不確かなスケジューリングパラメータの使用を前提とした離散時間 Gain-scheduled 出力フィードバック制御器設計と飛行制御則設計例

佐藤 昌之*

Design of Discrete-time Gain-scheduled Output Feedback Controllers
Exploiting Inexact Scheduling Parameters and Flight Controller Design Example

Masayuki SATO*

This paper concerns the design problem of discrete-time Gain-Scheduled Output Feedback (GSOF) controllers, in which inexact scheduling parameters are presupposed to be provided, for discrete-time Linear Parameter-Varying (LPV) systems. An iterative algorithm, which has already been proposed for the same problem with unstructured disturbance input and performance output, is revised to accommodate the structures of those signals by introducing constant scaling matrices for the reduction of conservatism. Flight controllers for the lateral-directional motions of an airplane are designed by using our method and a design method without consideration of the uncertainties in the provided scheduling parameters. Flight tests using the two controllers confirm that the GSOF controller with consideration of the uncertainties realized model-matching as well as disturbance suppression as assured in its design; however, the GSOF controller without consideration of the uncertainties could not achieve the assured control performance in its design.

Key Words: gain-scheduling, robustness, LPV systems, iterative algorithm

1. はじめに

ゲインスケジュールド (Gain-Scheduled; GS) 制御は、外部環境が大きく変化するプラントに対して古くから用いられており、航空機をはじめとするさまざまな制御対象に対してその有用性が示されている。古くから用いられている設計法は、代表的な設計点の選択、設計点における制御器の設計、得られた制御器の補間、シミュレーションによる全動作範囲での仕様充足の確認という 4 ステップから成り立っている。この設計法は、設計すべき制御則の構造があらかじめ定められており、かつ制御則の設計パラメータが少数である場合（たとえば、文献 1）のように制御則が PID 制御器に固定されている場合）には非常に有効であるが、最終確認であるシミュレーション数が膨大になる問題が指摘されていた。

この問題に対して、1990 年代に、Linear Parameter-Varying (LPV) システムと呼ばれるシステムに対するフルオーダー GS 出力フィードバック (GS Output Feedback; GSOF) 制御器をパラメータ依存線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality; LMI) により設計する方法²⁾が提案され、制

御則に構造制約がない場合には、膨大なシミュレーションを必要としない設計が可能となった。その後、制御性能の向上を目指して、パラメータ依存 Lyapunov 関数を用いた設計（たとえば、文献 3）などが提案されている。しかし、後者では、制御器がスケジューリングパラメータの微分に依存するなど、実用面での考慮が足りなかったことは否めない。近年は、実用面における問題に取り組んだ研究も行なわれ、連続時間システムに対して、パラメータ依存 Lyapunov 関数を用いながらもパラメータの微分に依存しない GSOF 制御器設計法^{4), 5)}などが提案されている。また、GS 制御の実システムへの適用（たとえば、文献 6)~8)）も多くなりつつある。

実システムを対象に GS 制御器を設計する場合、線形時不変 (Linear Time-Invariant; LTI) システムに対する H_∞ 制御器設計の場合と同様、単一の不確かさブロックではなく複数の不確かさを有するシステムに対する設計^{3), 6), 9)}となることが一般的であろう。その場合、不確かさブロックの構造を無視した設計は保守的な設計になること⁹⁾から、制御性能向上のためには、複数の不確かさブロックに対応したスケージューリング行列導入による保守性を低減した設計³⁾が望ましい。また、制御対象が機械システムである場合、制御対象は連続時間 LPV システムとしてモデリング可能であるが、実システムを動かす計算機はデジタル計算機であることが多い。このような場合、連続時間 GSOF 制御器を設計しオンラインでそれを離散化することは可能であるが、計算量低減のためのア

* 宇宙航空研究開発機構航空本部 三鷹市大沢 6-13-1

* Institute of Aeronautical Technology, Japan Aerospace Exploration Agency, 6-13-1 Osawa, Mitaka

(Received May 14, 2014)

(Revised August 1, 2014)

ンダーサンプリング^{10),11)}や逆行列計算が必要な台形公式による離散化¹²⁾を行なうなどの工夫が必要となってくる。しかし、搭載計算機の計算能力が高くない場合にはオンライン離散化に伴う計算負荷は望ましくなく、離散時間 LPV システムを設計対象とした離散時間 GSOF 制御器設計法に関する研究^{13)~17)}も行なわれている。

また、実システムにおいては、計測装置の観測誤差や分解能の問題などから、GS 制御器に正確なスケジューリングパラメータ値が提供されとは限らず、一般には観測誤差などの不確かさを含む値が提供されたと考えたほうが自然である。たとえば、航空機運動においては、速度や動圧がスケジューリングパラメータとして用いられるが、空気圧を計測してこれらの値を求めることから、計測機器の設置場所に応じてポジションエラーと呼ばれる計測誤差は避けられない。このような不確かさは制御性能の劣化を引き起こすばかりか、最悪の場合は閉ループシステムの不安定化を引き起こす。この問題に対して、不確かさブロックを追加した設計法¹⁸⁾や、不確かさの影響を別の扱いやすい条件に置き換えた設計法^{19)~21)}が連続時間システムを対象に提案されている。

以上の背景のもと、本稿は、文献 22) に提案されている不確かなスケジューリングパラメータの使用を前提とした離散時間フルオーダー GSOF 制御器設計法をもとに、外乱入力および制御出力が構造化されている場合に保守性を低減すべく、定数スケーリング行列を導入した設計法を提案する。また、提供スケジューリングパラメータ値に含まれる不確かさを考慮することの重要性を示す例として、JAXA が所有する実験用航空機 MuPAL- α ²³⁾のある速度範囲における横/方向運動に対するモデルマッチング飛行制御則設計例を示す。具体的には、文献 22) の基礎となる設計法¹⁵⁾に定数スケーリング行列を導入した設計法と本稿の設計法を用いて二つの GSOF 制御器を設計し、飛行試験による性能比較を行なう。

なお、本稿では、適切な時間内に高次のパラメータ依存 LMI を数値的に解くことは難しい場合があること（詳細は文献 24), 25) を参照されたい）から、設計対象となる一般化プラントおよび設計すべき GSOF 制御器は共にパラメータ affine な状態空間表現で表わされる問題のみを対象とする。

本稿の構成は以下のとおりである。2 章では本稿で対象とする問題の定義を行ない、文献 15), 22) の既存設計法を示す。3 章では提案設計法および繰り返し計算による解法アルゴリズムを示し、4 章では MuPAL- α の横/方向運動に対する設計例および飛行試験結果を示し、最後に、5 章にてまとめを行なう。

本稿の記号の定義を以下に示す。 $\text{He}\{X\}$ は $X+X^T$, $\mathbb{R}^{n \times m}$ は $n \times m$ の実行列集合、 $\mathbb{S}^n$ は $n \times n$ の実対称行列集合、 $\mathbb{S}_+^n$ は $n \times n$ の正定な実対称行列集合、 $\mathbf{I}_n$ および $\mathbf{I}$ は $n \times n$ および適当なサイズの単位行列、 $\mathbf{0}$ は適当なサイズの零行列、対称行列内の $*$ は省略した非対角項、 $\|\cdot\|$ は最大特異値、ポリトープ Ω に対する $\text{ver}(\Omega)$ は Ω の端点集合を表わすとする。なお、離散時間システム内の変数の時間ステップは省略し、状

