最小射影法による剛体の姿勢安定化制御

畑 山 譽*・中 村 文 一*

Attitude Stabilization of Rigid Body by Using Minimum Projection Method

Takashi HATAYAMA* and Hisakazu NAKAMURA*

An attitude of a rigid body is defined on $SO(3)$; the fact leads to problems on attitude control of a rigid body. We propose a new discontinuous control law for globally asymptotic stabilization of the attitude of the rigid body by minimum projection method. We prove that the system always has Carathéodory solutions under our control method. Moreover, we show an advantage of the proposed method over quaternion-based hybrid feedback.

Key Words: nonlinear control, control Lyapunov function, discontinuous control, rigid body, topology

1. はじめに

剛体の姿勢制御は難しい非線形制御問題の一つとして知られており、その応用は人工衛星、飛行ロボット、水中ロボットなど多岐にわたる^{1)~4)}。剛体の姿勢制御における大きな障害は、回転行列の状態空間である $SO(3)$ の位相幾何学的な複雑さにある。 $SO(3)$ は境界のないコンパクトな多様体であり、どんなベクトル空間とも微分同相でない。このため、特定の姿勢を大域的に漸近安定化する連続で時不変な状態フィードバック制御則は存在しない⁵⁾。

$SO(3)$ に対し、大域的で非特異な最小のパラメータ化である単位クオタニオンがよく用いられる。ところが、単位クオタニオンの状態空間 S^3 は $SO(3)$ の二重被覆である。すなわち、一つの剛体の姿勢に二つの単位クオタニオンが対応する。それゆえ、被覆空間上では非連結な集合を安定化する必要がある、そこに位相幾何学的な障害が存在している⁵⁾。剛体の姿勢フィードバック制御則設計のために単位クオタニオンが多くの研究で用いられているが^{1)~3)}、一つの姿勢を表現する二つの単位クオタニオンから一つの単位クオタニオンを適切に選ぶ必要があった。

剛体の姿勢を漸近安定化する不連続なフィードバック制御則として、Mayhew らのクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法²⁾や Ancona らの Patchy ベクトル場による方法⁶⁾が提案されている。これらの方法は Carathéodory 解の存在を仮定して提案されているが、実際に Carathéodory 解の存在を保証しているものではない。

われわれは論文 7) で剛体の姿勢安定化に対して最小射影法を適用し制御 Lyapunov 関数 (CLF) を設計したが、論文 7) ではサンプル&ホールド解を解として用いている。しかし、サンプル&ホールド解は解析を行なう上で非常に扱いにくいという欠点がある。

本論文では、最小射影法^{7), 8)}を用いて、二つの単位クオタニオンから一つを選ぶことなく剛体の姿勢を目標平衡点へ大域的に漸近安定化させる制御則を提案する。さらにその制御則を用いると制御システムが Carathéodory 解をもつことを保証する。

提案する制御則の応用例として 4 回転翼型飛行ロボットを取り上げ、コンピュータシミュレーションによりその有効性を確認する。

最後に本論文における制御則とクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法²⁾を比較し、両手法の類似性について述べるとともに提案法が $SO(3)$ の要素から単位クオタニオンを得る場合の優位性を明らかにする。

2. 準備

本章では、剛体の姿勢を表わす $SO(3)$ と単位クオタニオンの解説、使用する定義の導入を行なう。

2.1 $SO(3)$ と単位クオタニオン⁹⁾

剛体の姿勢は以下のような 3 次元の特殊直交群 $SO(3)$ の要素で表わす。

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : R^T R = I, \det R = 1\} \quad (1)$$

ここで行列 I は単位行列、 $\det R$ は行列 R の行列式である。

姿勢制御では回転行列 R を単位クオタニオン $q \in S^3$ を用いてパラメータ化する。ここで S^3 は 3 次元球面である。 q のパラメータを以下のように与える。

* 東京理科大学理工学部 野田市山崎 2641

* Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, 2641 Yamazaki, Noda

(Received August 23, 2013)

(Revised February 1, 2014)

$$q = \begin{pmatrix} r_0 \\ r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで $r_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^3$ である. なお, 単位クオタニオンは以下の制限をもつことに注意する.

$$r^T r + r_0^2 = 1 \quad (3)$$

単位クオタニオン q は以下の写像 $\mathcal{R}: S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ によって $\text{SO}(3)$ の要素と関連付けられる.

$$\mathcal{R}(q) = I + 2r_0 S(r) + 2(S(r))^2 \quad (4)$$

ここで $S(r)$ は歪対称行列であり, 次式のように定義される.

$$S(r) = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

多様体 S^3 は $\text{SO}(3)$ の被覆空間であり, $\mathcal{R}: S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ は被覆写像である. したがって, 写像 $\mathcal{R}$ はいたるところで局所的な微分同相写像である. なお, 写像 $\mathcal{R}$ の逆像は集合値写像 $\mathcal{R}^{-1}: \text{SO}(3) \rightarrow 2^{S^3}$ となる. ここで 2^{S^3} は S^3 のべき集合である.

$R \in \text{SO}(3)$ から次式によって単位クオタニオンのパラメータ r が得られる.

$$S(r) = \frac{1}{2\sqrt{1+\text{tr}R}} (R - R^T) \quad (6)$$

ここで $\text{tr}R$ は行列 R のトレースである. r_0 の符号の選び方に自由度があるが, (6) より得られる r および (3) により r_0 が得られる. なお, (6) において $\sqrt{1+\text{tr}R} = 0$ となる場合は文献 10) を参照. 以上の議論より, (3), (6) によって $\mathcal{R}^{-1}$ の中から一つの単位クオタニオンをとる写像 $s: \text{SO}(3) \rightarrow S^3$ が得られる. すなわち, id_{S^3} を S^3 上の恒等写像として $\mathcal{R} \circ s = \text{id}_{S^3}$ が成り立つ. 写像 s は次式のように構成され, s_{r_0} と s_r は単位クオタニオンの各パラメータを指すものとする.

$$s(R) = \begin{pmatrix} s_{r_0}(R) \\ s_r(R) \end{pmatrix} \quad (7)$$

2.2 解と CLF の定義

本論文で用いる定義を以下に記述する.

