入出力線形化に基づくクアドロータヘリコプタの適応 H_∞ 追従制御

森 啓 多*・堀 田 克 也**・山 田 学*

Adaptive H_∞ Tracking Control for Quad-rotor Helicopters Based on Input-output Linearization

Keita MORI*, Katsuya HOTTA** and Manabu YAMADA*

This paper considers the problem of controlling both the position and the attitude of a quad-rotor helicopter. The quad-rotor helicopter is described by a set of nonlinear equations and some parameters of the dynamics are subjected to uncertainties. This paper proposes a new input-output linearization method based on an adaptive law, and presents a new adaptive tracking controller with on-line parameter estimation to make the tracking error zero asymptotically for the position and the yaw angle. The design problem of the controller is reduced to that of a linear system, and the design method is simple and straightforward. Moreover, a disturbance sensitivity reduction problem is also solved by applying a standard H_∞ control method. A numerical simulation is performed to evaluate the effectiveness of the proposed controller.

Key Words: quad-rotor helicopter, input-output linearization, adaptive tracking control, H_∞ control

1. 緒 言

クアドロータヘリコプタは、ホバリングや垂直離着陸などにおいて優れた飛行特性を兼ね備えており、物資の輸送や監視、探索、レスキュー活動などさまざまな分野での活躍が期待されている。本研究では、これらの主要技術の一つとして必要とされている、無人ヘリコプタの自動飛行を実現する補償器設計を目的とする。

クアドロータヘリコプタは回転行列などを含む非線形システムであり、その制御手法に関して、数多くの興味深い研究結果が提案されている。文献 1)~5) では、ホバリングを目的とした安定化補償器の設計が提案されている。一方、文献 6)~12) では、機体の位置および機体ヨー角を目標値に漸近追従させる追従補償器が提案されている。これらの設計法は、リアプノフ関数に基づいており、適応制御系も設計されている。特に、文献 6) と文献 10) ではオイラー角表現特有の特異点問題を解決するために、四元数を用いた位置追従補償器が提案されている。

一方、最近では、入出力線形化に基づいた追従補償器の設計法が研究されている^{13)~15)}。この手法の特徴は、ある正則な変換により、クアドロータヘリコプタの非線形システム

の制御問題を、ある簡単な線形時不変システムの制御問題に帰着させている点であり、その結果、従来のよく知られた線形制御理論を応用でき、設計法を単純化できる。その上、追従制御だけでなく、最適制御やロバスト制御など、より高度な制御問題に応用できる可能性をもち、注目されている。しかし、文献 13) の手法は、追従偏差を任意に与えられた正の値（非零）より小さく抑えることはできるが、零への漸近収束性を保証していない。また、文献 14) と文献 15) では、慣性モーメントが不確かな場合について考慮されていない。

本稿では、慣性モーメントが不確かな場合について考察し、入出力線形化に基づいた新しい適応追従補償器の設計法を提案する。本手法の特徴は、まず第一に、パラメータ推定則を組み合わせた入出力線形化手法を用いて、慣性モーメントをオンラインで推定し、同時に、クアドロータヘリコプタの非線形システムの制御問題を、ある簡単な線形時不変システムの制御問題に帰着させている点である。その結果、慣性モーメントをオンラインで推定しながら、クアドロータヘリコプタの位置やヨー角を目標値に漸近追従させる適応追従補償器を与えた。第二に、線形化手法を応用し、並進システムの外乱から位置に関する制御出力までの感度関数の H_∞ ノルムを、ある与えられた値より小さく保証する適応追従補償器の設計法を与えた。設計問題を、ある簡単な線形時不変システムの標準的な H_∞ 制御問題に帰着させ、設計法を単純化している。したがって、提案する補償器により、慣性モーメントが不確かな場合でもクアドロータヘリコプタの位置やヨー角を目標値に漸近追従させ、さらに並進システムの外乱に対する感度の低減を保証できる。第三の特徴は、線形化に用いる変換は、揚力が零でない限り正則であり、特異点をもたな

* 名古屋工業大学大学院工学研究科 名古屋市昭和区御器所町

** 川重岐阜エンジニアリング(株) 各務原市川崎町 2 番地

* Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya

** Kawaju Gifu Engineering Co., Ltd., 2 Kawasaki-cho, Kagamihara

(Received July 3, 2013)

(Revised February 17, 2014)