態変数およびスケジューリングパラメータにおいて、肩付きの“+”は 1 ステップ先の変数を表わすとする。

2. 準備

2.1 問題設定

設計対象プラントおよび設計仕様を表わす重みなどを組み込んだ一般化プラントが、以下の離散時間 LPV システムとして与えられたとする。

$$G(\theta) : \begin{bmatrix} x^+ \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2 \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ はそれぞれ一般化プラントの状態（初期状態は零とする）、制御出力、観測出力、外乱入力、制御入力である。また、ベクトル $\theta = [\theta_1 \ \dots \ \theta_q]^T$ は q 個の独立したスケジューリングパラメータからなるベクトルであり、(1) 式の係数行列はすべて適当なサイズを有する定数行列もしくはスケジューリングパラメータ θ_i に関して affine な行列とする。ここで、 θ_i の存在範囲および 1 ステップあたりの増減幅は既知であるとする。このとき、 (θ, θ^+) の存在領域は既知となり、 (θ, θ^+) はあらかじめ与えられたポリトープ Λ_θ 内に存在すると仮定する。

$$(\theta, \theta^+) \in \Lambda_\theta \quad (2)$$

(1) 式の一般化プラントに対して、フルオーダーの GSOF 制御器を設計するが、制御器は不確かなスケジューリングパラメータ値 $\hat{\theta}_i$ のみが入手可能とする。この状況を、不確かさを表わす独立した q 個の要素からなるベクトル $\delta = [\delta_1 \ \dots \ \delta_q]^T$ を用いて以下に表現する。

$$\hat{\theta} = \theta + \delta \quad (3)$$

なお、計測機器のカタログ情報や予備実験などから、事前に不確かさ幅は与えられるものとし、不確かさは既知のポリトープ Ω_δ 内に存在すると仮定する。

$$\delta \in \Omega_\delta \quad (4)$$

以上の準備のもと、設計すべきフルオーダー GSOF 制御器を以下に定義する。

$$K(\hat{\theta}) : \begin{bmatrix} x_K^+ \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K(\hat{\theta}) & B_K(\hat{\theta}) \\ C_K(\hat{\theta}) & D_K(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $x_K \in \mathbb{R}^n$ は GSOF 制御器の状態（初期状態は零とする）を表わす。なお、(5) 式の係数行列は $\hat{\theta}_i$ に関して affine であり、適当なサイズを有する行列とする。

以下では、一般化プラント $G(\theta)$ と GSOF 制御器 $K(\hat{\theta})$ から構成されるシステムを $G_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ と記述する (Fig. 1 参照)。

ここで、文献 3) と同様に、時変なメモリーレス作用素 Δ を導入し、外乱入力 w と制御出力 z に以下の構造を仮定する。
[仮定 1]

$$w = \Delta z$$

Fig. 1 Block diagram

$$w = [w_1 \ \cdots \ w_m]^T, \ w_i \in \mathbb{R}^{n_{p_i}}$$

$$z = [z_1 \ \cdots \ z_m]^T, \ z_i \in \mathbb{R}^{n_{p_i}}$$

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_m), \ \Delta_i \in \mathbb{R}^{n_{p_i} \times n_{p_i}}$$

$$\|\Delta\| \leq 1$$

$$n_w = n_z = n_p \left(= \sum_{i=1}^m n_{p_i} \right)$$

さらに, w_i および z_i のサイズに適合する定数スケーリング行列集合 $\mathbb{L}^{n_p}$ を定義する.

$$\mathbb{L}^{n_p} := \left\{ \tilde{L} \in \mathbb{S}_+^{n_p} : \Delta \tilde{L} = \tilde{L} \Delta \right\} \quad (6)$$

(注意1) 本稿では, 計算負荷が小さいパラメータ affine な行列不等式条件を用いた定式化を行なうため, 定数スケーリング行列を導入した. 計算負荷が大きくなることを許容するならば, 文献3)と同様に, パラメータ依存スケーリング行列を導入すると保守性はさらに低減される.

以上の準備のもと, 本稿の問題を定義する.

[問題1] 取り得るすべてのスケジューリングパラメータ $(\theta, \theta^+) \in \Lambda_\theta$, および提供されるスケジューリングパラメータ値に含まれる不確かさ $\delta \in \Omega_\delta$ に対して, $G_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ を安定化し, $\tilde{L} \in \mathbb{L}^{n_p}$ を用いて $\tilde{w} = \tilde{L}^{-1}w$, $\tilde{z} = \tilde{L}z$ と定義される $\tilde{w}$, $\tilde{z}$ に対して (7) 式を満たす定数スケーリング行列 $\tilde{L}$ および (5) 式に定義された GSOF 制御器を設計せよ.

$$\sup_{\tilde{w} \in \mathbb{L}_2, \tilde{w} \neq 0} \|\tilde{z}\|_2 / \|\tilde{w}\|_2 < 1 \quad (7)$$

(注意2) 外乱入力および制御出力が構造化されていない場合, $\tilde{L}$ は正数 l を用いて $l\mathbf{I}_{n_p}$ と表わされ, $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \frac{l\|z\|_2}{l\|w\|_2} = \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ より, 問題1は文献22)で扱う問題と同一となる.

外乱入力および制御出力が構造化されていない場合, 連続時間システムに対する結果²⁰⁾と同様に, パラメータ依存正定行列を用いた繰り返し計算による設計法²²⁾が提案されている. しかし, 外乱入力および制御出力の構造は考慮されていないため, 一般に保守的な設計となる.

2.2 構造化されていない w および z に対する従来結果

本節では, 外乱入力および制御出力が構造化されていない場合 ($m=1$) の従来結果を示す. なお, この場合, スケーリング行列 $\tilde{L}$ は任意の正数 l を用いた $l\mathbf{I}_{n_p}$ と表わされる.

最初に, 正確なスケジューリングパラメータが入手できる

場合の設計法を補題1として示し, つぎに, 提供スケジューリングパラメータ値に含まれる不確かさの影響を補題1に組み込んだ設計法を補題2として示す. なお, 補題2は, 次章で示す提案設計法の基礎となる設計法である.

2.2.1 $\delta = 0$ の場合

最初に, スケジューリングパラメータが正確に入手できる場合を考える. すなわち, $\hat{\theta} = \theta$ の場合である.

この問題に対しては, 保守性を低減するためにパラメータ依存 Lyapunov 関数を用いた設計法が提案されている^(注1). [補題1]¹⁵⁾ Λ_θ 内のすべての (θ, θ^+) において (8) 式を満たす1以下の正数 γ_∞ , パラメータ affine 行列 $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{H}(\theta) \in \mathbb{S}^n$, 同じくパラメータ affine 行列 $\mathcal{J}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{K}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ および定数行列 $\mathcal{X}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在するならば, 係数行列 $\begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix}$ が (11) 式で与えられた GSOF 制御器 $K(\theta)$ は, 問題1の題意を満たす. なお, 行列 $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は, $VU + \mathcal{Y}\mathcal{X} = \mathcal{S}$ を満たす正則行列である.

$$\Upsilon_\infty(\theta, \theta^+) > 0 \quad (8)$$

ただし, (8) 式の $\Upsilon_\infty(\theta, \theta^+)$ は, (10) 式の行列を用いて (9) 式に定義される.

なお, (8) 式はパラメータ affine な LMI であるため, 実際には端点集合 $\text{ver}(\Lambda_\theta)$ において解けば必要十分である.

この設計法は, Extended LMI²⁶⁾を適用したパラメータ依存 Lyapunov 関数を用いた誘導 l_2 ノルム解析 (付録A 参照) から導出された設計法であり, パラメータの未来値を必要としない現実的な GSOF 制御器が設計可能である. なお, 定数決定変数 $\mathcal{X}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{Y}$ をパラメータ依存とすると, 文献17)と同様, 1ステップ先のパラメータ値が必要となる¹⁵⁾.

2.2.2 $\delta \neq 0$ の場合

つぎに, 不正確なスケジューリングパラメータ値しか入手できない場合を考える. この問題に対しては, 補題1をもとにした以下の設計法が提案されている.

[補題2]²²⁾ $\Lambda_\theta \times \Omega_\delta$ 内のすべての $((\theta, \theta^+), \delta)$ において (12) 式を満たす1以下の正数 γ_∞ , パラメータ affine 行列 $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{H}(\theta)$, $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}) \in \mathbb{S}^n$, 同じくパラメータ affine 行列 $\mathcal{J}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{K}(\hat{\theta}) \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ および定数行列 $\mathcal{X}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在するならば, 係数行列 $\begin{bmatrix} A_K(\hat{\theta}) & B_K(\hat{\theta}) \\ C_K(\hat{\theta}) & D_K(\hat{\theta}) \end{bmatrix}$ が (15) 式で与えられた GSOF 制御器 $K(\hat{\theta})$ は, 問題1の題意を満たす. なお, 行列 U, V は, 補題1と同様, $VU + \mathcal{Y}\mathcal{X} = \mathcal{S}$ を満たす正則行列である.

