外れ値環境下におけるロバスト Self-tuning Controller

金 田 泰 昌^{*,**}・入 月 康 晴^{**}・山 北 昌 毅^{*}

Robust Self-tuning Controller under Outliers

Yasuaki KANEDA^{*,**}, Yasuharu IRIZUKI^{**} and Masaki YAMAKITA^{*}

In this paper, we propose a robust self-tuning controller (STC) under outliers. A parameter update law of a conventional STC consists of a recursive least squares estimation, and the estimation is given by a solution of a minimization problem of estimated errors. In the proposed method, we estimate parameters and outliers explicitly by addition of a l_1 regression to the minimization problem like a robust Kalman filter via l_1 regression, and the estimated outliers are removed from measurement outputs in the controller. We also analyze control performances of the proposed method under outliers, and it is shown theoretically that performances in the proposed method with outliers are nearly equal to ones in the normal STC without outliers. Numerical simulation, in which a controlled object is a non-minimum phase system, demonstrates effectiveness of the proposed method.

Key Words: outlier, self-tuning controller, robust Kalman filter, l_1 optimization problem

1. はじめに

パラメータが未知なシステムに対する制御方策の一つとして、self-tuning controller (STC) は古くから研究されている^{1)~6)}。また、さまざまな産業に応用され、近年では、エンジン制御に適用した事例⁵⁾も報告されており、現在もお実用的に注目を集めている手法の一つである。

理論面では、Kalman¹⁾が最小二乗推定とフィードバック制御を組み合わせた手法を提案して以来、その安定性について数多く議論されてきている。たとえば、文献 2) では非最小位相系に対する手法を提案し、既知のパラメータに対して安定性の証明が行なわれている。また、文献 3) は MIMO システムに対して観測ノイズが存在しない場合の大域的な安定性を証明している。文献 4), 5) ではスライディングモードの考えを取り入れることで MIMO システムに対して大域的な安定性が証明されている。そのほかにも、PID 制御器のパラメータをオンラインで計算する手法⁶⁾など数多くの手法が提案されている。

このように STC は今日までにさまざまな研究者によって

研究され、改良されている。しかしながら、これらの手法は観測ノイズを考慮していない、もしくは観測ノイズとしてガウスノイズのみを考慮した手法であり、外れ値ノイズのような非ガウスノイズは考慮されていない。外れ値ノイズは低い頻度で生じる値の大きな観測ノイズであり、裾の重い確率密度関数に従って生成される。このようなノイズはさまざまな分野で生じることが知られている。たとえば、近年、レーダ計測や GPS、画像計測といった非接触型センサが注目を集めているが、これらのセンサには外界の影響により外れ値が生じることが知られている^{7), 8)}。そのため、これらのセンサを用いてフィードバック制御系を構築した際、外れ値が制御性能に悪影響を及ぼすことになるため、何らかの対策が必要となる。

本論文は、文献 5) を拡張し、外れ値ノイズに対してロバストな STC を提案する。従来手法の STC のパラメータ更新則は逐次最小二乗推定の形で与えられるが、これは誤差の二次形式の最小化問題の解と等価である。そこで、本論文では l_1 正則化を用いたロバストカルマンフィルタの考え^{9)~11)}を応用し、上記最小化問題に l_1 正則化項を付加することで外れ値ノイズを陽に推定する。そして、制御器から外れ値ノイズを取り除くことで外れ値に対応したロバスト STC を構築する。さらに、提案するロバスト STC の制御性能を解析する。

本論文の構成は以下のとおりである。2 章では本論文で用いる記号および外れ値の定義を与える。3 章では従来手法の STC を説明する。4 章で外れ値に対応したロバスト STC を提案する。そして、その制御性能について解析し、提案手法の定常偏差が外れ値が存在しない場合の通常の STC と同程度になることを示す。5 章で数値シミュレーションの結果を

* 東京工業大学大学院理工学研究科
東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 東京都立産業技術研究センター 東京都江東区青海 2-4-10

* Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ohokayama, Meguro-ku, Tokyo