い点である．この線形化手法を応用すれば，並進速度をオンラインで推定するオブザーバを用いて，並進速度情報を必要としない適応追従補償器の設計も容易である．最後に数値シミュレーションにより，提案法の有効性を実証する．

2. 記号の説明

本稿で用いる主な変数の定義を以下に記述する．

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$	: 地上座標系における重心位置
$\Theta = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$	: 地上座標系における姿勢角度
$\omega = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$	: 機体座標系における回転角速度
$m \in \mathbf{R}^1$	: 機体質量
$J = \text{diag} \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{bmatrix}$	: 慣性モーメント行列
$F \in \mathbf{R}^1$	: 揚力
$\tau_\omega = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^T$	: 機体トルク
$g \in \mathbf{R}^1$	: 重力加速度
$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T$	: 並進システムの外乱
$I_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$	: $n \times n$ の単位行列

3. モデリングと問題の定式化

本章では **Fig. 1** に示すようなクアッドロータヘリコプタのモデリングおよび追従問題の定式化を行なう．ここで， $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ は地上座標軸， $\begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}^T$ は機体座標軸である．

機体重心に加わる揚力 F および機体トルク τ_ω は，各ロータで発生する推力 f_i ($i = 1 \sim 4$) により，つぎのように表わされる．

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i \quad \tau_\omega = \begin{bmatrix} d(f_2 - f_4) \\ d(f_1 - f_3) \\ c \sum_{i=1}^4 (-1)^i f_i \end{bmatrix}$$

ただし， d は機体重心からロータ軸までの距離であり， $c > 0$ は抗力係数である．このとき，クアッドロータヘリコプタの並進システムについて，運動方程式はつぎのように記述される．

Fig. 1 Model of quad-rotor helicopter

$$m\ddot{x} = -(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)F + d_1$$

$$m\ddot{y} = -(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)F + d_2 \quad (1)$$

$$m\ddot{z} = -(\cos \phi \cos \theta)F + mg + d_3$$

ただし外乱 $\mathbf{d}$ は，後述の制御問題で，並進システムにおける外乱から位置偏差までの感度関数を定義するために導入したものである．回転システムについて，幾何学方程式と運動方程式はそれぞれ次式で表わされる．

$$\dot{\Theta} = R_r(\Theta)\omega \quad (2)$$

$$J\dot{\omega} = -C(\omega)J\omega + \tau_\omega \quad (3)$$

ただし，

$$R_r(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

である．

本稿では以下の仮定を設ける．

A1：ロール角およびピッチ角は次式を満たす．

$$-\frac{\pi}{2} < \phi(t) < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

A2：揚力 F は零でない．

クアッドロータヘリコプタの位置の目標値を $\mathbf{X}_d = \begin{bmatrix} x_d(t) & y_d(t) & z_d(t) \end{bmatrix}^T$ ，ヨー角の目標値を $\psi_d(t)$ とおく．本稿では，つぎの問題について考察する．

<制御問題>

慣性モーメント行列 J は未知とする．つぎの条件を満たすフィードバック補償器 F ， τ_ω を求めよ．

P1 (目標値追従)：外乱は零とする ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$)．仮定 A1 を満たす任意の初期状態 $\mathbf{X}(0) \in \mathbf{R}^3$ ， $\Theta(0) \in \mathbf{R}^3$ に対して，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} X(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_d(t) \\ \psi_d(t) \end{bmatrix} \right\| = 0 \quad (7)$$

を満たす．ただし， $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表わす．

P2 (感度低減)： $\mathbf{d}$ から位置偏差 ($\mathbf{X} - \mathbf{X}_d$) までの伝達関数を $\mathbf{G}_d$ とおく．ある与えられた正の定数 γ に対して

$$\|\mathbf{G}_d\|_\infty < \gamma \quad (8)$$

を満たす．ただし， $\|\cdot\|_\infty$ は H_∞ ノルムを表わす．

4. 主 結 果

本章では，上述の「制御問題」を満たす補償器の設計法を与える．4.1 節では，入出力線形化手法にパラメータ推定則を組み合わせることで，慣性モーメントをオンラインで推定し，同時にある変換により，クアッドロータヘリコプタの非線形システムの制御問題を，ある簡単な線形時不変システム