【定義】(局所 Carathéodory 解) 以下のような常微分方程式のシステムを考える.

$$\dot{x} = f(x) \quad (8)$$

$x(t)$ が区間 $I_t \subset [0, +\infty)$ の任意のコンパクトな部分区間上で絶対連続であり,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{a.e. } t \in I_t \quad (9)$$

を満たすとき, 関数 $x(t)$ を (8) の局所 Carathéodory 解と呼ぶ¹¹⁾. $\square$

【定義】(分解微分) 可微分多様体 X と局所 Lipschitz 関数 $V: X \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. ここで V は $V = \min \{\tilde{V}_a\}$ と書け, $\tilde{V}_a$ は滑らかな関数であるとする. このとき以下の集合値写像 $\tilde{D}V: X \rightarrow 2^{T_x^* X}$ を V の分解微分と呼ぶ.

$$\tilde{D}V(x) = \{d\tilde{V}_a(x) | x \in \{a \in S | V(x) = \tilde{V}_a(x)\}\} \quad (10)$$

ここで $T_x X$ は x における X の接空間であり, $T_x^* X$ は $T_x X$ に対する双対空間である. また $d\tilde{V}_a(x) = \frac{\partial \tilde{V}_a}{\partial x}(x)$ であり, $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ はコンパクト集合である¹²⁾. $\square$

本論文では $\tilde{V}_a$ として, 5 章で導入する $\tilde{V}_+$ と $\tilde{V}_-$ を考えればよい.

【定義】(CLF) 有限次元の弧状連結な C^1 可微分多様体 X 上で定義された以下の非線形制御システムを考える.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (11)$$

ここで, $x \in X$, $u \in \mathcal{U} \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m); t \mapsto u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ であり, $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^m$ への写像の集合とする. 写像 $f: X \otimes \mathcal{U} \rightarrow T_x X$ は x と u に関して連続であり, $f(0, 0) = 0$ を満たす. $\otimes$ は空間の直積を表わす. ここで $0 \in X$ は X 上の目標平衡点である. このとき以下の条件を満たす関数 $V: X \rightarrow \mathbb{R}$ はシステム (11) に対する CLF である¹²⁾.

(B1) V はプロパー: 任意の $L > 0$ に対し $\{x \in X | V(x) \leq L\}$ はコンパクト.

(B2) V は正定: $V(0) = 0$, 任意の $x \in X \setminus \{0\}$ に対し $V(x) > 0$.

(B3) $R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して以下の式を満たすようなコンパクト集合 $\bar{U} \subset \mathcal{U}$, 実正定数 Q , $p(x) \in \tilde{D}V(x)$ である写像 $p: X \rightarrow T_x^* X$ が存在する.

$$\min_{u \in \bar{U}} \langle p(x), f(x, u) \rangle < -Q, \forall x \in \{x \in X | R_1 \leq V(x) \leq R_2\} \quad (12)$$

$\square$

3. 剛体の姿勢安定化問題

本章では, 剛体の姿勢安定化制御における制御システムを示す.

3.1 制御システム

有限次元の弧状連結な C^1 可微分多様体 $X := \text{SO}(3) \otimes \mathbb{R}^3 \ni (R, \Omega)$ を考える. $\otimes$ は前章に示したように空間の直積を表わす. 本論文では, X 上の制御システムとして以下のもの考える²⁾.

$$\dot{R} = R S(\Omega) \quad (13)$$

$$\dot{\Omega} = J^{-1}(-\Omega \times J\Omega) + J^{-1}\tau \quad (14)$$

ここで $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ は剛体固定系 $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ における剛体の姿勢角速度, $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は系 $\mathcal{A}$ における剛体の慣性モーメントを表わす正定対称行列であり, J^{-1} は行列 J の逆行列である. $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$ は入力トルクであり, こ

れをシステムの入力とする.

本論文における制御目的は状態 $(R, \Omega) \in X$ を目標平衡点 $(I, 0) \in X$ に漸近安定化することである.

3.2 リフトしたシステム

本論文では最小射影法により CLF を設計し, CLF を利用した制御系設計を行なう. 最小射影法を適用するため, X 上の制御システム (13)~(14) を単位クオタニオンを用いた多様体 $\tilde{X} := S^3 \otimes \mathbb{R}^3 \ni (q, \tilde{\Omega})$ 上へリフトする. このとき, 以下の定理が成り立つ.

《定理 1》 以下のような写像 $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$ を考える.

$$\eta: \begin{cases} R = I + 2r_0 S(r) + 2S^2(r) \\ \Omega = \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (15)$$

また, 目標平衡点を $((-1, 0), 0) \in \tilde{X}$ とする. このとき, 単位クオタニオンを用いた $\tilde{X}$ 上の制御システムは以下のように得られ, 写像 η は条件 (C1)~(C3) を満たす.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{pmatrix} \dot{r}_0 \\ \dot{r} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r^T \\ r_0 I + S(r) \end{pmatrix} \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{\tilde{\Omega}} = J^{-1}(-\tilde{\Omega} \times J\tilde{\Omega}) + J^{-1}\tau \quad (17)$$

なお, $\tilde{X}$ における制御システムの状態は $(q, \tilde{\Omega})$ である. $\square$

証明. (15) の写像 η が付録 A.1 項の条件 (C1)~(C3) を満たすことを示す.

条件 (C1); (15) より, ある $(R, \Omega) \in X$ に対応する $(q, \tilde{\Omega}) \in \tilde{X}$ が存在する. よって, 写像 η は全射.

条件 (C2); (15) に $\tilde{X}$ 上の目標平衡点 $(q, \tilde{\Omega}) = ((-1, 0), 0)$ を代入すると, $(R, \Omega) = (I, 0)$ を得る. これは X 上の目標平衡点であるため, 条件 (C2) が成り立つ.

条件 (C3); 2.1 節より $SO(3)$ と S^3 空間は局所的に微分同相である. よって条件 (C3) が成り立つ.

以上より, 写像 η は $\tilde{X}$ 上の制御システムを得るための写像の条件 (C1)~(C3) をすべて満たす. ゆえに (A.3) に従って, $\tilde{X}$ 上の制御システム (16)~(17) が得られる. $\blacksquare$

$\tilde{X}$ 上の制御システム (16)~(17) における可微分関数を用いて, もとの X 上の制御システム (13)~(14) を漸近安定化する大域的な微分不可能 CLF を最小射影法により設計する.