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_\infty(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) & * \\ \Upsilon(\theta, \hat{\theta}) \mathbf{0} & \Gamma(\theta, \hat{\theta}) \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

ただし, (12) 式の $\Upsilon_\infty(\theta, \theta^+, \hat{\theta})$ は, (10) 式に定義された $\Upsilon_A(\theta)$, $\Upsilon_B(\theta)$, $\Upsilon_C(\theta)$ および $\Upsilon_D(\theta)$ の代わりに (13) 式に定義された $\Upsilon_A(\theta, \hat{\theta})$, $\Upsilon_B(\theta, \hat{\theta})$, $\Upsilon_C(\theta, \hat{\theta})$ および $\Upsilon_D(\theta, \hat{\theta})$

(注1) 文献15)では直達項 $D_K(\theta)$ を用いない設計法であったため, 若干の修正を行なった.

$$\Upsilon_{\infty}(\theta, \theta^+) = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & \mathcal{J}(\theta) \\ * & \mathcal{H}(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathbf{I}_n \\ \mathcal{S} & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \right\} & * & * & \mathbf{0} \\ \Upsilon_A(\theta) & \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta^+) & \mathcal{J}(\theta^+) \\ * & \mathcal{H}(\theta^+) \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \Upsilon_B(\theta) \\ \Upsilon_C(\theta) & \mathbf{0} & \gamma_{\infty}^2 \mathbf{I}_{n_p} & \Upsilon_D(\theta) \\ \mathbf{0} & * & * & \mathbf{I}_{n_p} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_A(\theta) & \Upsilon_B(\theta) \\ \Upsilon_C(\theta) & \Upsilon_D(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta)\mathcal{X} & A(\theta) & B_1(\theta) \\ \mathbf{0} & \mathcal{Y}A(\theta) & \mathcal{Y}B_1(\theta) \\ \bar{C}_1(\theta)\bar{\mathcal{X}} & \bar{C}_1(\theta) & \bar{D}_{11}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_2 \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{D}_{12} \end{bmatrix} \mathcal{K}(\theta) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & \mathcal{Y}B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix}^{-1} \left(\mathcal{K}(\theta) - \begin{bmatrix} \mathcal{Y}A(\theta)\mathcal{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_2\mathcal{X} & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}^{-1} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_A(\theta, \hat{\theta}) & \Upsilon_B(\theta, \hat{\theta}) \\ \Upsilon_C(\theta, \hat{\theta}) & \Upsilon_D(\theta, \hat{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta)\mathcal{X} & A(\theta) & B_1(\theta) \\ \mathbf{0} & \mathcal{Y}A(\theta) & \mathcal{Y}B_1(\theta) \\ \bar{C}_1(\theta)\bar{\mathcal{X}} & \bar{C}_1(\theta) & \bar{D}_{11}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_2 \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{D}_{12} \end{bmatrix} \mathcal{K}(\hat{\theta}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (13)$$

	$\Upsilon(\theta, \hat{\theta})$	$\Gamma(\theta, \hat{\theta})$
(a)	$\begin{bmatrix} \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})\mathcal{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (A(\hat{\theta}) - A(\theta))^T \mathcal{Y}^T \end{bmatrix}$	$\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$
(b)	$\begin{bmatrix} (A(\hat{\theta}) - A(\theta))\mathcal{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})\mathcal{Y}^T \end{bmatrix}$	$\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$
(c)	$\begin{bmatrix} [\mathcal{X}^T \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}) \mathbf{0}]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{0} \mathcal{Y} (A(\hat{\theta}) - A(\theta))]^T \end{bmatrix}$	$\text{diag}(\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}), \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}))$
(d)	$\begin{bmatrix} [\mathcal{X}^T (A(\hat{\theta}) - A(\theta))^T \mathbf{0}]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{0} \mathcal{Y} \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})]^T \end{bmatrix}$	$\text{diag}(\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}), \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}))$

$$\begin{bmatrix} A_K(\hat{\theta}) & B_K(\hat{\theta}) \\ C_K(\hat{\theta}) & D_K(\hat{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & \mathcal{Y}B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix}^{-1} \left(\mathcal{K}(\hat{\theta}) - \begin{bmatrix} \mathcal{Y}A(\hat{\theta})\mathcal{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_2\mathcal{X} & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}^{-1} \quad (15)$$

を用いた (9) 式により定義される. また, $(\Upsilon(\theta, \hat{\theta}), \Gamma(\theta, \hat{\theta}))$ は, (14) 式に示された (a)~(d) の組み合わせから選択する.

ここで, (12) 式はパラメータ affine であるため, 端点集合 $\text{ver}(\Lambda_{\theta}) \times \text{ver}(\Omega_{\delta})$ において解けば必要十分であるが, $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$ と $\mathcal{X}$ もしくは $\mathcal{Y}$ との乗法項を有する双線形行列不等式を用いて定式化されており, 一般には大域的最適解を求めることが難しい. そのため, $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}) = \varepsilon \mathbf{I}_n$ と設定し ε に関するラインサーチを行なう方法²²⁾, 適当な $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$ の初期値から $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$ と $\mathcal{X}$ ((14) 式において (a) もしくは (c) を選択した場合) もしくは $\mathcal{Y}$ ((14) 式において (b) もしくは (d) を選択した場合) を交互に固定する繰り返し計算による設計法²²⁾, さらに, ラインサーチと繰り返し計算を組み合わせた複合アルゴリズム⁹⁾などが提案されている.

3. 設計法に関する主結果

本章では, 問題 1 に対する設計法として, 提供スケジューリングパラメータ値に含まれる不確かさの影響をすでに考慮しているが外乱入力および制御出力の構造は考慮していない設計法である補題 2 に, 外乱入力および制御出力の構造を考慮すべく, (6) 式の数値スケール行列を組み込んだ設計法を定理 1 として示した後, その解法アルゴリズムを示す.

3.1 提案設計法

以下に提案設計法を示す.

《定理 1》 $\Lambda_{\theta} \times \Omega_{\delta}$ 内のすべての $((\theta, \theta^+), \delta)$ において (16) 式を満たす 1 以下の正数 γ_{∞} , パラメータ affine 行列

$\mathcal{P}(\theta), \mathcal{H}(\theta), \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}) \in \mathbb{S}^n$, 同じくパラメータ affine 行列 $\mathcal{J}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{K}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} A_K(\hat{\theta}) & B_K(\hat{\theta}) \\ C_K(\hat{\theta}) & D_K(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ および定数行列 $\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{L}^{n_p}$ が存在するならば, $\tilde{L} := \mathcal{L}^{1/2}$ および係数行列 $\begin{bmatrix} A_K(\hat{\theta}) & B_K(\hat{\theta}) \\ C_K(\hat{\theta}) & D_K(\hat{\theta}) \end{bmatrix}$ が (15) 式で与えられた GSOF 制御器 $K(\hat{\theta})$ は, 問題 1 の題意を満たす. なお, 行列 U, V は, 補題 1 と同様, $VU + \mathcal{Y}\mathcal{X} = \mathcal{S}$ を満たす正則行列である.

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{\infty}^{cs}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) & * \\ \Upsilon(\theta, \hat{\theta}) & \Gamma(\theta, \hat{\theta}) \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

ただし, (16) 式の $\Upsilon_{\infty}^{cs}(\theta, \theta^+, \hat{\theta})$ は補題 2 の (13) 式に定義された $\Upsilon_A(\theta, \hat{\theta}), \Upsilon_B(\theta, \hat{\theta}), \Upsilon_C(\theta, \hat{\theta})$ および $\Upsilon_D(\theta, \hat{\theta})$ を用いて (17) 式に定義され, $(\Upsilon(\theta, \hat{\theta}), \Gamma(\theta, \hat{\theta}))$ は, 補題 2 の (14) 式に示された (a)~(d) の組み合わせから選択する.

証明は付録 B に示す.

(注意 3) 定理 1 は, 制御器に用いられるスケジューリングパラメータ $\hat{\theta}_i$ が $\theta_i + \delta_i$ に対しても制御性能を保証するような制御器設計を行なっている. すなわち, スケジューリングパラメータに依存しながらも, それに対する感度を小さくする GOSF 制御器設計を行なっているともいえる. これは, 極微小な係数変動が閉ループシステムの性能劣化や不安定化をもたらす “fragile” な制御器²⁷⁾を防ぐことにもつながる.