の制御問題に帰着させ、上述の問題 P1 の位置に関する目標値追従補償器を与える。4.2 節では、ヨー角の目標値追従補償器を設計し、4.3 節では、4.1 節の線形化手法を応用し、上述の問題 P2 の感度低減に関する補償器の設計法を与える。

4.1 線形化手法に基づく目標値追従補償器の設計

本節では上記の目標値追従制御問題を、ある簡単な線形システムの制御問題に帰着させる手法について考える。しかし、並進システムの状態方程式は、(1) 式のように姿勢角の三角関数からなる非線形項をもち、しかも回転システムは、(2) 式のように非線形微分方程式を含み制御が難しい。本論文では (3) 式のように、角速度は機体トルク入力により容易に制御できることに着目し、(1) 式の姿勢角の非線形項を新しい状態変数とおき、その時間微分を行なうことで得られる角速度を利用して、角速度から位置までの並進システムを入出力線形化する手法を提案する。その線形化手法を用いれば、設計の際、(2) 式の非線形微分方程式を必要としないため、位置追従制御系の設計を容易にできる。

並進システムの非線形項に関して、つぎの状態変数をおく。

$$\begin{aligned} z_1 &= (1/m)(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)F \\ z_2 &= (1/m)(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)F \\ z_3 &= (1/m)(\cos \phi \cos \theta)F \end{aligned} \quad (9)$$

このとき、(9) 式の時間微分は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = (1/m)G \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{F} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \\ g_1 &= \begin{bmatrix} -F(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \\ -F(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ -F(\sin \phi \cos \theta) \end{bmatrix} \\ g_2 &= \begin{bmatrix} F(\cos \theta \cos \psi) \\ F(\cos \theta \sin \psi) \\ -F(\sin \theta) \end{bmatrix} \\ g_3 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

である。\$\det G = F^2\$ であるため、仮定 A2 より、\$G\$ は正則行列である。そこで、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{F} \end{bmatrix} \quad (12)$$

とおくと、並進システムは、(1)、(9)、(10) および (12) 式より次式で表わされ、\$u_i\$ (\$i = 1, 2, 3\$) から位置 \$\mathbf{X}\$ までのシステムは線形化される。

Fig. 2 Relationship between \$u_i\$ (\$i = 1, 2, 3\$) and \$F, \tau_1, \tau_2\$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -z_1 + (1/m)d_1 \\ \ddot{y} &= -z_2 + (1/m)d_2 \\ \ddot{z} &= -z_3 + g + (1/m)d_3 \\ \dot{z}_1 &= (1/m)u_1 \\ \dot{z}_2 &= (1/m)u_2 \\ \dot{z}_3 &= (1/m)u_3 \end{aligned} \quad (13)$$

つぎに、実際の入力 \$F, \tau_1, \tau_2\$ から \$u_i\$ (\$i = 1, 2, 3\$) までのシステムについて考える。Fig. 2 はその関係を示したものであり、文献 16) のパラメータ推定則により、慣性モーメント行列 \$J\$ を推定する適応制御系を設計する。

まず、任意に与える目標角速度入力 \$\omega_d\$ を

$$\omega_d = \begin{bmatrix} p_d & q_d & r_d \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

とおく。この \$\omega_d\$ と実際の機体角速度 \$\omega\$ との偏差を

$$\mathbf{e}_\omega = \begin{bmatrix} e_p & e_q & e_r \end{bmatrix}^T = \omega - \omega_d \quad (15)$$

とおき、角速度追従偏差と呼ぶ。また、未知パラメータである慣性モーメントからなるベクトルを

$$\varphi = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

と表わし、その推定値からなるベクトルを

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \hat{J}_1(t) & \hat{J}_2(t) & \hat{J}_3(t) \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

とおく。このとき、回転システムについて、つぎの適応制御則を得る。

《補助定理 1》 つぎの適応補償器およびパラメータ推定器を与える。

$$\begin{cases} \tau_\omega = -\Lambda \mathbf{e}_\omega + Y_d(\omega, \omega_d) \hat{\varphi} \\ \dot{\hat{\varphi}} = -\Gamma^{-1} Y_d^T(\omega, \omega_d) \mathbf{e}_\omega \end{cases} \quad (18)$$

ただし、

$$\Lambda > 0, \quad \Gamma = \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$Y_d(\omega, \omega_d) = \begin{bmatrix} \dot{p}_d & -rq & qr \\ rp & \dot{q}_d & -pr \\ -qp & pq & \dot{r}_d \end{bmatrix}$$