なお, $\Omega = \tilde{\Omega}$ であるため, 以降の議論では Ω と $\tilde{\Omega}$ を同一視して扱う.

4. 剛体姿勢の大域安定化制御

本章では, 主結果をまとめる. ここでは結果のみを示し, 後章にて証明を与える.

X 上の制御システム (13)~(14) に対する CLF について, 以下の定理が成り立つ.

《定理 2》 以下のような $\tilde{X}$ 上の可微分関数 $\tilde{V}$ を考える^{1), 2)}.

$$\tilde{V}(q, \Omega) = 2\alpha(r_0 + 1) + \frac{1}{2}(\Omega - \Gamma_1 r)^T J(\Omega - \Gamma_1 r) \quad (18)$$

ここで α は正のパラメータ, Γ_1 は 3×3 の正定対称行列である. このとき, 次式で定義される V は X 上の CLF である.

$$V(\eta(q, \Omega)) = \min_{q \in \mathcal{R}^{-1}(R)} \tilde{V}(q, \Omega) \quad (19)$$

$\square$

(18) の CLF は S^3 上の単位クオタニオンによる制御で一般的に用いられる CLF である^{1), 2)}.

X 上の制御システム (13)~(14) に対する制御則について, 以下の定理が成り立つ.

《定理 3》 制御システム

$$\begin{aligned} \dot{R} &= RS(\Omega) \\ \dot{\Omega} &= J^{-1}(-\Omega \times J\Omega) + J^{-1}\tau \end{aligned}$$

を考える. このとき制御則

$$\begin{aligned} \tau(s(R), \Omega) &= -\beta(V(\eta(q, \Omega))) (\Omega - \Gamma_1 r) \\ &\quad + \Omega \times J\Omega + J\Gamma_1 \dot{r} + \alpha r \end{aligned} \quad (20)$$

$$q = \begin{pmatrix} r_0 \\ r \end{pmatrix} = \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{R}^{-1}(R)} \tilde{V}(q, \Omega) \quad (21)$$

は状態 (R, Ω) を目標平衡点 $(I, 0)$ に Carathéodory 解の意味で大域的に漸近安定化する. ただし, β は任意の正の関数である. $\square$

5. 各定理の証明

本章では, 各定理の証明を行なう.

5.1 定理 2 の証明

制御システム (13)~(14) を CLF の定義に合わせて以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\Omega} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} RS(\Omega) \\ J^{-1}(-\Omega \times J\Omega) + J^{-1}\tau \end{pmatrix} \\ &= f((R, \Omega), \tau) \end{aligned} \quad (22)$$

このとき, CLF の定義における状態 $x = (R, \Omega)$, 入力 $u = \tau$ のように対応する.

定理 2 の証明. (19) の V が CLF の定義を満たすことを証明する.

(B1); (18)~(19) より $V \geq 0$ であるので, 任意の $L > 0$ に対して $\{(R, \Omega) \in X | 0 \leq V(\eta(q, \Omega)) \leq L\}$ を考えればよい. この集合は明らかにコンパクトである. よって, V はプロパー.

(B2); 目標平衡点 $(I, 0) \in X$ は写像 $\mathcal{R}^{-1}$ によって $((-1, 0), 0), ((1, 0), 0) \in \tilde{X}$ に対応する. (18)~(19) より, $V(I, 0) = 0$ であり, 任意の $(R, \Omega) \in X \setminus \{(I, 0)\}$ に対して $V(R, \Omega) > 0$ となることは明らか. よって, V は正定である.

(B3); 関数 V は $\tilde{V}$ の最小値から構成されるため, $\tilde{V}$ につ

いて考える. 今, $R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の R_1, R_2 に対して (12) を考えるため, 目標平衡点である $(I, 0) \in X$ とそれに対応する状態 $((-1, 0), 0), ((1, 0), 0) \in \tilde{X}$ は考慮しなくてよい. $\dot{V}$ の時間微分を $\dot{\tilde{V}}$ とすれば, (16)~(17) より以下のように計算される.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}(q, \Omega) &= -\alpha r^T \Omega + (\Omega - \Gamma_1 r)^T (-\Omega \times J \Omega) \\ &\quad - (\Omega - \Gamma_1 r)^T J \Gamma_1 \dot{r} + (\Omega - \Gamma_1 r)^T \tau \\ &=: \mathcal{F}(q, \Omega) + \mathcal{G}(q, \Omega) \tau\end{aligned}\quad (23)$$

ここで入力 τ を以下のように選ぶ.

$$\tau = -(\Omega - \Gamma_1 r) + \Omega \times J \Omega + J \Gamma_1 \dot{r} + \alpha r \quad (24)$$

(24) の τ を (23) に代入すると, $\dot{\tilde{V}}$ は以下のように得られる.

$$\dot{\tilde{V}}(q, \Omega) = -(\Omega - \Gamma_1 r)^T (\Omega - \Gamma_1 r) - \alpha r^T \Gamma_1 r \quad (25)$$

(25) より, $((-1, 0), 0), ((1, 0), 0) \in \tilde{X}$ を除いて $\dot{\tilde{V}} < 0$ が成り立つ. (12) ではとり得る $\dot{\tilde{V}}$ のうち最小の $\dot{\tilde{V}}$ を考えるため, 上の議論より, (12) を満たす入力 τ , 実正定数 Q , 写像 p が存在する. そのとき, $B \ni \tau$ となる閉球 $B \in \mathbb{R}^3$ を考えれば, これはコンパクト集合 $\bar{U}$ に相当する. 以上より, 条件 (B3) は満たされた.

したがって, (19) の V は CLF の定義を満たすため, X 上の CLF となる. ■

5.2 定理 3 の証明

定理 3 の証明にあたって, 制御則 (20)~(21) を使うと局所 Carathéodory 解が存在することを示す. すなわち, 以下の命題を証明する.