** Tokyo Metropolitan Industrial Technology Research Institute, 2-4-10 Aomi, Koutou-ku, Tokyo

(Received April 2, 2014)

(Revised July 14, 2014)

示し、6章で本論文をまとめる。

2. 定義

2.1 記号の定義

ベクトルを太文字で表わし、その i 番目の要素を下添字 i で表わす。たとえばベクトル $\mathbf{x}$ の i 番目の要素は x_i である。ただし、変数や関数が時刻 k に依存する時間関数の場合も同様に下添字で表わす。たとえばベクトル $\mathbf{x}$ が時刻 k に依存する場合は $\mathbf{x}_k$ と表記し、その i 番目の要素は $x_{k,i}$ と表記する。

行列の場合も同様に太文字で表わし、その (i, j) 成分を下添字 ij で表わす。たとえば、行列 $\mathbf{A}$ の (i, j) 成分は A_{ij} と表記する。また、行列 $\mathbf{A}$ が時刻 k に依存する場合は $\mathbf{A}_k$ と表記し、その (i, j) 成分を $A_{k,ij}$ と表記する。

$\mathbf{Z}^{-n}$ はシフトオペレータ z^{-i} ($i = 0, \dots, n$) を並べたベクトル演算子であり、次式として定義する。

$$\mathbf{Z}^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-n} \end{bmatrix}.$$

たとえば、時刻 k におけるスカラー値 x_k に関して、 $\mathbf{Z}^{-n}x_k$ は次式として計算される。

$$\mathbf{Z}^{-n}x_k = \begin{bmatrix} x_k & x_{k-1} & \dots & x_{k-n} \end{bmatrix}.$$

$\text{diag}(\cdot)$ および $\mathbf{I}$ は、それぞれ対角行列および単位行列を意味する。

絶対値の微分は劣勾配で与えられるとする。すなわち、

$$\frac{\partial |x_i|}{\partial x_i} \in \begin{cases} \{1\} & x_i > 0 \\ [-1, 1] & x_i = 0 \\ \{-1\} & x_i < 0 \end{cases}.$$

ここで、 $x_i > 0$ のときは $\partial |x_i| / \partial x_i = 1$ を、また $x_i < 0$ のときは $\partial |x_i| / \partial x_i = -1$ を意味する。

2.2 外れ値の定義

本論文で扱う外れ値とは、ゼロ値、もしくは想定する観測ガウスノイズよりも大きな値となる観測ノイズを意味する。

Fig. 1 に観測値が3次元の場合の外れ値のイメージを示す。多くの時刻において、外れ値はゼロの値をとり、まれに大きな値をもつ。そのため、外れ値は時間的にスパースであるといえる。また、ある時刻のベクトル構造を見た場合、必ずしもスパース構造をとるわけではないが、基本的には多くの要素がゼロになるという性質をもつ。つまり、ある時刻のベクトル構造はスパースになりやすいという性質をもつ。

Fig. 1 Illustration of outliers in the case that a dimension of an output is three. “*” represents an arbitrary non-zero number

3. Self-tuning Controller

3.1 従来手法の制御則および更新則

次式で表わされる p 次元入力、 p 次元出力系を考える。

$$\mathbf{A}(z^{-1})\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{B}(z^{-1})z^{-d}\mathbf{u}_k. \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ は入力、 $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^p$ はノイズフリーのときのノミナル出力、 $d \in \mathbb{Z}$ は既知のむだ時間を表わす。 $\mathbf{A}(z^{-1})$ および $\mathbf{B}(z^{-1})$ は $p \times p$ 正方多項式行列であり、それぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_n z^{-n}, \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_m z^{-m}. \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{B}_0$ は正則である。