である。このとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad (i = p, q, r) \quad (19)$$

を得る。したがって、角速度追従偏差 \$\mathbf{e}_\omega\$ は零へ漸近収束する。(証明) つぎのリアプノフ関数を考える。

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_\omega^T J \mathbf{e}_\omega + \frac{1}{2} \Delta \varphi^T \Gamma \Delta \varphi \quad (20)$$

ただし,

$$\Delta \varphi = \hat{\varphi}(t) - \varphi \quad (21)$$

はパラメータ推定誤差である。(3)式より, $\mathbf{e}_\omega$ は,

$$J \dot{\mathbf{e}}_\omega = J(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d) = \boldsymbol{\tau}_\omega - Y_d(\omega, \omega_d) \varphi \quad (22)$$

であるため,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= -\mathbf{e}_\omega^T \Lambda \mathbf{e}_\omega \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。したがって, (19)式を得る。■

(15)式より, 機体角速度 p および q は,

$$p = p_d + e_p \quad (24)$$

$$q = q_d + e_q$$

であり, さらに,

$$F_d = \dot{F} \quad (25)$$

とおく。 p_d , q_d , F_d は任意に与えられる入力であるので,

$$\begin{bmatrix} p_d \\ q_d \\ F_d \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ u_{d3} \end{bmatrix} \quad (26)$$

とおくと, u_{d1} , u_{d2} および u_{d3} も任意に与えられる入力となる。このとき (12)式は,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} p_d + e_p \\ q_d + e_q \\ F_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ u_{d3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

となる。ただし,

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

であり, (19)式よりこの項は零に漸近収束する。したがって, (13)の並進システムは次式となり, 入力 u_{di} ($i = 1, 2, 3$) から位置 $\mathbf{X}$ までのシステムは線形化された。

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -z_1 + (1/m)d_1 \\ \ddot{y} &= -z_2 + (1/m)d_2 \\ \ddot{z} &= -z_3 + g + (1/m)d_3 \\ \dot{z}_1 &= (1/m)u_{d1} + \bar{e}_1 \\ \dot{z}_2 &= (1/m)u_{d2} + \bar{e}_2 \\ \dot{z}_3 &= (1/m)u_{d3} + \bar{e}_3 \end{aligned} \quad (29)$$

ただし, $\bar{e}_i = (1/m)e_i$ ($i = 1, 2, 3$) である。

つぎに (29)式を用いて, 位置の目標値との追従偏差の状態方程式を導出し, 位置追従偏差システムを与える。位置追従

偏差を次式のようにおく。

$$\begin{cases} e_x = x - x_d \\ e_y = y - y_d \\ e_z = z - z_d \end{cases} \quad (30)$$

さらに, 次式をおく。

$$\begin{cases} z_{d1} = -z_1 - \ddot{x}_d \\ z_{d2} = -z_2 - \ddot{y}_d \\ z_{d3} = -z_3 - \ddot{z}_d \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{d1} = u_{d1} + m\ddot{x}_d \\ \bar{u}_{d2} = u_{d2} + m\ddot{y}_d \\ \bar{u}_{d3} = u_{d3} + m\ddot{z}_d \end{cases} \quad (32)$$

位置追従偏差システムは次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\epsilon} = A\boldsymbol{\epsilon} + B\bar{\mathbf{u}}_d + D\mathbf{d} + \mathbf{d}_0 \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\eta} = C\boldsymbol{\epsilon} \quad (34)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z & \dot{e}_x & \dot{e}_y & \dot{e}_z & z_{d1} & z_{d2} & z_{d3} \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\eta} &= \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}^T \\ A &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_3 \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ -(1/m)I_3 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{u}}_d &= \begin{bmatrix} \bar{u}_{d1} & \bar{u}_{d2} & \bar{u}_{d3} \end{bmatrix}^T \\ D &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & (1/m)I_3 & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{d}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_1 & -\bar{e}_2 & -\bar{e}_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

である。(A, B)は可制御, (A, C)は可観測である。つぎの定理は, 位置および速度を目標値追従させる補償器および状態 $\boldsymbol{\epsilon}$ を推定するオブザーバを与える。