3.2 解法アルゴリズム

(16) 式は, (12) 式と同様にパラメータ affine であるため,

$$\Upsilon_{\infty}^{cs}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & \mathcal{J}(\theta) \\ * & \mathcal{H}(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{X} \mathbf{I}_n \\ \mathcal{S} \mathcal{Y} \end{bmatrix} \right\} & * & * & \mathbf{0} \\ \Upsilon_A(\theta, \hat{\theta}) & \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta^+) & \mathcal{J}(\theta^+) \\ * & \mathcal{H}(\theta^+) \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \Upsilon_B(\theta, \hat{\theta}) \\ \Upsilon_C(\theta, \hat{\theta}) & \mathbf{0} & \gamma_{\infty}^2 \mathcal{L} & \Upsilon_D(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathbf{0} & * & * & \mathcal{L}^{-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

端点集合 $\text{ver}(\Lambda_{\theta}) \times \text{ver}(\Omega_{\delta})$ においてその成立性を確認すればよいが、 $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$ と $\mathcal{X}$ もしくは $\mathcal{Y}$ との積があるだけでなく、決定変数 $\mathcal{L}$ およびその逆行列も含んでいる。そこで、定理1の基礎となる補題2の繰り返し計算²²⁾を修正することで、定理1の解法アルゴリズムを示す。基本的には、文献3)と同様、決定変数の一部を固定した繰り返し計算である。

(16)式の左辺に、左右から $\text{diag}(\mathbf{I}_{4n+n_p}, \mathcal{L}, \mathbf{I})$ をかけると以下を得る。

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{\infty}^{cs}(\cdot)_{11} & * & * & \mathbf{0} \\ \Upsilon_A(\theta, \hat{\theta}) & \Upsilon_{\infty}^{cs}(\cdot)_{22} & \mathbf{0} & \Upsilon_B(\theta, \hat{\theta})\mathcal{L} \\ \Upsilon_C(\theta, \hat{\theta}) & \mathbf{0} & \gamma_{\infty}^2 \mathcal{L} & \Upsilon_D(\theta, \hat{\theta})\mathcal{L} \\ \mathbf{0} & * & * & \mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ \Upsilon(\theta, \hat{\theta}) \mathbf{0} \end{bmatrix} \Gamma(\theta, \hat{\theta}) > 0 \quad (18)$$

なお、 $\Upsilon_{\infty}^{cs}(\cdot)_{11}$ は (17) 式の (1,1) ブロック行列を、 $\Upsilon_{\infty}^{cs}(\cdot)_{22}$ は (17) 式の (2,2) ブロック行列を表す。ここで、新たに双線形項 $\Upsilon_B(\theta, \hat{\theta})\mathcal{L}$ および $\Upsilon_D(\theta, \hat{\theta})\mathcal{L}$ が発生するが、 $\mathcal{Y}$ が固定されている場合、さらに $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})$ と $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})$ を固定すれば、(18)式は、与えられた γ_{∞} に対して $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{H}(\theta)$, $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$, $\mathcal{J}(\theta)$, $\mathcal{A}_K(\hat{\theta})$, $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})$ および $\mathcal{X}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$ に関するパラメータ依存 LMI となることが確認できる。

以上より、(14)式において (b) もしくは (d) を選んだ場合に、定理1を解くアルゴリズムを以下に示す。ただし、以下では、 $\text{ver}(\cdot)$ は $\text{ver}(\Lambda_{\theta}) \times \text{ver}(\Omega_{\delta})$ を表す。

[アルゴリズム 1]

Step 0 $i = 0$, $\gamma_{\infty, i} = \infty$ とし、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i = \mathbf{I}_{n_p}$ とする。

$\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}) = \varepsilon \mathbf{I}_n$ とするための ε の設定範囲を適切に定め、定めた ε の範囲をグリッドに区切る。この区切られた ε の値を用いて問題Aを解き、最小 γ_{∞} を達成した解 $\mathcal{Y}$, $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})$ をそれぞれ $\mathcal{Y}_i$, $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})_i$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})_i$ とする。

問題 A

$$\min_{\gamma_{\infty}, \mathcal{P}(\theta), \mathcal{H}(\theta), \mathcal{J}(\theta), \mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{Y}, \mathcal{A}_K(\hat{\theta}), \mathcal{B}_K(\hat{\theta}), \mathcal{C}_K(\hat{\theta}), \mathcal{D}_K(\hat{\theta})} \gamma_{\infty} \quad \text{s.t. (16)} > 0, \quad \forall ((\theta, \theta^+), \delta) \in \text{ver}(\cdot)$$

Step i.1 $i = i + 1$ とアップデートし、前のステップで得られた $\mathcal{Y}_{i-1}$, $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})_{i-1}$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})_{i-1}$ を用いて、問題B1を解き、最小 γ_{∞} を達成する $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$, $\mathcal{L}$, γ_{∞} をそれぞれ $\mathcal{E}_i(\theta, \hat{\theta})$, $\mathcal{L}_i$, $\gamma_{\infty, i}$ とする。

問題 B1

$$\min_{\gamma_{\infty}, \mathcal{P}(\theta), \mathcal{H}(\theta), \mathcal{J}(\theta), \mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A}_K(\hat{\theta}), \mathcal{C}_K(\hat{\theta}), \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}), \mathcal{L}} \gamma_{\infty} \quad \text{s.t. (18)} > 0, \quad \forall ((\theta, \theta^+), \delta) \in \text{ver}(\cdot)$$

Step i.2 前のステップで得られた $\mathcal{E}_i(\theta, \hat{\theta})$ および $\mathcal{L}_i$ を用いて問題Aを解く。最小 γ_{∞} を達成する $\mathcal{Y}$, $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})$ をそれぞれ $\mathcal{Y}_i$, $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})_i$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})_i$ とする。

Step i.3 $\gamma_{\infty, i} \leq 1$ を満たすなら繰り返し計算を終了し、(15)式より GSOF 制御器を求める。 $\gamma_{\infty, i} > 1$ かつあらかじめ定めた正数 ρ に対して $\gamma_{\infty, i-1} - \gamma_{\infty, i} < \rho$ が成り立てば繰り返し計算を終了し、そうでなければ Step i.1 へ戻る。

上記では、 $\mathcal{L}^{-1}$ を消去したが、 $\mathcal{L}$ を消去することも可能である。この場合、(18)式の代わりに (19)式を用いる。

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{\infty}^{cs}(\cdot)_{11} & * & * & \mathbf{0} \\ \Upsilon_A(\theta, \hat{\theta}) & \Upsilon_{\infty}^{cs}(\cdot)_{22} & \mathbf{0} & \Upsilon_B(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathcal{L}^{-1} \Upsilon_C(\theta, \hat{\theta}) & \mathbf{0} & \gamma_{\infty}^2 \mathcal{L}^{-1} & \mathcal{L}^{-1} \Upsilon_D(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathbf{0} & * & * & \mathcal{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ \Upsilon(\theta, \hat{\theta}) \mathbf{0} \end{bmatrix} \Gamma(\theta, \hat{\theta}) > 0 \quad (19)$$

この場合は、 $\mathcal{X}$ が固定されており、さらに $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})$ と $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})$ を固定すれば、(19)式は、与えられた γ_{∞} に対して $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{H}(\theta)$, $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$, $\mathcal{J}(\theta)$, $\mathcal{A}_K(\hat{\theta})$, $\mathcal{B}_K(\hat{\theta})$ および $\mathcal{S}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}^{-1}$ に関するパラメータ依存 LMI となることが確認できる。

以上より、(14)式において (a) もしくは (c) を選んだ場合に、定理1を解くアルゴリズムを以下に示す。

[アルゴリズム 2]

Step 0 $i = 0$, $\gamma_{\infty, i} = \infty$ とし、 $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}_i^{-1} = \mathbf{I}_{n_p}$ とする。 ε のラインサーチをアルゴリズム1の Step 0 と同様に実施し、最小 γ_{∞} を達成した解 $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})$ をそれぞれ $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})_i$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})_i$ とする。

Step i.1 $i = i + 1$ とアップデートし、前のステップで得られた $\mathcal{X}_{i-1}$, $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})_{i-1}$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})_{i-1}$ を用いて、問題B2を解き、最小 γ_{∞} を達成する $\mathcal{E}(\theta, \hat{\theta})$, $\mathcal{L}^{-1}$, γ_{∞} をそれぞれ $\mathcal{E}_i(\theta, \hat{\theta})$, $\mathcal{L}_i^{-1}$, $\gamma_{\infty, i}$ とする。