[命題] 制御則

$$\begin{aligned}\tau(s(R), \Omega) &= -\beta(V(\eta(q, \Omega))) (\Omega - \Gamma_1 r) \\ &\quad + \Omega \times J \Omega + J \Gamma_1 \dot{r} + \alpha r \\ q &= \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{R}^{-1}(R)} \tilde{V}(q, \Omega)\end{aligned}$$

を考える. このとき制御システム

$$\begin{aligned}\dot{R} &= RS(\Omega) \\ \dot{\Omega} &= J^{-1}(-\Omega \times J \Omega) + J^{-1} \tau\end{aligned}$$

は局所 Carathéodory 解をもつ. □

制御則 (20) は (21) による q の切り替えが起こらなければ滑らかな関数であり, そのとき制御システム (13)~(14) は局所 Carathéodory 解をもつ. ゆえに, 以下では (21) による q の切り替え時刻に着目する. 命題の証明のために以下の補題 1, 補題 2 を用意する.

[補題 1] $I_c \subset [0, +\infty)$ を任意のコンパクトな時間区間とする. このとき

$$q = \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{R}^{-1}(R)} \tilde{V}(q, \Omega)$$

による q の切り替え時刻を $t_i \in I_c \subset [0, +\infty)$ ($i \in A \subset \mathbb{N}$)

とおく.

このとき, 集合 A は空もしくは有限集合となる. □

一つの回転行列 $R \in SO(3)$ に二つの単位クオタニオン $s(R), -s(R) \in S^3$ が対応するので, (18) には二通りの単位クオタニオンが代入できる. 以降の議論ではそれぞれの単位クオタニオンを代入した $\tilde{V}$ に以下のように便宜上 $\tilde{V}_+$, $\tilde{V}_-$ と名前を付ける.

$$\begin{aligned}\tilde{V}_+(R, \Omega) &= 2\alpha(s_{r_0}(R) + 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T J (\Omega - \Gamma_1 s_r(R))\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_-(R, \Omega) &= 2\alpha(-s_{r_0}(R) + 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T J (\Omega + \Gamma_1 s_r(R))\end{aligned}\quad (27)$$

制御則についても (20) に代入できる二通りの単位クオタニオンを考え, それぞれに便宜上 τ_+ , τ_- と名前を付ける.

$$\begin{aligned}\tau_+(R, \Omega) &= -\beta(\tilde{V}_+(R, \Omega)) (\Omega - \Gamma_1 s_r(R)) \\ &\quad + \Omega \times J \Omega + J \Gamma_1 \dot{s}_r(R) + \alpha s_r(R)\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\tau_-(R, \Omega) &= -\beta(\tilde{V}_-(R, \Omega)) (\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) \\ &\quad + \Omega \times J \Omega - J \Gamma_1 \dot{s}_r(R) - \alpha s_r(R)\end{aligned}\quad (29)$$

補題 1 の証明. (21) において q の切り替えは

$$\tilde{V}_+(R(t_i), \Omega(t_i)) = \tilde{V}_-(R(t_i), \Omega(t_i)) \quad (30)$$

を満たすある時間 $t_i \in A$ で起こる. コンパクト区間 I_c 内でこの時間 t_i から微小時間内で無限回の q の切り替えが起こらなければ, コンパクト区間 I_c 内の q の切り替え時刻を要素とする集合 $A \ni t_i$ は空もしくは有限集合となる.

今, (21) により選択される単位クオタニオンが $s(R)$ から $-s(R)$ へ切り替わった時刻 t_i に着目し, その t_i から微小時間 δt が経過した時間 $t_i + \delta t$ を考える. この微小時間内で q の切り替えが再び起こる場合は以下の条件が満たされる.

$$\tilde{V}_{-, \tau_-}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) > \tilde{V}_{+, \tau_+}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \quad (31)$$

ここで下付きの τ_- は使用する制御則を表わす. $\tilde{V}_{+, \tau_-}$ と $\tilde{V}_{-, \tau_-}$ はそれぞれ以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{+, \tau_-}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \\ = \tilde{V}_{+, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) + \dot{\tilde{V}}_{+, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) \delta t \\ = \tilde{V}_+(R(t_i), \Omega(t_i)) \\ + (\mathcal{F}_+(R(t_i), \Omega(t_i)) + \mathcal{G}_+(R(t_i), \Omega(t_i)) \tau_-) \delta t\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{-, \tau_-}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \\ = \tilde{V}_{-, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) + \dot{\tilde{V}}_{-, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) \delta t \\ = \tilde{V}_-(R(t_i), \Omega(t_i))\end{aligned}$$

$$+ (\mathcal{F}_-(R(t_i), \Omega(t_i)) + \mathcal{G}_-(R(t_i), \Omega(t_i)) \tau_-) \delta t \quad (33)$$

ここで $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ の下付きの $+$, $-$ は $\tilde{V}_+$ と $\tilde{V}_-$ の表記に従う. (32) と (33) を (31) に代入すると以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_{-, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) + \dot{\tilde{V}}_{-, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) \delta t \\ & > \tilde{V}_{+, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) + \dot{\tilde{V}}_{+, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) \delta t \end{aligned} \quad (34)$$

(30) を満たす t_i の微小時間近傍で考えているため (30) の関係が成り立つこと, $\delta t > 0$ であることより, (34) は以下のように変形できる.

$$\dot{\tilde{V}}_{+, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) - \dot{\tilde{V}}_{-, \tau_-}(R(t_i), \Omega(t_i)) < 0 \quad (35)$$

同様にして, (21) で単位クオタニオンが $-s(R)$ から $s(R)$ に切り替わる時刻 t_i の微小時間内で q が再び切り替わる条件は

$$\tilde{V}_{+, \tau_+}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) > \tilde{V}_{-, \tau_+}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \quad (36)$$

である. 上記と同様の手順をたどれば (36) の条件は以下のように変形できる.

$$\dot{\tilde{V}}_{-, \tau_+}(R(t_i), \Omega(t_i)) - \dot{\tilde{V}}_{+, \tau_+}(R(t_i), \Omega(t_i)) < 0 \quad (37)$$

以上をまとめると, (35) と (37) の条件式が同時に満たされることがなければ, q の切り替え時刻 t_i の微小時間内で無限回の q の切り替えは生じない.