《定理1》 外乱は零とする ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$)。つぎの補償器を与える。

$$\bar{\mathbf{u}}_d = K\boldsymbol{\epsilon} \quad (35)$$

ただし, $K \in \mathbf{R}^{3 \times 9}$ は実定数行列 ($A + BK$) の固有値の実部がすべて負となるように与える。このとき, 任意の初期状態 $\boldsymbol{\epsilon}(0)$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\epsilon}\| = 0 \quad (36)$$

を満たす。また, つぎのオブザーバを与える。

$$\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = A\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + B\bar{\mathbf{u}}_d - L(\boldsymbol{\eta} - C\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (37)$$

ただし, $L \in \mathbf{R}^{9 \times 3}$ は実定数行列 ($A + LC$) の固有値の実部がすべて負となるように与える。このとき, 任意の初期状態

に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon - \hat{\epsilon}\| = 0 \quad (38)$$

を満たす.

(証明) (35) 式の補償器を用いると, (34) 式から, 外乱が零の場合の閉ループシステムは

$$\frac{d}{dt} \epsilon = (A + BK)\epsilon + d_0 \quad (39)$$

であり, (19) 式より (36) 式を満たす. また, (37) 式のオブザーバを用いると, 外乱が零の場合の状態の推定誤差システムは, (33) より,

$$\frac{d}{dt} (\epsilon - \hat{\epsilon}) = (A + LC) (\epsilon - \hat{\epsilon}) + d_0 \quad (40)$$

であり, (19) 式より (38) 式を満たす. ■

4.2 ヨー角の追従制御器の設計

本節では, ヨー角の追従制御器を設計する. ヨー角の目標値は ψ_d である. このとき, ヨー角追従偏差を次式のようにおく.

$$e_\psi = \psi - \psi_d \quad (41)$$

また, (15) 式より,

$$\begin{cases} p = p_d + e_p \\ q = q_d + e_q \\ r = r_d + e_r \end{cases} \quad (42)$$

と表わされる. したがって, 回転システムの幾何学方程式は, (2) 式より,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = R_r(\Theta) \begin{bmatrix} p_d \\ q_d \\ r_d \end{bmatrix} + R_r(\Theta) \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \\ e_r \end{bmatrix} \quad (43)$$

となる. p_d, q_d は定理 1 により設計済みであり, r_d は任意に与えられる入力である. そこで,

$$\begin{bmatrix} u_p \\ u_q \\ u_r \end{bmatrix} = R_r(\Theta) \begin{bmatrix} p_d \\ q_d \\ r_d \end{bmatrix} \quad (44)$$

と置く. このとき, 以下の定理を得る.

《定理 2》 つぎのヨー角追従制御器を与える.

$$u_r = -k_\psi e_\psi + \dot{\psi}_d \quad (45)$$

$$r_d = \frac{1}{\cos \phi} (u_r \cos \theta - q_d \sin \phi) \quad (46)$$

ただし,

$$k_\psi > 0$$

である. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\psi = 0 \quad (47)$$

を得る. したがって, ヨー角追従偏差 e_ψ は零へ漸近収束する.

(証明) (44) 式より, (46) 式を得る. また, ヨー角追従偏差の時間微分は,

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_d \\ &= u_r - \dot{\psi}_d + \frac{1}{\cos \theta} (\sin \phi \cdot e_q + \cos \phi \cdot e_r) \end{aligned} \quad (48)$$

となる. したがって u_r を (45) 式で与えると, (48) 式は次式のようになる.

$$\dot{e}_\psi = -k_\psi e_\psi + \frac{1}{\cos \theta} (\sin \phi \cdot e_q + \cos \phi \cdot e_r) \quad (49)$$

(19) 式, および, 仮定 A1 より $|\theta| < \pi/2$ であるため, e_ψ は零に漸近収束し, (47) 式を得る. ■

4.3 感度低減を考慮した位置追従制御器の設計

本節では, 4.1 節の線形化手法を応用し, 上述の問題 P2 の感度低減に関する補償器の設計法を与える. (35) 式の補償器の下, (33), (34) 式より, 並進システムの外乱 d から位置追従偏差 η までの伝達関数 G_d は

$$G_d = C(sI_9 - A - BK)^{-1} D \quad (50)$$

となる. 定理 1 と定理 2 より, 上述の問題 P1 と P2 を満たす補償器の設計問題は, つぎの二つの条件を満たす状態フィードバックゲイン $K \in \mathbf{R}^{3 \times 9}$ を求める問題に帰着される.