今、次式で定義される拘束面 $\bar{s}_{k,i}$ ($i = 1, \dots, p$) を考える。

$$\bar{s}_{k+d} = \mathbf{C}(z^{-1})(\bar{\mathbf{y}}_{k+d} - \mathbf{r}_{k+d}) + \mathbf{Q}(z^{-1})\mathbf{u}_k. \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^p$ は参照信号であり、 $\mathbf{C}(z^{-1})$ および $\mathbf{Q}(z^{-1})$ は次式の多項式対角行列で与えられる設計パラメータである。

$$\mathbf{C}(z^{-1}) = \text{diag}(C_{11}(z^{-1}), \dots, C_{pp}(z^{-1})) \quad (3)$$

$$\mathbf{Q}(z^{-1}) = \text{diag}(Q_{11}(z^{-1}), \dots, Q_{pp}(z^{-1})) \quad (4)$$

ここで、(3) 式は $C_{ii}(z^{-1}) = 1 + c_{ii}^1 z^{-1} + \dots + c_{ii}^{n-1} z^{-(n-1)}$ であり、Schur 多項式となるように設計する。また、(4) 式において、 $Q_{ii}(z^{-1}) = q_{ii}(1 - z^{-1})$ とする。さらに、 $\mathbf{G}(z^{-1})$ を次式で定義する。

$$\mathbf{G}(z^{-1}) = \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) + \mathbf{Q}(z^{-1}), \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{E}(z^{-1})$ は $p \times p$ 対称行列多項式であり、次式の Diophantine 方程式を満たす。

$$\mathbf{C}(z^{-1}) = \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{A}(z^{-1}) + z^{-d}\mathbf{F}(z^{-1}),$$

ここで、 $\mathbf{E}(z^{-1})$ 、 $\mathbf{F}(z^{-1})$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}(z^{-1}) = \mathbf{I} + \mathbf{E}^1 z^{-1} + \dots + \mathbf{E}^{d-1} z^{-(d-1)}, \quad (6)$$

$$\mathbf{F}(z^{-1}) = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^1 z^{-1} + \dots + \mathbf{F}^{n-1} z^{-(n-1)}. \quad (7)$$

このとき、(2) 式は次式で書き直すことができる。

$$\bar{s}_{k+d} = \mathbf{G}(z^{-1})\mathbf{u}_k + \mathbf{F}(z^{-1})\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{C}(z^{-1})\mathbf{r}_{k+d}.$$

システム (1) のパラメータ $\mathbf{A}(z^{-1})$ および $\mathbf{B}(z^{-1})$ が既知の場合、次式で与えられる制御則を用いることで $\bar{s}_k \rightarrow 0$ が達成され、このとき $\bar{\mathbf{y}}_k \rightarrow \mathbf{r}_k$ となる。

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{G}^{-1}(z^{-1}) [\mathbf{C}(z^{-1})\mathbf{r}_{k+d} - \mathbf{F}(z^{-1})\bar{\mathbf{y}}_k].$$

パラメータが未知の場合、つぎの定理が成り立つ。

《定理1》(STCの制御則および更新則⁵⁾) システム (1) のパラメータ $\mathbf{A}(z^{-1})$ および $\mathbf{B}(z^{-1})$ が未知であるとする。また、拘束面のパラメータ $\mathbf{C}(z^{-1})$ が Schur 多項式となるよう

に設計されているとする．制御則が (8) 式で与えられたとき $\bar{s}_k \rightarrow \mathbf{0}$ ($k \rightarrow \infty$) が成り立つ．

$$\mathbf{u}_k = \hat{\mathbf{G}}_k^{-1}(z^{-1}) \left[\mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{r}_{k+d} - \hat{\mathbf{F}}_k(z^{-1}) \bar{\mathbf{y}}_k \right]. \quad (8)$$

ここで, $\hat{\mathbf{F}}_k(z^{-1})$, $\hat{\mathbf{G}}_k(z^{-1})$ は時刻 k における行列多項式 $\mathbf{F}(z^{-1})$, $\mathbf{G}(z^{-1})$ の推定値であり, その (i, j) 成分は次式の多項式で与えられる．

$$\begin{aligned} \hat{F}_{k,ij}(z^{-1}) &= \hat{f}_{k,ij}^0 + \hat{f}_{k,ij}^1 z^{-1} + \cdots + \hat{f}_{k,ij}^{n-1} z^{-(n-1)}, \\ \hat{G}_{k,ij}(z^{-1}) &= \hat{g}_{k,ij}^0 + \hat{g}_{k,ij}^1 z^{-1} + \cdots + \hat{g}_{k,ij}^{m+d-1} z^{-(m+d-1)}. \end{aligned}$$