(26)~(29) より, $\dot{\tilde{V}}_{+, \tau_-}$, $\dot{\tilde{V}}_{-, \tau_-}$, $\dot{\tilde{V}}_{+, \tau_+}$, $\dot{\tilde{V}}_{-, \tau_+}$ を以下のようを得る.

$$\begin{aligned} & \dot{\tilde{V}}_{+, \tau_-}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \\ & = -(\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_-(R, \Omega)) (\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) \\ & \quad - \alpha s_r^T(R) \Gamma_1 s_r(R) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\tilde{V}}_{-, \tau_-}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \\ & = -(\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_-(R, \Omega)) (\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) \\ & \quad - \alpha s_r^T(R) \Gamma_1 s_r(R) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\tilde{V}}_{+, \tau_+}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \\ & = -(\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_+(R, \Omega)) (\Omega - \Gamma_1 s_r(R)) \\ & \quad - \alpha s_r^T(R) \Gamma_1 s_r(R) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\tilde{V}}_{-, \tau_+}(R(t_i + \delta t), \Omega(t_i + \delta t)) \\ & = -(\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_+(R, \Omega)) (\Omega - \Gamma_1 s_r(R)) \\ & \quad - \alpha s_r^T(R) \Gamma_1 s_r(R) \end{aligned} \quad (41)$$

(38)~(41) を (35) と (37) の条件式に代入し, それぞれを以下のように得る.

$$-(\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_-(R, \Omega)) (\Omega + \Gamma_1 s_r(R))$$

$$+ (\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_-(R, \Omega)) (\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) < 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & -(\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_+(R, \Omega)) (\Omega - \Gamma_1 s_r(R)) \\ & + (\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T \beta (\tilde{V}_+(R, \Omega)) (\Omega - \Gamma_1 s_r(R)) < 0 \end{aligned} \quad (43)$$

今, (30) が成り立つため以下のようにおく.

$$B := \beta (\tilde{V}_-(R, \Omega)) = \beta (\tilde{V}_+(R, \Omega)) \quad (44)$$

ここで $B \geq 0$ は定数である. (42) と (43) の両辺をそれぞれ足すと

$$\begin{aligned} & B [(\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T (\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) \\ & - 2(\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T (\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) \\ & + (\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T (\Omega - \Gamma_1 s_r(R))] \\ & < 0 \end{aligned} \quad (45)$$

を得る. さらに (45) の左辺を式変形して以下の式を得る.

$$B \|(\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) - (\Omega - \Gamma_1 s_r(R))\|^2 < 0 \quad (46)$$

ここで $\|\cdot\|$ は行列のノルムである. 明らかに ((46) の左辺) ≥ 0 であるため, (46) は成立しない. すなわち, (35) と (37) の条件式が同時に成立することはない.

さらに切り替え時刻 t_i から δt だけ前の時間を考える場合でも同じ議論ができるため, Zeno 軌道¹³⁾のような現象が起こることはない.

ゆえに, コンパクト区間 I_c 内の q の切り替え時刻 $t_i \in I_c$ の微小時間内で無限回の q の切り替えは起こらず, 集合 A は空もしくは有限集合となる. ■

[補題 2] 目標平衡点 $(q, \tilde{\Omega}) = ((-1, 0), 0)$ の十分小さい近傍では

$$q = \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{R}^{-1}(R)} \tilde{V}(q, \Omega)$$

による q の切り替えは起こらない. □

証明. (21) における q の切り替えは (30) を満たす時間 t_i で起こる. (30) に (26)~(27) の $\tilde{V}_+$ と $\tilde{V}_-$ を代入して計算すると, 以下の式を得る.

$$s_{r0}(R) = \frac{1}{2\alpha} \Omega^T J \Gamma_1 s_r(R) \quad (47)$$

目標平衡点 $(q, \tilde{\Omega}) = ((-1, 0), 0)$ の十分小さい近傍では (47) の左辺は 1 に, 右辺は 0 に十分近い値をとる. したがって (47) の等号は成立せず, (30) は成り立たない. ゆえに, 目標平衡点 $(q, \tilde{\Omega}) = ((-1, 0), 0)$ の十分小さい近傍では (21) による q の切り替えは起こらない. ■

次いで, 命題の証明を行なう.

命題の証明. 制御システム (13)~(14) の状態 $(R(t), \Omega(t))$ を $x(t)$ とする. (21) に従って単位クオタニオンの $s(R)$ か $-s(R)$ のどちらかが選択されている時間区間を考えると, $x(t)$

は連続な関数であるため積分関数として書き表わせる．また， q を切り替えるある時間 t_i を含む時間区間においても，積分関数の存在は被積分関数の連続性には依存しないため $x(t)$ は積分関数として書き表わせる．したがって $x(t)$ が積分関数で書き表わせるため， $I_t \in [0, \infty)$ の任意のコンパクトな部分区間において $x(t)$ は絶対連続である¹⁴⁾．

補題 1 より，切り替え時刻 t_i の集合 A は空もしくは有限集合である．また補題 2 より，目標平衡点に十分近づいた時間 $t \in [0, +\infty)$ では q の切り替えは起こらない．よって q の切り替え回数は有限回であり，時間 $t \in [0, +\infty) \setminus A$ を考えることで (9) が成立する．

ゆえに Carathéodory 解の定義より，制御システム (13)～(14) は Carathéodory 解をもつ．

最後に定理 3 を証明する．

定理 3 の証明．命題より， X 上の制御システム (13)～(14) は Carathéodory 解をもつため，Lyapunov 関数の存在により状態の漸近安定性を議論できる．すなわち，制御則 (20)～(21) を使用するとき (19) が Lyapunov 関数になれば定理 3 は証明される．

定理 2 より V は CLF である．制御則として (20)～(21) を用いることはすなわち， $\tilde{V}_+$ に対して τ_+ を， $\tilde{V}_-$ に対して τ_- を使用することである．その場合 (39)～(40) より， X 上の目標平衡点 $(I, 0)$ に対応する $\tilde{X}$ 上の平衡点 $((-1, 0), 0)$ ， $((1, 0), 0)$ を除いて， $\dot{\tilde{V}}_+ < 0$ ， $\dot{\tilde{V}}_- < 0$ が成り立つ．状態 $((-1, 0), 0)$ ， $((1, 0), 0)$ においては (21) によって $((-1, 0), 0)$ が選択されるため，状態が平衡点 $((1, 0), 0)$ に留まることはない．また補題 1 より q の切り替えが無限回起こることはないため， V は時間 t に対して狭義単調減少となる．したがって，制御則 (20)～(21) を用いると (19) の V は Lyapunov 関数になる⁷⁾．