S1: 実定数行列 $(A + BK)$ の固有値の実部がすべて負.

S2:

$$\|C(sI_9 - A - BK)^{-1} D\|_\infty < \gamma \quad (51)$$

つぎの定理は, 上述の問題 P1 と P2 を満たす補償器の簡単な設計法を与える.

《定理 3》 ある与えられた正の定数 γ に対して, 条件 S1 と S2 を満たす状態フィードバックゲイン $K \in \mathbf{R}^{3 \times 9}$ が存在するための必要十分条件は

$$A^T P + P A + P \left(\frac{D D^T}{\gamma^2} - \frac{B B^T}{\delta} \right) P + C^T C < 0 \quad (52)$$

がある適当な正数 δ に対して, 正定解 P をもつことである. またこのとき, 定理 2 の r_d とつぎの補償器

$$\bar{u}_d = K \epsilon \quad (53)$$

ただし,

$$K = -\frac{1}{2\delta} B^T P \quad (54)$$

を用いれば, 問題 P1 と P2 を満たす.

(証明) 文献 17) より, 条件 S1 と S2 を満たす状態フィードバックゲインが存在するための必要十分条件と補償器の設計法は, (52) と (54) 式で与えられる. ■

最後に, 提案する適応制御系をまとめると **Fig. 3** となる. 図中の C1 は補助定理 1, C2 は定理 2, C4 は (26) 式の入力変換を表わす. C3 のブロックの詳細は以下である.

(Step1) (9) 式より z_i ($i = 1, 2, 3$) を与え, (31) 式より位置

Fig. 3 Adaptive tracking control system

追従偏差システムの状態 ϵ を求める.

(Step2) 定理3の(53)式より $\bar{u}_d$ を求める.

(Step3) (32)式より u_{di} ($i = 1, 2, 3$) を与える.

注) 文献12)でも適応制御系が提案されているが, 入出力線形化は考慮されていない. 一方, 文献15)では, Lie微分による入出力線形化手法が示されているが, 文献15)に対する本手法の利点は主に以下のとおりである.

1. 本論文では線形化された拡大系の次数は(33)式のように九つであり, 文献15)の次数12に比べて次数は三つ少ないため, 本論文のほうが補償器の設計が容易である.
2. 本論文の入出力線形化手法は, 慣性モーメントに依存しないというユニークな特徴をもつため, 補助定理1および定理1のように入出力線形化と慣性モーメントの適応制御を同時に達成できる.
3. 文献15)では揚力 F を求める際, 2重積分を含む計算を必要とするが, 本論文ではFig.3の積分を含む計算でよい.

5. シミュレーション

本章では, 提案法の有効性を示すために, シミュレーション結果を示す. 制御対象の物理パラメータ, 初期状態, コントローラの設計パラメータをつぎのように設定した.

・物理パラメータ

$$m = 0.468 \text{ [kg]}, \quad g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$J = \text{diag} \begin{bmatrix} 4.9 \times 10^{-3} & 4.9 \times 10^{-3} & 8.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ [kgm}^2\text{]}$$

・初期状態

$$\begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) & u(0) & v(0) & w(0) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m]} & 0 \text{ [m]} & 0 \text{ [m]} & 0 \text{ [m/s]} & 0 \text{ [m/s]} & 0 \text{ [m/s]} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phi(0) & \theta(0) & \psi(0) & p(0) & q(0) & r(0) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \text{ [rad]} & 0 \text{ [rad]} & 2\pi \text{ [rad]} & 0 \text{ [rad/s]} & 0 \text{ [rad/s]} & 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix} \\ \text{・推定器および追従コントローラの設計パラメータおよび初期値}$$

$$\Gamma = \text{diag} \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.003 & 0.007 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda = \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k_\psi = 1$$

Fig. 4 Gain plot of a sensitivity function on disturbance

Fig. 5 Trajectory of a quad-rotor helicopter (Case 1)

・感度関数の H_∞ ノルムとリカッチ不等式の正定解

$$\gamma = 0.51$$

$$\delta = 0.018$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.742I_{3 \times 3} & 0.961I_{3 \times 3} & 0.291I_{3 \times 3} \\ 0.962I_{3 \times 3} & 0.826I_{3 \times 3} & 0.258I_{3 \times 3} \\ 0.291I_{3 \times 3} & 0.258I_{3 \times 3} & 0.125I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Fig.4は感度関数行列の(1,1)要素のゲイン線図である. 図から, ゲインの最大値は周波数 $\omega = 1.7$ [rad/s] のとき0.509であり, γ より小さいことがわかる.