問題 B2

$$\min_{\gamma_{\infty}, \mathcal{P}(\theta), \mathcal{H}(\theta), \mathcal{J}(\theta), \mathcal{Y}, \mathcal{S}, \mathcal{A}_K(\hat{\theta}), \mathcal{B}_K(\hat{\theta}), \mathcal{E}(\theta, \hat{\theta}), \mathcal{L}^{-1}} \gamma_{\infty} \quad \text{s.t. (19)} > 0, \quad \forall ((\theta, \theta^+), \delta) \in \text{ver}(\cdot)$$

Step i.2 前のステップで得られた $\mathcal{E}_i(\theta, \hat{\theta})$ および $\mathcal{L}_i^{-1}$ を用いて問題Aを解く。最小 γ_{∞} を達成する $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})$ をそれぞれ $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{C}_K(\hat{\theta})_i$, $\mathcal{D}_K(\hat{\theta})_i$ とする。

Step i.3 アルゴリズム1の Step i.3 と同じ。

(注意4) これらのアルゴリズムは、仮定1を満たす問題ならば、 $\delta = \mathbf{0}$ と問題設定している補題1にも適用可能である。

イトシミュレーションの実現²³⁾であることから、今回の制御目的を、突風 (v_g) の影響最小化およびパイロット入力 (u_{pilot}) から機体運動までの特性をあらかじめ与えられたモデルにマッチングさせることとした。なお、本稿では特定のモデルを与えずに Fig. 2 中のモデル M は単位行列とした。今回、マッチングさせる変数として横方向速度 (v_a [m/s]) とロール角 (ϕ [deg]) を選択し、具体的な設計仕様は以下とした。

- 突風軽減: v_g から $[v_a \ \phi]^T (= z_p)$ へのピークゲイン低減
- モデルマッチング: 低周波数帯域において、 u_{pilot} から z_p への特性を与えられたモデル M にマッチング

上記の仕様を課すために、 z_p および $Mu_{pilot} - z_p$ に対する重みとして $\text{diag}(\frac{0.5}{0.1s+1}, \frac{0.5}{0.1s+1})$, $\text{diag}(\frac{20}{T^2s^2+\sqrt{2}Ts+1}, \frac{20}{T^2s^2+\sqrt{2}Ts+1})$ を導入し、これらを Euler 近似を用いて離散化することで、Fig. 2 中の重み W_g および W_M を得た。なお、突風軽減よりモデルマッチングのほうが優先であることから、設計パラメータ (T) はモデルマッチングを課す重みのみに設定した。この設計パラメータ T は、値が小さくなるほど高周波数帯域までのマッチング性能を課すことになる。

4.1.5 設計問題

以上に定義された G_{dex} , $G_{act}(V_{true})$, $G_{motion}(V_{true})$, M , W_M , W_g , W から構成された一般化プラント $G(V_{true})$ に対して、モデルマッチング性能を定める作用素 $\Delta_{per} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 突風軽減性能を定める作用素 $\Delta_{gust} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, エルロン系統の不確かさを表わす作用素 $\Delta_a \in \mathbb{R}$, ラダー系統の不確かさを表わす作用素 $\Delta_r \in \mathbb{R}$ から構成された作用素ブロック $\Delta = \text{diag}(\Delta_{per}, \Delta_{gust}, \Delta_a, \Delta_r)$ を定義する。ここで、 Δ_{gust} を正方とするために、Fig. 2 にあるように、 $[v_g \ 0]^T$ と仮想的な信号を追加している。

ポリトープ Λ_θ は、端点集合を $\{(54.0, 53.9), (54.0, 54.1), (97.7, 97.6), (97.7, 97.8)\}$ と設定してもよいが、想定していない余分な領域を除くため、端点集合を以下に設定した。

$$\text{ver}(\Lambda_\theta) = \{(54.0, 54.0), (54.0, 54.1), (54.1, 54.0), (97.7, 97.7), (97.7, 97.6), (97.6, 97.7)\} \quad (21)$$

以上より、設計問題は、上記に定義された 16 次の一般化プラント $G(V_{true})$ および上記の作用素ブロック Δ に対して、 $\text{ver}(\Lambda_\theta)$ および $\text{ver}(\Omega_\delta)$ がそれぞれ (21) 式および (20) 式に定義された問題 1 を解くことである。

4.2 設計結果

パラメータ依存 LMI を解くソフトウェアとして SeDuMi²⁹⁾ および YALMIP³⁰⁾ を使用し、 γ_∞ の最小化には二分法を用いた。修正補題 1 にアルゴリズム 1 および 2 と同様の繰り返し計算を適用して得られた設計結果と、アルゴリズム 1 および 2 を用いた定理 1 による設計結果を Table 2 に示す。ただし、修正補題 1 の結果を“Nominal GSOF”，定理 1 の結果を“Robust GSOF”と表記している。ここで、繰り返し計算判定の正数 ρ は 0.01 と設定した。括弧内の数値は記載の γ_∞ の値が得られた際のステップ数“ i ”を表わす。なお、比較的大きなサイズの LMI を解く場合、結果は解くべき行列が

Table 2 Minimized γ_∞ for design parameter T

T	Nominal GSOF		Robust GSOF			
	algo. 1	algo. 2	(a)	(b)	(c)	(d)
5	1.28 (17)	2.54 (1)	2.31 (5)	1.46 (13)	3.72 (1)	1.45 (25)
6	1.16 (19)	1.60 (22)	3.67 (1)	1.31 (13)	3.63 (1)	1.32 (21)
7	1.06 (21)	2.02 (3)	2.31 (4)	1.22 (14)	4.64 (1)	1.20 (18)
8	0.99 (11)	2.39 (1)	2.51 (3)	1.12 (18)	3.65 (1)	1.11 (20)
9	2.14 (3)	2.06 (2)	2.12 (5)	1.07 (14)	3.71 (1)	1.05 (19)
10	0.98 (18)	1.66 (8)	3.70 (1)	1.02 (14)	2.69 (3)	0.98 (21)

正定であると判断していても、得られた決定行列を用いて解くべき行列の正定性を確認すると数値的不安定さから正定性が確保されていない場合³¹⁾もあり、Table 2 内のステップ数が小さい結果はそれに該当する場合が多い。

Table 2 より、ノミナル GSOF 制御器設計については、アルゴリズム 1 を用いた $T = 8$ の結果が $\gamma_\infty \leq 1$ を満たしている。そこで、得られたノミナル GSOF 制御器の δ_V の影響を確認する。ノミナル GSOF 制御器を用いた $w = [u_{pilot}^T \ v_g \ 0]^T \ w_d^T]^T$ から $z = [z_{per}^T \ z_g^T \ z_{com}^T]^T$ までの閉ループシステム $G_{cl}(V_{true}, V_{prov})$ において V_{true} および δ_V をそれぞれ $\{54.0, 75.9, 97.7\}$ および $\{-2.5, 0, 2.5\}$ に固定した離散時間 LTI システム $G_{cl}(V_{true}^{frozen}, V_{prov}^{frozen})$ に、制御器設計の結果得られたスケーリング行列 $\mathcal{L} = \text{diag}(462.9\mathbf{I}_2, 793.5\mathbf{I}_2, 1.080, 0.848)$ を用いて入力端に $\mathcal{L}^{1/2}$ 、出力端に $\mathcal{L}^{-1/2}$ を適用した離散時間 LTI システムの最大特異値を Fig. 3 に示す。いま、 V_{true} , V_{prov} が固定されているため、 $\mathcal{L}^{-1/2}G_{cl}(V_{true}^{frozen}, V_{prov}^{frozen})\mathcal{L}^{1/2}$ の最大特異値が 1 未満であることと (7) 式を満たすことは等価である。

この図より、 $\delta_V = 0$ の場合には確かに最大特異値が 1 未満であるが、 $\delta_V \neq 0$ の場合には最大特異値が 1 以上となる場合があることが確認できる。さらに、定数スケーリング行列を用いた Extended LMI による誘導 l_2 ノルム性能解析 (付録 A 参照) を行なった結果、 $\gamma_\infty = 1.24$ と得られ、Fig. 3 の結果が裏付けられた。なお、スケーリング行列を用いない $G_{cl}(V_{true}^{frozen}, V_{prov}^{frozen})$ の最大特異値が 15.5 と得られ、スケーリング行列導入による保守性低減も確認できた。