以上より，制御則 (20)～(21) は制御システム (13)～(14) の状態を目標平衡点 $(R, 0)$ へ大域的に漸近安定化する．

6. シミュレーション

本章ではコンピュータシミュレーションの結果により制御則 (20)～(21) の有効性を確認する．

応用例として Fig. 1 のような 4 回転翼型飛行ロボットを考える．ゲインはそれぞれ $\Gamma_1 = I$ ， $\alpha = 1$ に設定し， $\beta(V(q, \Omega)) = 0.25$ と設定する．初期姿勢角度と初期姿勢角速度はそれぞれ $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)$ Deg， $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (6/5\sqrt{2}, -8/5\sqrt{2}, \sqrt{2})$ Deg/sec とする²⁾．オイラー角から回転行列 R への変換， R からオイラー角への変換は文献 15) に従う．また，4 回転翼型飛行ロボットの慣性モーメントは $J = \text{diag}(4.35, 4.33, 3.664)$ と与える²⁾．

Fig. 2～Fig. 4 に，オイラー角による機体の姿勢角度，角速度，入力 τ の二乗平均の時間変化をそれぞれ示す．

Fig. 2 から，姿勢角度が $(0, 0, 0)$ Deg へと収束していることが確認できる．さらに Fig. 3 は機体の角速度が 0 Deg/sec

Fig. 1 Four-rotor aerial robot

Fig. 2 Angles

へ収束していることを示している．これらの結果より，剛体の姿勢安定化という目標に対する提案法の有効性が確認できたといえる．

7. 提案法とクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法の比較

本章では提案法とクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法²⁾を比較し，両手法の類似性と提案法の優位性を明らかにする．

7.1 二つの手法の考え方の違い

提案法とクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法は $SO(3)$ の要素からの単位クオタニオンの取得の仕方， S^3 空間における単位クオタニオンの扱い方が異なる．前者は $SO(3)$ の要素から得た二つの単位クオタニオンを両方考え，一つの目標平衡点へ向かう CLF を一つ設計する．一方で後者は二つの単位クオタニオンから一つを適切に選んでその単位クオタニオンから二つの平衡点へ向かう CLF をそれぞれ設計し，閾値との大小関係に応じて使用する CLF を選択する．Fig. 5 に S^3 空間におけるそれぞれの CLF 設計法の概略図を示す．

Fig. 3 Angular velocity

Fig. 4 Mean square of the input τ

7.2 クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法²⁾

制御システムの状態には単位クオタニオン $q \in S^3$, 角速度 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ に加えて, 目標平衡点を切り替えるための状態 $h(t) : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ を考える. 現在の姿勢を表現する単位クオタニオンは $s(R)$ のみを考え, CLF を以下のように設計する.

$$\begin{aligned} \hat{V}(R, \Omega, h) = & 2\alpha(1 - hs_{r_0}(R)) \\ & + \frac{1}{2}(\Omega + h\Gamma_1 s_r(R))^T J(\Omega + h\Gamma_1 s_r(R)) \end{aligned} \quad (48)$$

(48) に代入する h により目標平衡点の切り替えが行なわれる. 実際 $h = 1$ を代入すれば平衡点 $(1, 0) \in S^3$ へ, $h = -1$ を代入すれば平衡点 $(-1, 0) \in S^3$ へ向かう CLF が得られる. 便宜上, それぞれの CLF に $\hat{V}_\alpha$, $\hat{V}_\beta$ と名前を付ける.

さらに二つの CLF の差を以下の式のように得る.

$$\begin{aligned} \hat{V}_\beta(R, \Omega, h) - \hat{V}_\alpha(R, \Omega, h) \\ = & 4ah \left(s_{r_0}(R) - \frac{1}{2\alpha} \Omega^T J \Gamma_1 s_r(R) \right) \\ = & 4ah\Phi(R, \Omega) \end{aligned} \quad (49)$$

Fig. 5 CLF design on the two methods

ここで $\Phi(R, \Omega) = s_{r_0}(R) - \frac{1}{2\alpha} \Omega^T J \Gamma_1 s_r(R)$ とした. h の値は以下の式に従って決定する.

$$h(t) = \begin{cases} 1 & (\Phi \geq -\delta) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow +0} h(t - \Delta t) & (-\delta < \Phi < \delta) \\ -1 & (\Phi \leq \delta) \end{cases} \quad (50)$$

ここで $\delta \in (0, 1)$ であり, Δt は微小時間を表わす. 後の議論のために h を代入した後の (48) を以下に示す.

$$\begin{aligned} \hat{V}_\alpha(R, \Omega, h = 1) \\ = & 2\alpha(1 - s_{r_0}(R)) + \frac{1}{2}(\Omega + \Gamma_1 s_r(R))^T J(\Omega + \Gamma_1 s_r(R)) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_\beta(R, \Omega, h = -1) \\ = & 2\alpha(1 + s_{r_0}(R)) + \frac{1}{2}(\Omega - \Gamma_1 s_r(R))^T J(\Omega - \Gamma_1 s_r(R)) \end{aligned} \quad (52)$$

7.3 二つの方法の比較

クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法²⁾において $\delta = 0$ とする場合を考える. クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法の手法に沿って $\hat{V}_\beta - \hat{V}_\alpha$ を考えれば, 以下の条件に従って使用する CLF が決定される.

- $\hat{V}_\beta - \hat{V}_\alpha \geq 0$ のとき, $\hat{V}_\alpha$ を採用する.
- $\hat{V}_\beta - \hat{V}_\alpha < 0$ のとき, $\hat{V}_\beta$ を採用する.

条件式を式変形すると, CLF の選択条件は以下のように書き換えられる.