目標軌跡は螺旋とし, 位置およびヨー角の目標値を以下のように与えた.

$$x_d = 4 \cos(0.3t), \quad y_d = 4 \sin(0.3t), \quad z_d = -0.2t, \quad \psi_d = 0.5t$$

このときの, シミュレーション結果を以下に示す.

Case 1: 外乱 $d = 0$ の場合

Fig.5は目標軌跡およびクアドロータヘリコプタの軌跡を, Fig.6~Fig.11はシステム状態の応答を表わす. これらの図から, 追従偏差および角度偏差は0に漸近収束していることが確認できる. これらの収束速度は, $\Lambda > 0$ などの設計パラメータにより決まり, たとえば $\Lambda > 0$ を小さく選べば, (23)式と(33)式より, 一般的に角速度追従偏差および位置追従偏差の収束速度は遅くなる.

Case 2: 外乱 $d_i = 0.5 \sin(1.7t)$ ($i = 1, 2, 3$) の場合

Fig.12は目標軌跡およびクアドロータヘリコプタの軌跡を, Fig.13, Fig.14は追従偏差の応答を表わす. Fig.4より, この外乱の周波数はピーク周波数であり, 感度関数の周波数応答のゲインを最大化する. Fig.13より, 大きさ0.5の最悪外乱に対する定常状態での制御偏差の変動の大きさは0.2545であり, ゲインの最大値が γ より小さく抑えられており, 外乱の感度低減に関する本手法の有効性を示している.

つぎに, 以下の目標軌跡について考える.

$$x_d = 4 \cos(1.5t), \quad y_d = 4 \sin(1.5t), \quad z_d = -0.2t, \quad \psi_d = 0.5t$$

このときのシミュレーション結果を以下に示す.

Fig. 6 Time responses of ψ (Case 1) Fig. 7 Time responses of η (Case 1) Fig. 8 Time responses of e_ω (Case 1) Fig. 9 Time responses of $\hat{\varphi}$ (Case 1) Fig. 10 Time responses of F (Case 1) Fig. 11 Time responses of τ_ω (Case 1)

Fig. 12 Trajectory of a quad-rotor helicopter (Case 2)

Fig. 13 Time responses of η (Case 2) Fig. 14 Time responses of e_ψ (Case 2) Fig. 15 Time responses of η (Case 3) Fig. 16 Time responses of η (Case 4)

Case 3: 適応制御を行わない場合 (外乱は零)

Fig. 15 は慣性モーメントを推定値の初期値として補償器を設計した際の追従偏差の応答を表わしており、適応制御を行わない場合、追従偏差が残っていることがわかる。

Case 4: 本手法による適応制御を行なう場合 (外乱は零)

Fig. 16 は本手法を用いて補償器を設計した際の追従偏差の応答を表わしており、Fig. 15 と比較をすると、本手法の有効性を示している。

6. 結 言

本稿では、慣性モーメントが未知の下で、4ロータ小型ヘリコプタの目標値追従および感度低減を実現するために、入出力線形化に基づく新しい設計法を提案した。また、シミュレーションにより、提案手法の有効性を示した。