一方、ロバスト GSOF 制御器設計については、 $\gamma_\infty \leq 1$ を満たす T の値はノミナル GSOF 制御器の結果と比べると小さくなり、 $T = 10$ の (d) の設計となった。しかし、定理 1 は十分条件であることから、設計時には $\gamma_\infty \leq 1$ を達成できていなくても実際には達成している場合もありうる。そこで、 $T = 9$ の (b) と (d) の設計結果を、ノミナル GSOF 制御器と同様に、定数スケーリング行列を用いた Extended LMI による誘導 l_2 ノルム性能解析を行なった結果、 γ_∞ がそれぞれ 0.99 と 1.02 と得られ、設計時の γ_∞ より小さいこと、さらには (b) の制御器は設計仕様を満たすことが確認された。そこで、(b) の結果のロバスト GSOF 制御器を用いて、Fig. 3 と同様に最大特異値を確認した結果を Fig. 4 に示す。なお、スケーリング行列は $\mathcal{L} = \text{diag}(392.3\mathbf{I}_2, 456.1\mathbf{I}_2, 0.891, 0.292)$ である。この図より、 $\delta_V = 0$ の場合はもちろん、 $\delta_V \neq 0$ の場合

Fig. 3 Maximum singular value plots of $\mathcal{L}^{-1/2}G_{cl}(V_{true}^{frozen}, V_{prov}^{frozen})\mathcal{L}^{1/2}$ with nominal GSOF controller (dotted: $\delta_V = 0$, solid: $\delta_V = \pm 2.5$)

Fig. 4 Maximum singular value plots of $\mathcal{L}^{-1/2}G_{cl}(V_{true}^{frozen}, V_{prov}^{frozen})\mathcal{L}^{1/2}$ with robust GSOF controller (dotted: $\delta_V = 0$, solid: $\delta_V = \pm 2.5$)

にも確かに最大特異値が1未満であることが確認できる。なお、定数スケーリング行列を用いない $G_{cl}(V_{true}^{frozen}, V_{prov}^{frozen})$ の最大特異値が15.3と得られ、ノミナル GSOF 制御器と同様、スケーリング行列導入による保守性低減が確認された。

Fig. 5 に、ノミナル GSOF 制御器とロバスト GSOF 制御器のゲイン線図を示す。この図より、ノミナル GSOF 制御器は、ロバスト GSOF 制御器と比べて特に p および r から δ_{a_c} へのゲインのスケジューリングパラメータに対する感度が高いことがわかる。一方、提案設計法は、注意3にあるように、スケジューリングパラメータに依存しながらもそれに対する感度が小さく、かつ全体的にゲインが小さい制御器を設計していることが確認できる。

設計したロバスト GSOF 制御器を用いた $[v_g \ u_{pilot}^T]^T$ から $[v_a \ \phi]^T$ までの閉ループシステム $G_{cl}(V_{true}, V_{prov})$ に対して、 $V_{true} = \{54.0, 75.9, 97.7\}$, $\delta_V = \{-2.5, 0, 2.5\}$ と固定した

Fig. 5 Gain plots [dB] of nominal GSOF controller (upper two rows) and robust GSOF controller (lower two rows) from $[u_{pilot}^T \ v_a \ p \ \phi \ r]^T$ to $[\delta_{a_c} \ \delta_{r_c}]^T$ with $\delta_V = 0$

Table 3 Peak gains [dB] and frequencies [rad/s] from v_g to v_a and ϕ

V_{true} [m/s]	Open-loop		Closed-loop	
	v_a	ϕ	v_a	ϕ
54.0	6.3@1.3	2.0@1.2	3.7@1.9	-6.8@2.6
75.9	7.9@1.9	0.3@1.8	2.2@2.6	-12.6@2.0
97.7	8.7@2.5	-1.1@2.4	1.6@3.5	-14.9@1.7

場合の Bode 線図を **Fig. 6** に示す。なお、アクチュエータの不確かさの影響を確認するために、 z_{com} から w_d までのループは閉じており、そのときの (Δ_a, Δ_r) は $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ としている。そのため、各 V_{true} において、開ループシステムは1本の破線のみであるのに対して、閉ループシステムは、アクチュエータ不確かさが2組と提供スケジューリングパラメータ値の不確かさが3組からなる合計6本の実線が描かれている。しかし、すべての V_{true} において実線は区別ができないほど重なっている。また、低周波数帯域において u_{pilot} から $[v_a \ \phi]^T$ までの $\mathbf{I}_2$ へのマッチングが確認できる。なお、 v_g から v_a および ϕ へのピークゲインとその周波数を **Table 3** に示すが、その数値からも突風軽減の達成が確認できる。

次節では、Fig. 3, Fig. 4 に用いたノミナルおよびロバスト GSOF 制御器の性能比較を行なった試験結果を示す。

4.3 飛行試験結果

設計した二つの GSOF 制御器を MuPAL- α に搭載し、飛行試験を実施した。可能な限り飛行条件を同一にするために、試験は同一のフライト中に連続して行なった。ただし、外乱である突風を同一にすることは不可能であるため、完全に同一の試験環境とはいえない。飛行試験結果の一例を **Fig. 7**, **Fig. 8** に示す。ここで、 u_{pilot} は δ_a と δ_r の欄に記載された矩形波（それぞれ、周期が12s, 10s, インターバルが5s, 4s）に以下のフィルタを通した信号とした。

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{0.6^2}{s^2 + 2 \times 0.4 \times 0.6s + 0.6^2} \\ \frac{0.7^2}{s^2 + 2 \times 0.4 \times 0.7s + 0.7^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 6 Bode plots from $[v_g \ u_{pilot}^T]^T$ to $[v_a \ \phi]^T$ with robust GSOF controller for frozen V_{true} and δ_V (At each air speed, six solid lines and one broken line are drawn)

Table 4 Matching performance $\int_0^{T_{eval}} (u_{pilot} - z_p)^2 dt / T_{eval}$

Nominal GSOF		Robust GSOF	
v_a [(m/s) ²]	ϕ [deg ²]	v_a [(m/s) ²]	ϕ [deg ²]
1.58	4.49	0.38	7.25

これらは、0.58 rad/s もしくは 0.50 rad/s に共振周波数を有するフィルタとなっている。

実験においては、パイロットが機体姿勢角を変更させることで速度を変化させている。速度を数値微分した 1 サンプルあたりのスケジューリングパラメータの増減を第 2 行に示す。ノイズの影響により設計時の増減幅 (0.1 m/s/sampling) を超えているときもあるが、ノイズの影響を除けばほぼ想定範囲内に収まっている。マッチング性能を確認するために、 u_{pilot} と z_p との差の単位時間あたりの二乗時間積分値を調べた結果を **Table 4** に示す。

Fig. 7, 8 および Table 4 より、確かに ϕ についてはノミナル GSOF 制御器のほうがマッチング性能が高い。しかし、 v_a についてはバイアス誤差が生じ、結果としてロバスト GSOF 制御器のほうがマッチング性能が高い。この傾向は、Fig. 3 から確認でき、ノミナル GSOF 制御器は低周波数帯域において制御仕様に対する充足度が不十分であるといえる。一方、ロバスト GSOF 制御器は、Table 2 および Fig. 5 より、わずかな性能劣化と引き替えに、全体的に低ゲインでありかつスケジューリングパラメータに対する感度を下げた制御器となっていることが確認でき、結果として、実環境下での性能劣化は特に見られなかった。

5. ま と め

本稿は、パラメータ affine な離散時間 Linear Parameter-Varying (LPV) システムに対して、不確かなスケジューリングパラメータしか得られないという条件下におけるパラメータ affine な Gain-Scheduled (GS) 出力フィードバック (GS Output-Feedback; GSOF) 制御器を設計する問題に取り組

Fig. 7 Time history of nominal GSOF controller with $T = 8$

Fig. 8 Time history of robust GSOF controller with $T = 9$

んだ。その際に、実際のシステムに対する設計を考慮して、制御性能などを定める外乱入力と制御出力が構造化された問題を想定し、保守性を低減すべく定数スケーリング行列を導入した設計法を提案した。提案設計法はパラメータ affine な双線形行列不等式を用いて定式化され、一般には、容易に大域的最適解を得ることができない。そこで、外乱入力と制御出力が構造化されていない場合の従来設計法を修正した繰り返し計算による設計法を示した。

