, (A.3) 式の右辺第 4 項に関しては, 平均値の定理から

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q_d) - S(\dot{q}_d, q_d) \right\} \dot{q}_d \right]_i \\ &= \sum_j \sum_k \left\{ (\Gamma_{ijk}(q) - \Gamma_{ijk}(q_d)) [\dot{q}_d]_k [\dot{q}_d]_j \right\} \\ &= \sum_j \left\{ \sum_k \sum_\ell \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ik\ell}(q)}{\partial q_j} \right\}_{\bar{q}_{ikl}} [\dot{q}_d]_\ell [\dot{q}_d]_k \right\} \Delta q_j \end{aligned}$$

を満たすベクトル $\bar{q}_{iklj}$:

$$\begin{aligned} & [\bar{q}_{iklj}]_m = \bar{\beta}_{ikljm} [q]_m + (1 - \bar{\beta}_{ikljm}) [q_d]_m, \\ & 0 \leq \bar{\beta}_{ikljm} \leq 1 \end{aligned}$$

が存在することがいえる, また, クリストッフエル記号の有界性より,

$$[b_2]_i = \sup_{q,t} \left| \sum_j \sum_k \left\{ (\Gamma_{ijk}(q) - \Gamma_{ijk}(q_d)) [\dot{q}_d]_k [\dot{q}_d]_j \right\} \right|$$

を満たす正の定数 $[b_2]_i$ ($i = 1 \cdots n$) が存在することに注意すると, 補助定理 2 より, 行列 $A_2(q)$ を

$$\begin{aligned} & [A_2(q, t)]_{ij} \\ &= \sum_k \sum_\ell \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ik\ell}(q)}{\partial q_j} \right\}_{\bar{q}_{iklj}} [\dot{q}_d(t)]_\ell [\dot{q}_d(t)]_k \end{aligned}$$

として,

$$\left\| \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) - \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q_d) - S(\dot{q}_d, q_d) \right\} \dot{q}_d \right\| \leq c_3 \|\sigma(\Delta q)\|$$

を満たす定数

$$c_3 = \sqrt{\sum_i \left\{ \max \left\{ [b_2]_i, \gamma \max_j \left\{ \sup_{q,t} |[A_2]_{ij}| \right\} \right\} \right\}}$$

が存在することがいえる.

また, (A.3) 式の右辺第 5 項は (A.6) 式から

$$\begin{aligned} & \alpha \left\| \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right\} K^{-1} \sigma(\Delta q) \right\| \\ & \leq \left\{ \sup_{q,t} \left\| \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right\} \right\| \right\} \|\sigma(\Delta q)\| \end{aligned}$$

と評価されることがいえる.

以上から

$$\begin{cases} c_4 = c_1 + c_3 + \sup_{q,t} \left\| \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}_d, q) + S(\dot{q}_d, q) \right\} \right\| \\ c_5 = c_2 + \sup_{q,t} \{ \|H(q)\| \|J_\sigma(\Delta q)\| \} \end{cases}$$

とおくと, $h(\dot{q}, q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d)$ は

$$\|h(\dot{q}, q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d)\| \leq c_4 \|\sigma(\Delta q)\| + c_5 \|\Delta \dot{q}\|$$

を満たすことになる.

これより (A.2) 式の両辺に左から e^T を掛けた式は

$$\begin{aligned} & e^T \{Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\eta - Y(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d)\eta\} \\ & = e^T H(q) \dot{e} + e^T \left\{ \frac{1}{2} \dot{H}(\dot{q}, q) + S(\dot{q}, q) \right\} e \\ & \quad + e^T h(\dot{q}, q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d) \\ & \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{e^T H(q) e\} - \{\|\Delta \dot{q}\| + \|\sigma(\Delta q)\|\} \\ & \quad \cdot \{c_4 \|\sigma(\Delta q)\| + c_5 \|\Delta \dot{q}\|\} \end{aligned}$$

を満たす.

一方, PD フィードバックトルク (4) と誤差信号 (A.1) の内積に関しては

$$\begin{aligned} & e^T (D \Delta \dot{q} + K \Delta q) \\ & = \Delta \dot{q}^T D \Delta \dot{q} + \alpha \sigma(\Delta q)^T K^{-1} D \Delta \dot{q} \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{\Delta \dot{q}^T K \Delta \dot{q}\} + \alpha \sigma(\Delta q)^T \Delta q \\ & \geq \Delta \dot{q}^T D \Delta \dot{q} + \left\| \frac{1}{2} \Delta \dot{q} + \alpha K^{-1} \sigma(\Delta q) \right\|_D^2 \\ & \quad - \frac{1}{4} \Delta \dot{q}^T D \Delta \dot{q} - \alpha^2 \sigma(\Delta q)^T K^{-1} D K^{-1} \sigma(\Delta q) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{\Delta \dot{q}^T K \Delta \dot{q}\} + \alpha \sigma(\Delta q)^T \Delta q \\ & \geq \frac{3}{4} \Delta \dot{q}^T D \Delta \dot{q} - \left\| \alpha K^{-1} \sigma(\Delta q) \right\|_D^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{\Delta \dot{q}^T K \Delta \dot{q}\} + \alpha \sigma(\Delta q)^T \sigma(\Delta q) \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\|\cdot\|_D$ は

$$\|x\|_D = \sqrt{x^T D x}$$

で定義されるノルムを表わし, 最後の不等式を導くのに (7) 式より

$$\sigma(x)^T x \geq \sigma(x)^T \sigma(x)$$

が成り立つことを使った. これより, (6) 式の両辺に左から e^T を掛けた式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{e^T H(q) e + \Delta \dot{q}^T K \Delta \dot{q}\} \\ & \quad - \{\|\Delta \dot{q}\| + \|\sigma(\Delta q)\|\} \{c_4 \|\sigma(\Delta q)\| + c_5 \|\Delta \dot{q}\|\} \\ & \quad + \frac{3}{4} \Delta \dot{q}^T D \Delta \dot{q} + \{\alpha - \lambda_{\max}(D)\} \|\sigma(\Delta q)\|^2 \\ & \leq 0 \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

を満たすことがいえる. ただし, 左辺最終項の導出にあたり, (A.6) 式が成り立つことを使った.