また, 上記行列多項式の i 行目の係数を並べたベクトル

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i = \begin{bmatrix} \hat{g}_{k,i1}^0 & \cdots & \hat{g}_{k,i1}^{m+d-1} & \cdots & \hat{g}_{k,ip}^0 & \cdots & \hat{g}_{k,ip}^{m+d-1} \\ \hat{f}_{k,i1}^0 & \cdots & \hat{f}_{k,i1}^{n-1} & \cdots & \hat{f}_{k,ip}^0 & \cdots & \hat{f}_{k,ip}^{n-1} \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

は次式で推定される．

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i + \mathbf{K}_k^i \bar{\mathbf{e}}_{k,i}, \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{k,i} = \bar{s}_{k,i} + C_{ii}(z^{-1}) r_{k,i} - \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i, \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_k^i = \frac{\mathbf{P}_{k-1}^i \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}}{\bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}^T \mathbf{P}_{k-1}^i \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d} + R_i^s}, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_k^i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^i \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}^T) \mathbf{P}_{k-1}^i, \quad (13)$$

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{-m-d+1} u_{k,1} & \cdots & \mathbf{Z}^{-m-d+1} u_{k,p} \\ \mathbf{Z}^{-n+1} \bar{y}_{k,1} & \cdots & \mathbf{Z}^{-n+1} \bar{y}_{k,p} \end{bmatrix}^T. \quad (14)$$

ここで, R_i^s は誤差 $\bar{e}_{k,i}$ の重みである．

(注意) 文献5) では (12) 式において R_i^s は用いず, 逐次最小二乗解の形で与えられている．しかしながら, リアプノフ候補関数を $V_{k,i} = \frac{1}{2} \bar{s}_{k,i}^T (R_i^s)^{-1} \bar{s}_{k,i} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i)^T (\mathbf{P}_k^i)^{-1} (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i)$ とすることで (12) 式が証明できる．ただし, $\bar{s}_{k,i} = \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}^T (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i)$ である．

(注意) (10)~(14) 式は $\bar{s}_k$ の各要素に関して独立に成り立つ．つまり, $\bar{s}_{k,i} + C_{ii}(z^{-1}) r_{k,i}$ を出力と考え, 1 出力システムの逐次最小二乗法を個別に考えていることと等価である．これは, 拘束面の設計パラメータ (3), (4) が対角行列であるためである．

(注意) (8) 式は推定されたパラメータ $\hat{\mathbf{G}}_k(z^{-1})$ および $\hat{\mathbf{F}}_k(z^{-1})$ を用いて次式のように実現できる．

$$\mathbf{u}_k = \left(\hat{\mathbf{G}}_k^0 \right)^{-1} \left[\mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{r}_{k+d} - \hat{\mathbf{F}}_k(z^{-1}) \bar{\mathbf{y}}_k - \sum_{i=1}^{m+d-1} \hat{\mathbf{G}}_k^i \mathbf{u}_{k-i} \right].$$

ただし, $\hat{\mathbf{G}}_k(z^{-1}) = \hat{\mathbf{G}}_k^0 + \sum_{i=1}^{m+d-1} \hat{\mathbf{G}}_k^i z^{-i}$ であり, $\hat{\mathbf{G}}_k^0$ は正則である．

3.2 パラメータ更新則と最適化問題との関係

拘束面に式誤差として生ずるノイズ $\bar{\mathbf{v}}_k^s$ を考える．すなわち,

$$\bar{s}_{k+d,i} + C_{ii}(z^{-1}) r_{k+d,i} = \bar{\boldsymbol{\phi}}_k^T \boldsymbol{\theta}_{k+d}^i + \bar{v}_{k+d,i}^s.$$