また、提案設計法、および提案設計法と同様に定数スケーリング行列を導入するがスケジューリングパラメータは正確に得られることを前提とした設計法を用いて、JAXA 所有の実験用航空機 MuPAL- α の横/方向運動に対する GS モデルマッチング制御器を設計した。設計結果および設計後の解析結果から、制御器に提供されるスケジューリングパラメータ値に含まれる不確かさを考慮しないとその影響により設計時の制御性能を満たさない場合があることが示された。なお、この特徴は実環境下においても確認された。一方、提案設計法は、提供スケジューリングパラメータ値に含まれる不確か

さを考慮することによって、わずかな性能劣化と引き替えにスケジューリングパラメータに対する感度を低減した GSOF 制御器を設計することとなり、結果として、実環境での制御性能劣化が見られない制御器設計が可能であることを示した。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 23760398 の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) 佐藤, 村岡: Quad tilt wing 無人航空機の飛行制御, 日本航空宇宙学会論文集, **61**-4, 110/118 (2013)
- 2) G. Becker and A. Packard: Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback, *Systems & Control Letters*, **23**-3, 205/215 (1994)
- 3) P. Apkarian and R.J. Adams: Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems, *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **6**-1, 21/32 (1998)
- 4) I. Masubuchi and I. Kurata: Gain-scheduled control via filtered scheduling parameters, *Automatica*, **47**-8, 1821/1826 (2011)
- 5) M. Sato: Gain-scheduled output-feedback controllers depending solely on scheduling parameters via parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica*, **47**-12, 2786/2790 (2011)
- 6) Y. Hamada, T. Ohtani, T. Kida and T. Nagashio: Synthesis of a linearly interpolated gain scheduling controller for large flexible spacecraft ETS-VIII, *Control Engineering Practice*, **19**-6, 611/625 (2011)
- 7) J. Mohammadpour and C.W. Scherer, editors: *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, 1st edition, Springer (2012)
- 8) X. Wei and L. del Re: Gain scheduled H_∞ control for air path systems of diesel engines using LPV techniques, *IEEE Trans. Control System Technology*, **15**-3, 406/415 (2007)
- 9) M. Sato: Robust gain-scheduled flight controller using inexact scheduling parameters, *Proc. American Control Conference*, 6845/6850 (2013)
- 10) H.M.N.K. Balini, J. Witte and C.W. Scherer: Synthesis and implementation of gain-scheduling and LPV controllers for an AMB system, *Automatica*, **48**-3, 521/527 (2012)
- 11) J. Witte, H.M.N.K. Balini and C.W. Scherer: Experimental results with stable and unstable LPV controllers for active magnetic bearing systems, *Proc. IEEE Conference on Control Applications*, 950/955 (2010)
- 12) P. Apkarian: On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers, *Automatica*, **33**-4, 655/661 (1997)
- 13) P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker: Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: A design example, *Automatica*, **31**-9, 1251/1261 (1995)
- 14) P. Apkarian, R.C. Pellanda and H.D. Tuan: Mixed H_2/H_∞ multi-channel linear parameter-varying control in discrete time, *Systems & Control Letters*, **41**-5, 333/346 (2000)
- 15) J. de Caigny, J.F. Camino, R.C.L.F. Oliveira, P.L.D. Peres and J. Swevers: Gain-scheduled dynamic output-feedback control for discrete-time LPV systems, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, **22**-5, 535/558 (2012)
- 16) A. Packard: Gain scheduling via linear fractional transformations, *Systems & Control Letters*, **22**-2, 79/92 (1994)
- 17) F. Wu and K. Dong: Gain-scheduling control of LFT systems using parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica*, **42**-1, 39/50 (2006)
- 18) 小原, 井手, 山口, 大野: ALFLEX 縦系飛行制御系の LPV モデリングとゲインスケジューリング制御, システム制御情報学会論文誌, **12**-11, 655/663 (1999)
- 19) J. Daafouz, J. Bernussou and J.C. Geromel: On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **53**-7, 1674/1678 (2008)
- 20) M. Sato and D. Peaucelle: Gain-Scheduled Output-Feedback Controllers with Good Implementability and Robustness, *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, chapter 8, 181/215, Springer (2012)
- 21) M. Sato and D. Peaucelle: Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems, *Automatica*, **49**-4, 1019/1025 (2013)
- 22) M. Sato: Discrete-time gain-scheduled output-feedback controllers exploiting inexact scheduling parameters via parameter-dependent Lyapunov functions, *Proc. Conference on Decision and Control*, 1938/1943 (2011)
- 23) M. Sato and A. Satoh: Flight control experiment of multipurpose-aviation-laboratory- α in-flight simulator, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **34**-4, 1081/1096 (2011)
- 24) 佐藤昌之: 「実システムへの適用」という成熟期に入ったゲインスケジューリング制御, システム/制御/情報, **57**-2, 73/81 (2013)
- 25) 市原裕之: 二乗和に基づく制御系解析・設計, システム/制御/情報, **55**-5, 174/180 (2011)
- 26) M.C. de Oliveira, J. Bernussou and J.C. Geromel: A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters*, **37**-4, 261/265 (1999)
- 27) L.H. Keel and S.P. Bhattacharyya: Robust, fragile, or optimal?, *IEEE Trans. Automatic Control*, **42**-8, 1098/1105 (1997)
- 28) 井之口浜木: 多目的実証実験機 (MuPAL- α) 搭載計測用対気速度計の位置誤差, Technical report, 航空宇宙技術研究所, NAL-TM-776 (2003)
- 29) J.F. Sturm: Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, **11**-1-4, 625/653 (1999)
- 30) J. Löfberg: YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. IEEE Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, 284/289 (2004)
- 31) 川田, 蛭原: LMI に基づく制御系解析・設計, システム/制御/情報, **55**-5, 165/173 (2011)

《付 録》

A. 定数スケーリング行列を導入した Extended LMI による誘導 l_2 ノルム解析

設計した GSOF 制御器を組み込んだ閉ループシステムの性能解析に用いた「定数スケーリング行列を導入した Extended LMI による誘導 l_2 ノルム解析手法」を示す。対象システムは, (1) 式の一般化プラント $G(\theta)$ と (5) 式の GSOF 制御器 $K(\hat{\theta})$ からなる閉ループシステム $G_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ であり, 状態空間行列を $A_{cl}(\theta, \hat{\theta})$, $B_{cl}(\theta, \hat{\theta})$, $C_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ および $D_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ と表記する。なお, 補題 1 は, $\delta = \mathbf{0}$ かつ定数スケーリング行列を単位行列 $\mathbf{I}_{n_p}$ としたこの補題から導出されている¹⁵⁾。[補題 3] $\Lambda_\theta \times \Omega_\delta$ 内のすべての $((\theta, \theta^+), \delta)$ において (A. 1) 式を満たす 1 以下の正数 γ_∞ , パラメータ affine 行列 $P(\theta) \in \mathbb{S}^{2n}$, および定数行列 $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $L \in \mathbb{L}^{n_p}$ が存在するな

Fig. A.1 Bode plots of discrete-time LPV airplane motion model with frozen V_{true} (broken lines) and $V_{true} \pm 2.5$ m/s (dotted gray lines), and LTI model (solid lines) (left: $V_{true} = 56.6$, center: $V_{true} = 77.2$, right: $V_{true} = 97.7$)

$$\begin{bmatrix} T^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta, \hat{\theta})G^T B_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ C_{cl}(\theta, \hat{\theta})G^T D_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta)\mathcal{X} + B_2 C_K(\hat{\theta}) & A(\theta) + B_2 D_K(\hat{\theta})C_2 & B_1(\theta) + B_2 D_K(\hat{\theta})D_{21} \\ \mathcal{A}_K(\hat{\theta}) - \mathcal{Y}(A(\hat{\theta}) - A(\theta))\mathcal{X} & \mathcal{Y}A(\theta) + B_K(\hat{\theta})C_2 & \mathcal{Y}B_1(\theta) + B_K(\hat{\theta})D_{21} \\ -C_1(\theta)\mathcal{X} + D_{12}C_K(\hat{\theta}) & -C_1(\theta) + D_{12}D_K(\hat{\theta})C_2 & D_{11}(\theta) + D_{12}D_K(\hat{\theta})D_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

らば, $\tilde{L} := L^{1/2}$ および GSOF 制御器 $K(\hat{\theta})$ は問題 1 の題意を満たす.