ここで, (A.10) 式の左辺第 2 項が平方完成を行なうことで,

$$\begin{aligned} & -(\|\Delta \dot{q}\| + \|\sigma(\Delta q)\|) (c_4 \|\sigma(\Delta q)\| + c_5 \|\Delta \dot{q}\|) \\ & = -c_5 \|\Delta \dot{q}\|^2 - (c_4 + c_5) \|\Delta \dot{q}\| \|\sigma(\Delta q)\| \\ & \quad - c_4 \|\sigma(\Delta q)\|^2 \\ & \geq -c_5 \|\Delta \dot{q}\|^2 - c_4 \|\sigma(\Delta q)\|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} (c_4 + c_5) (\|\Delta \dot{q}\| - \|\sigma(\Delta q)\|)^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} (c_4 + c_5) \|\Delta \dot{q}\|^2 - \frac{1}{2} (c_4 + c_5) \|\sigma(\Delta q)\|^2 \\ & \geq -\frac{1}{2} (c_4 + 3c_5) \|\Delta \dot{q}\|^2 - \frac{1}{2} (3c_4 + c_5) \|\sigma(\Delta q)\|^2 \end{aligned}$$

と評価されことに注意すると, (A.10) 式より

$$V(\Delta \dot{q}, \Delta q) = \frac{1}{2} \{e^T H(q) e + \Delta \dot{q}^T K \Delta \dot{q}\}, \quad (\text{A.11})$$

$$W(\Delta \dot{q}, \Delta q) =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} (c_4 + 3c_5) \|\Delta \dot{q}\|^2 - \frac{1}{2} (3c_4 + c_5) \|\sigma(\Delta q)\|^2 \\ & \quad + \frac{3}{4} \Delta \dot{q}^T D \Delta \dot{q} + (\alpha - \lambda_{\max}(D)) \|\sigma(\Delta q)\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

とにおいて,

$$\frac{d}{dt} V(\Delta \dot{q}, \Delta q) + W(\Delta \dot{q}, \Delta q) \leq 0 \quad (\text{A.13})$$

が成り立つことがいえる. ここで, $W(\Delta \dot{q}, \Delta q)$ は

$$\begin{aligned} & W(\Delta \dot{q}, \Delta q) \\ & \geq \left\{ \frac{3}{4} \lambda_{\min}(D) - \frac{1}{2} (c_4 + 3c_5) \right\} \|\Delta \dot{q}\|^2 \\ & \quad + \left\{ \alpha - \frac{1}{2} (3c_4 + c_5) - \lambda_{\max}(D) \right\} \|\sigma(\Delta q)\|^2 \end{aligned}$$

で下から押さえられるので, $\alpha = \lambda_{\min}(K)$ に注意すると, 定理の条件 (9), (10):

$$\begin{cases} \lambda_{\min}(D) > \frac{2}{3}(c_4 + 3c_5) \\ \lambda_{\min}(K) > \frac{1}{2}(3c_4 + c_5) + \lambda_{\max}(D) \end{cases}$$

が成り立つとき,

$$W(\Delta\dot{q}, \Delta q) > 0$$

となる. これより, (A.13) 式において, $V(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ は状態空間 $(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ 上で正定値かつ radially unbounded な連続関数, $W(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ は状態空間 $(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ 上で正定値かつ連続微分可能関数になるから, 非自律系に対する LaSalle's invariance theorem¹⁷⁾ より, 漸近的に

$$W(\Delta\dot{q}, \Delta q) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (\text{A.14})$$

となることがいえる. ここで $W(\Delta\dot{q}, \Delta q)$ が正定値で, $(\Delta\dot{q}, \Delta q) = (0, 0)$ でのみ 0 になることに注意すると, (A.14) 式より

$$\Delta\dot{q} \rightarrow 0, \quad \Delta q \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

となることがいえる. 以上より, 定理 1 が証明された. $\square$

[著 者 紹 介]

中 山 学 之 (正会員)

1996 年東京大学大学院工学研究科修士課程修了. 2000 年東京大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学. 同年理化学研究所入所, 2006 年より名古屋工業大学に移り, 現在同大学特任教授, 脳の計算モデルに関する研究, ロボットの知能化に関する研究に従事.

藤 本 英 雄 (正会員)

1970 年名古屋大学工学部機械学科卒業. 85～86 年米国 MIT, ドイツアーヘン工科大学在外研究員 (客員教授). 93 年名古屋工業大学大学院教授. 同大学ものづくりテクノセンター長. 同大学医学工学インテリジェント手術機器研究所所長, 藤本技術総合研究所所長など歴任. 現在名古屋工業大学名誉教授. 手術支援ロボットの研究開発, 技能伝承, 力触覚テクノロジーの研究に従事.