$\bar{\mathbf{v}}_k^s$ がガウスノイズであり, その分散を R_i^s とすると, 次式の最適化問題の解はパラメータ更新則 (10) と一致する．

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}_k^i} \bar{\mathbf{v}}_{k,i}^{s,T} (R_i^s)^{-1} \bar{\mathbf{v}}_{k,i}^s \\ &\quad + (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i)^T (\mathbf{P}_{k-1}^i)^{-1} (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i), \quad (15) \\ \text{s.t. } \bar{s}_{k,i} + C_{ii}(z^{-1}) r_{k,i} &= \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}^T \boldsymbol{\theta}_k^i + \bar{v}_{k,i}^s. \end{aligned}$$

今, 平均 $\boldsymbol{\mu}$, 共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の正規分布を $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とする．このとき (15) 式は, 事前分布として $\boldsymbol{\theta}_k^i \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}^i)$ を仮定した際の最大事後確率推定値を求めていることと等価である．

実際の対象に適用する場合, 観測値には観測ノイズが含まれる．今, 観測ガウスノイズ $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$ を陽に考慮した出力 $\mathbf{y}_k^*$ を考える．

$$\mathbf{y}_k^* = \bar{\mathbf{y}}_k + \mathbf{v}_k.$$

$\mathbf{y}_k^*$ を用いた場合の拘束面を $\mathbf{s}_k^*$ とし, $\mathbf{s}_k^*$ に生じるガウスノイズを $\mathbf{v}_k^s$ とする． $\mathbf{v}_{k,i}^s$ の分散が R_i^s で与えられたとき, 次式のように観測ノイズを含んだ形として最適化問題を解くことになる．

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^i &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}_k^i} \mathbf{v}_{k,i}^{s,T} (R_i^s)^{-1} \mathbf{v}_{k,i}^s \\ &\quad + (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i)^T (\mathbf{P}_{k-1}^i)^{-1} (\boldsymbol{\theta}_k^i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^i), \\ \text{s.t. } \mathbf{s}_{k,i}^* + C_{ii}(z^{-1}) r_{k,i} &= \bar{\boldsymbol{\phi}}_{k-d}^T \boldsymbol{\theta}_k^i + \mathbf{v}_{k,i}^s, \end{aligned}$$

ここで,

$$\boldsymbol{\phi}_k^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{-m-d+1} u_{k,1} & \cdots & \mathbf{Z}^{-m-d+1} u_{k,p} \\ \mathbf{Z}^{-n+1} y_{k,1}^* & \cdots & \mathbf{Z}^{-n+1} y_{k,p}^* \end{bmatrix}^T.$$

また, 拘束面 $\mathbf{s}_k^*$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+d}^* &= \mathbf{C}(z^{-1}) (\mathbf{y}_{k+d}^* - \mathbf{r}_{k+d}) + \mathbf{Q}(z^{-1}) \mathbf{u}_k \\ &= \bar{\mathbf{s}}_{k+d} + \mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{v}_{k+d}. \end{aligned}$$

今, レグレッサが (14) 式で与えられ, かつ拘束面の回帰モデルが $\bar{\mathbf{s}}_{k+d} + \mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{r}_{k+d}$ を誤差なく近似できたとき, $\mathbf{v}_k^s$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{v}_k^s = \mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{v}_k. \quad (16)$$

観測ガウスノイズ $\mathbf{v}_k$ が白色性をもつとき, 正規分布の再生性より $\mathbf{v}_k^s$ もまた正規分布に従う．また, 制御入力 は次式で与えられる．

$$\mathbf{u}_k = \hat{\mathbf{G}}_k^{-1}(z^{-1}) \left[\mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{r}_{k+d} - \hat{\mathbf{F}}_k(z^{-1}) \mathbf{y}_k^* \right].$$

この制御入力は, 次式の拘束面を考えていることを意味する．

$$\mathbf{s}_{k+d}^* = \mathbf{G}(z^{-1}) \mathbf{u}_k + \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{y}_k^* - \mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{r}_{k+d}. \quad (17)$$

4. ロバスト Self Tuning Controller

4.1 制御則とそのパラメータ更新則

本研究では, 次式で表わされる出力を考える．

$$\mathbf{y}_k = \bar{\mathbf{y}}_k + \mathbf{v}_k + \mathbf{z}_k$$

$$= \mathbf{y}_k^* + \mathbf{z}_k. \quad (18)$$

ここで, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^p$ は外れ値を表わす. このとき, 外れ値 $z_{k,i}$ に対応したロバスト STC の制御則, およびパラメータ更新則を次式で定義する.