- $\hat{V}_\beta \geq \hat{V}_\alpha$ のとき, $\hat{V}_\alpha$ を採用する.
- $\hat{V}_\beta < \hat{V}_\alpha$ のとき, $\hat{V}_\beta$ を採用する.

さらに, (26), (27), (51), (52) より, $\tilde{V}_+$ と $\tilde{V}_\beta$, $\tilde{V}_-$ と $\tilde{V}_\alpha$ がそれぞれ同じ形の式であることは明らかである. ゆえに, 上記の CLF の選択条件を $\tilde{V}_+$ と $\tilde{V}_-$ を用いて書き直せば以下のように得られる.

- $\tilde{V}_+ \geq \tilde{V}_-$ のとき, $\tilde{V}_-$ を採用する.
- $\tilde{V}_+ < \tilde{V}_-$ のとき, $\tilde{V}_+$ を採用する.

すなわち, 使用する CLF を $\tilde{V}$ とすれば以下のように与えられる.

$$\tilde{V} = \min\{\tilde{V}_+, \tilde{V}_-\} \quad (53)$$

$\tilde{V}_+$ と $\tilde{V}_-$ は代入する単位クオタニオンによって便宜的に名付けられたことを踏まえれば, (53) によって決定される $\tilde{V}$ は (19) の CLFV と同じ形の式であることがわかる. つまり, 単層の最小射影法によって設計される CLF と $\delta = 0$ の場合のクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法によって設計される CLF は同じ形で得られる.

7.4 比較シミュレーション

シミュレーションの結果により, クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法に対する提案法の優位性を明らかにする. 応用例として 6 章と同様のゲイン, 初期状態, 機体の慣性モーメントを用いる. また $\delta = 0$ とする.

Fig. 6 に提案法, Fig. 7 にクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法によるシミュレーション結果を示す. Fig. 6 より, 提案法では状態として用いる単位クオタニオンを二回切り替えているようすが確認できる. 一方, Fig. 7 のクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法では扱う単位クオタニオンが切り替わることなく漸近安定している. この違いが提案法の優位性となる. すなわち, クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法は片方の単位クオタニオンのみを扱い続けるため, 直前はどちらの単位クオタニオンを用いたのかを保存しておき単位クオタニオンが連続性を保つように計算する必要がある. その一方で提案法は, 回転行列から得られる単位クオタニオンを両方考えるため単位クオタニオンの連続性を考える必要がない. このような違いが実装における計算量の違いを生み, 特に計算量が限定される人工衛星などの制御に対して提案法はより有効であるといえる.

8. 結 論

われわれは剛体の姿勢を目標平衡点へ大域的に漸近安定化する不連続なフィードバック制御則を最小射影法により提案した. さらに, この制御則が制御システムの状態を Carathéodory 解の意味において大域的に漸近安定化することを証明した. 応用例として 4 回転翼型飛行ロボットを取り上げ, コンピュータシミュレーションによって提案した制御則の有効性を確認した. また, 最小射影法によって設計される CLF とクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法によって設計される CLF が同じ形で得られること, 提案法はクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法に比べ計算量の削減という点で優位性をもつことを明らかにした. また二つの方法の比較により, クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法は δ の分だけオフセットを設けた最小射影法であることが明らかになり, クオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法の大域的な関数構造がより明瞭になった. しかし, 提案法はクオタニオンベースド・ハイブリッドフィードバック法に比べて測定誤差のロバスト性が弱くなってしまっているが, これはオフセットを設けた最小射

Fig. 6 Quaternion (proposed method)

Fig. 7 Quaternion (hybrid feedback method)

影法を適用することで解消できると思われる. これは今後の課題とする.

本論文では剛体姿勢の安定化制御のみを考えたが, 剛体の姿勢にかかわる制御には軌道追従制御や, 外乱が存在するときの適応制御などさまざまな展開が考えられる. これらも今後の課題である.

謝辞 本研究は JSPS 科研費基盤研究 (B)23360185 の助成を受けたものである.

参 考 文 献

- 1) A. Tayebi and S. McGilvray: Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 1216/1221 (2004)
- 2) C.G. Mayhew, R.G. Sanfelice and A.R. Teel: Robust global asymptotic attitude stabilization of a rigid body by quaternion-based hybrid feedback, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, 2522/2527 (2009)
- 3) J.S. Hall, M. Romano and R. Cristi: Quaternion Feedback Regulator for Large Angle Maneuvers of Underactuated Spacecraft, American Control Conference, 2867/2872 (2010)
- 4) J. Che, J. Cernio, J. Prainito, M. Zuba, C. Cao, J. Cui and K. Kazerounian: An Advanced Autonomous Underwater Vehicle Design and Control Strategy, Oceans, 14/19 (2012)
- 5) S.P. Bhat and D.S. Bernstein: A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon, Systems & Control Letters, 39-1, 63/70 (2000)

- 6) F. Ancona and A. Bressan: Patchy Vector Fields and Asymptotic Stabilization, ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 445/471 (1999)
- 7) H. Nakamura and N. Nakamura: Multilayer Minimum Projection Method with singular point assignment for nonsmooth control Lyapunov function design, Asian Journal of Control, 2-15, 340/349 (2013)
- 8) H. Nakamura, T. Yamashita and H. Nishitani: Minimum Projection Method for nonsmooth control Lyapunov function design on general manifolds, Systems & Control Letter, 58-10-11, 716/723 (2009)
- 9) C.G. Mayhew, R.G. Sanfelice and A.R. Teel: On Path-Lifting Mechanisms and Unwinding in Quaternion-Based Attitude Control, IEEE Transactions on Automatic Control, 58-5, 1179/1191 (2013)
- 10) J.J. Craig: Introduction to Robotics Mechanics and Control, 3rd Edition, 41/46, Pearson Prentice Hall (2005)
- 11) A. Bacciotti and L. Rosier: Liapunov Functions and Stability in Control Theory, 2nd Edition, 2/3, Springer (2005)
- 12) H. Nakamura, T. Tsuzuki, Y. Fukui and N. Nakamura: Asymptotic Stabilization with Locally Semiconcave Control Lyapunov Function on General Manifolds, Systems & Control Letter, 62, 902/909 (2013)
- 13) K.H. Johansson, M. Egerstedt, J. Lygeros and S. Sastry: On the regularization of Zeno hybrid automata, Systems & Control Letter, 38-3, 141/150 (1999)
- 14) 柴垣和三雄: ルベーク積分入門, 122, 森北出版 (1979)
- 15) F. Dunn and I. Parberry: 3D Math Primer for Graphics and Game Development, Wordware Publishing (2002)