$$\begin{bmatrix} -P(\theta) + \text{He}\{G\} & * & * \\ A_{cl}(\theta, \hat{\theta})G & P(\theta^+) & \mathbf{0} \\ C_{cl}(\theta, \hat{\theta})G & \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ D_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T & D_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

(証明) (A.1) 式は, Schur 補題により, 以下の $\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta})$ を用いた $\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) > 0$ と等価である.

$$\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -P(\theta) + \text{He}\{G\} & * & * & \mathbf{0} \\ A_{cl}(\theta, \hat{\theta})G & P(\theta^+) & \mathbf{0} & B_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ C_{cl}(\theta, \hat{\theta})G & \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 L & D_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathbf{0} & * & * & L^{-1} \end{bmatrix}$$

この $\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta})$ は以下に書き換えられる.

$$\begin{bmatrix} -P(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\theta^+) & \mathbf{0} & B_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 L & D_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathbf{0} & * & * & L^{-1} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T & C_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T G \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}$$

上式に左から $\begin{bmatrix} -A_{cl}(\theta, \hat{\theta}) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -C_{cl}(\theta, \hat{\theta}) & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ を, 右からその転置行列をかけ, Schur の補題を適用すると下式を得る.

$$\begin{bmatrix} P(\theta) & * & * & \mathbf{0} \\ A_{cl}(\theta, \hat{\theta})P(\theta) & P(\theta^+) & \mathbf{0} & B_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ C_{cl}(\theta, \hat{\theta})P(\theta) & \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 L & D_{cl}(\theta, \hat{\theta}) \\ \mathbf{0} & * & * & L^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

さらに, $\tilde{P}(\theta) := \gamma_\infty^2 P(\theta)^{-1}$ とすると, 下式を得る.

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_\infty^2 \mathbf{I}_{n_p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T \\ L^{1/2} B_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T \end{bmatrix} \tilde{P}(\theta^+) \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta, \hat{\theta}) & B_{cl}(\theta, \hat{\theta}) L^{1/2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T \\ L^{1/2} D_{cl}(\theta, \hat{\theta})^T \end{bmatrix} L^{-1} \begin{bmatrix} C_{cl}(\theta, \hat{\theta}) & D_{cl}(\theta, \hat{\theta}) L^{1/2} \end{bmatrix} > 0$$

(A.1) 式において行列 L が正定であることから $P(\theta)$ の正定性が成り立つ. その結果, 上式において正定な行列 $\tilde{P}(\theta)$ および L を用いた (1,1) ブロックが正定であることから, $G_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ の安定性が成り立つ.

上式に, $\tilde{w} = L^{-1/2}w (= \tilde{L}^{-1}w)$ と定義された $\tilde{w}$ を用いて, 左から $\begin{bmatrix} x_{cl}^T & \tilde{w}^T \end{bmatrix}^T$ (x_{cl} は閉ループシステム $G_{cl}(\theta, \hat{\theta})$ の状態), 右からその転置ベクトルをかけると下式を得る.

$$\gamma_\infty^2 \tilde{w}^T \tilde{w} + x_{cl}^T \tilde{P}(\theta) x_{cl} - x_{cl}^{+T} \tilde{P}(\theta^+) x_{cl}^+ - \tilde{z}^T \tilde{z} > 0$$

ここで, $\tilde{z} = L^{-1/2} z (= \tilde{L}^{-1} z)$ である. 上式を時刻 0 から無限大まで加算すると, $\frac{\|\tilde{z}\|_2}{\|\tilde{w}\|_2} < \gamma_\infty (\leq 1)$, $l_2 \ni \tilde{w} \neq 0$ を得る. よって, $\tilde{L}$ および $K(\hat{\theta})$ は問題 1 の題意を満たす. $\square$

B. 定理 1 の証明

(証明) 補題 3 の証明内の $\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) > 0$ において, 行列 G を $G = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & X_1 \\ U & X_2 \end{bmatrix}$, $G^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}^T & Y_1 \\ V^T & Y_2 \end{bmatrix}$ とパラメトライズし, (15) 式と等価な次式の変数変換を施す¹⁵⁾と, 正則行列 $T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathcal{Y}^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix}$ を用いた (A.2) 式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\hat{\theta}) &= \begin{bmatrix} V \mathcal{Y} B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K(\hat{\theta}) & B_K(\hat{\theta}) \\ C_K(\hat{\theta}) & D_K(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_2 \mathcal{X} & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix} \\ &\quad + \text{diag}(\mathcal{Y} A(\hat{\theta}) \mathcal{X}, \mathbf{0}) \end{aligned}$$

一方, 文献 20) の Lemma 8.3 を (16) 式に適用することで, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \Upsilon_\infty^{cs}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) - \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & * \\ \Upsilon_\delta & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right) &> 0, \\ \Upsilon_\delta &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & * \\ \mathcal{Y}(A(\hat{\theta}) - A(\theta)) \mathcal{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このとき, 上式の左辺の (2,1) ブロックは

$$\begin{aligned} &\Upsilon_A(\theta, \hat{\theta}) - \Upsilon_\delta \\ &= \begin{bmatrix} A(\theta) \mathcal{X} + B_2 C_K(\hat{\theta}) & A(\theta) + B_2 D_K(\hat{\theta}) C_2 \\ \mathcal{A}_K(\hat{\theta}) - \mathcal{Y}(A(\hat{\theta}) - A(\theta)) \mathcal{X} & \mathcal{Y} A(\theta) + B_K(\hat{\theta}) C_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることに注意すると, (A.2) 式より, 補題 3 の証明内の $\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta})$ を用いた次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\Upsilon_\infty^{cs}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) - \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & * \\ \Upsilon_\delta & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right) \\ &= \text{diag}(T^T, T^T, \mathbf{I}_{2n_p}) \Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) \text{diag}(T, T, \mathbf{I}_{2n_p}) \end{aligned}$$

ただし, $T^T P(\theta) T = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & \mathcal{J}(\theta) \\ * & \mathcal{H}(\theta) \end{bmatrix}$ である. 今, 上式の左辺は正定であること, および行列 T が正則であることから, $\Upsilon_{cl}(\theta, \theta^+, \hat{\theta}) > 0$ が成り立つ. よって, 補題 3 より $\mathcal{L}^{1/2}$ および係数行列が (15) 式で与えられた GSOF 制御器 $K(\hat{\theta})$ は問題 1 の題意を満たす. $\square$

C. 機体運動モデル

機体運動を表わす離散時間 LPV モデルは以下の手順により求めた.

- (1) [51.4, 102.9] m/s の速度範囲^(注 2)を等間隔 (約 5.1 m/s ごと) に 9 点に区切り, 両端および区切った速度における平衡点近傍の微小運動を表わす LTI システムを求める.

- (2) EAS をスケジューリングパラメータとしたパラメータ affine な連続時間 LPV システムを最小二乗法により求める.

- (3) 連続時間 LPV システムを, MuPAL- α の搭載計算機の計算周期 0.02 s で Euler 近似により離散化することで, パラメータ affine な離散時間 LPV システムを求める.

Fig. A.1 に, 56.6, 77.2, 97.7 m/s にて得られた機体運動特性を表わす連続時間 LTI システム, および求めた離散時間 LPV システムのスケジューリングパラメータである EAS を V_{true} に固定することで得られる離散時間 LTI システムの $[v_g \ \delta_a \ \delta_r]^T$ から $[v_a \ p \ \phi \ r]^T$ までの Bode 線図を示す. 参考として, 離散時間 LPV システムのスケジューリングパラメータである EAS を $V_{true} \pm 2.5$ m/s に固定した離散時間 LTI システムの Bode 線図も併せて示す. 離散時間 LPV システムが連続時間 LTI システムを完璧に表わしているということはないが, 離散時間 LPV システムが元々の連続時間 LTI システムで表わされる機体運動特性をほぼ表現できていることが確認できる.

[著 者 紹 介]

佐 藤 昌 之 (正会員)

1997 年名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻前期課程修了. 同年科学技術庁航空宇宙技術研究所 (現, (独) 宇宙航空研究開発機構) 入所. 博士 (工学). 現在, 線形行列不等式を用いた制御系設計とその飛行制御への応用, および無人航空機の飛行制御則設計の研究開発に従事.

(注 2) MuPAL- α の最大運用限界速度は 102.9 m/s である.