謝辞 査読者の方から有用なご意見をいただきました。本研究の成果の一部は科学研究費補助金基盤研究(C)(25420435)の研究助成によるものです。ここに感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) A. Tayebi and S. McGilcary: Attitude Stabilization of a VTOL Quadrotor Aircraft, IEEE Transaction on Control Systems Technology, **14**-3, 562/571 (2006)
- 2) 小口, 江口, 河合, 山田: 4ロータ小型ヘリコプタの姿勢制御—適応安定化制御と外乱抑制制御—, 第3回プラントモデリング・第12回適応学習制御合同シンポジウム予稿集, 57/62 (2012)
- 3) S. Salazar-Cruz, J. Escareno, D. Lara and R. Lozano: Embedded control system for a four rotor UAV, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, **21**, 189/204 (2007)
- 4) 小池, 横山: 4ロータ小型ヘリコプタの制御, 第48回自動制御連合講演会予稿集, 713/716 (2005)
- 5) A. Tayebi: Unit quaternion observer based attitude stabilization of a rigid spacecraft without velocity measurement, Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control, 1557/1561 (2006)
- 6) 藤本, 横山, 田邊: 空気力学パラメータの不確かさに関する4ロータ小型ヘリコプタのI&I適応制御, 日本機械学会論文集(C編), **77**-782, 179/194 (2011)
- 7) T. Madani and A. Benallegue: Backstepping Control for a Quadrotor Helicopter, Proc. 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 3255/3260 (2006)
- 8) S. Bouabdallah and R. Siegwart: Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor, Proc. 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2259/2264 (2005)
- 9) T. Madani and A. Benallegue: Backstepping Control with Exact 2-Sliding Mode Estimation for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle, Proc. 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 141/146 (2007)
- 10) 藤本, 横山, 田邊: 幾何学的アプローチに基づく4ロータ小型ヘリコプタの位置及び機体ヨー角制御, 日本機械学会論文集(C編), **78**-785, 126/137 (2012)
- 11) T. Madani and A. Benallegue: Adaptive Control via Backstepping Technique and Neural Networks of a Quadrotor Helicopter, Proc. 17th IFAC World Congress, 6513/6518 (2008)
- 12) 堀田, 山田, 大羽: バックステッピング法に基づく4ロータ小型ヘリコプタの適応追従制御, 計測自動制御学会論文集, **50**-2, 177/184 (2014)
- 13) 江口, 山田: 3次元空間移動ロボットの实用追従制御, 第13回計測自動制御学会制御部門大会予稿集, 8B1-2 (2013)
- 14) 森, 山田: 最適制御法に基づいた速度情報を必要としない4ロータ小型ヘリコプタの位置制御, 第13回計測自動制御学会制御部門大会予稿集, 8B1-1 (2013)
- 15) A. Mokhtari, N.K. M'Sirdi, K. Meghrich and A. Belaidi: Feedback linearization and linear observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle, Advanced Robotics, **20**-1, 71/91

(2006)

- 16) 鈴木 隆: アダプティブコントロール, 69/71, コロナ社 (2001)
- 17) 前田, 杉江: アドバンスド制御のためのシステム制御理論, 145/146, 朝倉書店 (1990)

《付 録》

(10) 式の導出過程を示す。まず, (9) 式の両辺を時間微分するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (F/m)[(-\sin\phi\sin\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)\dot{\phi} \\ &\quad + (\cos\phi\cos\theta\cos\psi)\dot{\theta} \\ &\quad + (-\cos\phi\sin\theta\sin\psi + \sin\phi\cos\psi)\dot{\psi}] \\ &\quad + (\dot{F}/m)(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) \\ \dot{z}_2 &= (F/m)[(-\sin\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\phi\cos\psi)\dot{\phi} \\ &\quad + (\cos\phi\cos\theta\sin\psi)\dot{\theta} \\ &\quad + (\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)\dot{\psi}] \\ &\quad + (\dot{F}/m)(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi) \\ \dot{z}_3 &= (F/m)[(-\sin\phi\cos\theta)\dot{\phi} \\ &\quad - (\cos\phi\sin\theta)\dot{\theta}] + (\dot{F}/m)(\cos\phi\cos\theta)\end{aligned}$$

つぎに, (2) 式を上式の $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ に代入し, 整理することで, (10) 式を得る。

[著 者 紹 介]

森 啓 多

2012 年名古屋工業大学工学部機械工学科卒業。同年同大学大学院博士前期課程入学。現在に至る。非ホロノミックシステムの制御と応用に関する研究に従事。

堀 田 克 也

2011 年名古屋工業大学工学部機械工学科卒業。2013 年同大学大学院博士前期課程修了。同年川重岐阜エンジニアリング(株)入社。現在に至る。在学中は非ホロノミックシステムの制御と応用に関する研究に従事。

山 田 学 (正会員)

1988 年名古屋工業大学機械工学科卒業。92 年同大学大学院博士課程修了。博士(工学)。同年名古屋工業大学助手, 2011 年同教授。現在に至る。2003~2004 年カリフォルニア大学バークレー校機械工学科客員研究員。2010 年計測自動制御学会論文賞受賞。飛行ロボット(飛行船やマルチロータヘリコプタなど)や自動車の制御と応用に関する研究に従事。IEEE, 日本機械学会などの会員。