《付 録》

A. 単層の最小射影法

A.1 準備

【可微分多様体】

可微分多様体上で定義される制御システムを考える。\$X\$ を滑らかな多様体、\$T_p X\$ を \$X\$ の点 \$p\$ における接空間と呼ばれるベクトル空間とする。また、\$T_p X\$ の要素を点 \$p\$ における接ベクトルと呼ぶ。\$X\$ は有限次元であり、\$d_X\$ は \$X\$ の次元を表わすと仮定する。滑らかな二つの多様体 \$X\$ と \$\tilde{X}\$、および二つの多様体間の滑らかな写像 \$\eta: \tilde{X} \rightarrow X\$ を考える。このとき、任意の \$\tilde{p} \in \tilde{X}\$ に対する写像 \$\eta_*: T_{\tilde{p}} \tilde{X} \rightarrow T_{\eta(\tilde{p})} X\$ を \$\eta\$ の微分と呼ぶ。

\$\tilde{p} \in \tilde{X}\$、\$\eta(\tilde{p}) \in X\$ を考える。\$\tilde{p}\$、\$p\$ における \$\tilde{X}\$、\$X\$ の局所座標系をそれぞれ \$(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{d_{\tilde{X}}})\$、\$(\xi_1, \dots, \xi_{d_X})\$ とする。このとき、微分 \$\eta_*\$ の局所座標表示は以下の式で与えられる。

$$\eta_* \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_i} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}_i} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1 \leq i \leq d_{\tilde{X}}) \quad (\text{A.1})$$

【問題設定】

有限次元の弧状連結な \$C^1\$ 可微分多様体 \$X\$ 上で定義された以下の非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{A.2})$$

ここで、\$x \in X\$、\$u \in U \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)\$; \$t \mapsto u(t) \in U \subset \mathbb{R}\$ であり、\$F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)\$ は \$\mathbb{R}\$ から \$\mathbb{R}^m\$ への写像の集合とする。写像 \$f: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n\$ は \$x\$ と \$u\$ に関して連続であり、\$f(0, 0) = 0\$

を満たすものとする。ただし、\$0 \in X\$ は \$X\$ 上で漸近安定化したい目標平衡点である。

制御システム (A.2) を目標平衡点に漸近安定化するような CLF の設計を考える。

【シンプルな構造をもつ多様体を用いた制御システム】

最小射影法では可縮でない多様体上において CLF を設計するためにまずシンプルな構造をもつ多様体上で CLF を設計し、それをもとに可縮でない多様体上に射影をすることで、もとの多様体における CLF を設計する。

シンプルな構造をもつ \$n\$ 次元 \$C^1\$ 多様体 \$\tilde{X}\$ を考える。ここで、\$\tilde{X}\$ は以下の条件を満たす滑らかな写像 \$\eta: \tilde{X} \rightarrow X\$ によってもとの多様体 \$X\$ と関係をもっているものとする。

(C1) \$\eta\$ は全射。

(C2) \$\eta(0) = 0\$。ただし、\$0 \in \tilde{X}\$、\$0 \in X\$ とし、\$0 \in X\$ は漸近安定化する平衡点である。

(C3) 任意の \$\tilde{x} \in \tilde{X}\$ に対し、連続写像 \$\eta_*: T_{\tilde{x}} \tilde{X} \rightarrow T_{\eta(\tilde{x})} X\$ は全単射。

すなわち、以上の条件を満たす写像 \$\eta\$ は、\$\eta(0) = 0\$ を満たす \$\tilde{X}\$ から \$X\$ への全射はめ込み (あるいは étale 射) である。

上記の仮定のもとで、\$X\$ 上で定義される制御システム (A.2) は \$\tilde{X}\$ 上で定義される「リフトされた」制御システムを一意に定める。具体的には以下の式によって \$\tilde{X}\$ 上の制御システムが導かれる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \eta_*^{-1} f(\eta(\tilde{x}), u) \\ &= \tilde{f}(\tilde{x}, u) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ここで、\$\tilde{x} \in \tilde{X}\$ は \$x = \eta(\tilde{x})\$ を満たす状態とする。

リフトされたベクトル場 \$\tilde{f}(\tilde{x}, u)\$ は以下のような局所座標系をもつ。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, u) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} \right)^{-1} f(\eta(\tilde{x}), u) \quad (\text{A.4})$$

A.2 単層の最小射影法

シンプルな構造をもつ多様体である \$\tilde{X}\$ 上で設計した CLF によりもとの多様体 \$X\$ 上で滑らかでない CLF を設計する手順は以下のようにまとめられる。

- (1) シンプルな構造をもつ多様体 \$\tilde{X}\$ と \$\eta(0) = 0\$ を満たす全射はめ込み \$\eta\$ を選ぶ。
- (2) \$\tilde{X}\$ 上の制御システム (A.3) に対する CLF である \$\tilde{V}\$ を設計する。
- (3) 次式によって定義される関数 \$V\$ が \$X\$ 上の CLF となる。

$$V(x) = \min_{\tilde{x} \in \eta^{-1}(x)} \tilde{V}(\tilde{x}) \quad (\text{A.5})$$

[著 者 紹 介]

畑 山 誉 (学生会員)

2013 年東京理科大学理工学部電気電子情報工学科卒業。同年同大学大学院理工学研究科電気工学専攻修士課程入学，現在に至る。剛体の姿勢制御の研究に従事，日本ロボット学会の会員。

中 村 文 一 (正会員)

2000 年東京工業大学理工学研究科修士課程修了。2003 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士課程修了。同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手，2007 年助教，2011 年東京理科大学理工学部電気電子情報工学科講師，現在に至る。博士 (工学)。非線形制御，ロボット制御などの研究に従事。システム制御情報学会，日本ロボット学会，IEEE などの会員。