【定義】(ロバスト STC の制御則) ロバスト STC の制御則を次式で定義する.

$$\mathbf{u}_k = \hat{\mathbf{G}}_k^{-1}(z^{-1}) [C(z^{-1})\mathbf{r}_{k+d} - \hat{\mathbf{F}}_k(z^{-1})(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{z}}_k)]. \quad (19)$$

ここで, $\hat{\mathbf{G}}_k$ および $\hat{\mathbf{F}}_k$ はそれぞれ時刻 k における (5) 式および (7) 式の推定値である. また, $\hat{\mathbf{z}}_k$ は $\mathbf{z}_k$ の推定値であり, これらはパラメータ更新則により推定される.

【定義】(ロバスト STC の更新則) 拘束面およびレグレッサを次式で定義する.

$$\mathbf{s}_k = C(z^{-1})(\mathbf{y}_k - \mathbf{r}_k) + Q(z^{-1})\mathbf{u}_{k-d}, \quad (20)$$

$$\phi_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{-m-d+1}\mathbf{u}_{k,1} & \cdots & \mathbf{Z}^{-m-d+1}\mathbf{u}_{k,p} \\ \mathbf{Z}^{-n+1}\mathbf{y}_{k,1} & \cdots & \mathbf{Z}^{-n+1}\mathbf{y}_{k,p} \end{bmatrix}^T.$$

このとき, 制御則のパラメータ $\hat{\mathbf{G}}_k$, $\hat{\mathbf{F}}_k$, および $\hat{z}_{k,i}$ の更新則を次式で与える.

$$\begin{aligned} \{\hat{\theta}_k^i, \hat{z}_{k,i}\} &= \arg \min_{\theta_k^i, z_{k,i}} v_{k,i}^s (R_i^s)^{-1} v_{k,i}^s \\ &\quad + (\theta_k^i - \hat{\theta}_{k-1}^i)^T (\mathbf{P}_{k-1}^i)^{-1} (\theta_k^i - \hat{\theta}_{k-1}^i) \\ &\quad + \lambda_i |z_{k,i}|, \\ \text{s.t. } s_{k,i} + C_{ii}(z^{-1})r_{k,i} &= \\ &\quad \phi_{k-d}^T \theta_k^i + v_{k,i}^s + z_{k,i}^s, \\ \theta_k^i &= \hat{\theta}_{k-1}^i + \mathbf{K}_k^i (e_{k,i} - z_{k,i}^s), \\ e_{k,i} &= s_{k,i} + C_{ii}(z^{-1})r_{k,i} - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}^i, \\ z_{k,i}^s &= C_{ii}(z^{-1})z_{k,i}. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで, $\hat{\theta}_k^i$ は制御則のパラメータ $\hat{\mathbf{G}}_k$ および $\hat{\mathbf{F}}_k$ の i 行目の係数を並べたベクトルであり, (9) 式で与えられる. また, λ_i は正則化パラメータである.

制御則 (19) および更新則 (21) についていくつかの注意, および補題を与える.

(注意) 制御則 (19) は, 次式の拘束面を考えていることを意味する.

$$\mathbf{s}_{k+d} = \mathbf{G}(z^{-1})\mathbf{u}_k + \mathbf{F}(z^{-1})(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{z}}_k) - C(z^{-1})\mathbf{r}_{k+d}. \quad (22)$$

つまり, 外れ値を陽に推定し, 出力から差し引くことで外れ値の影響を抑えている. 一方, 外れ値を推定する際には, 外れ値を含んだ拘束面 (20) を考え, その中から外れ値を検出・推定している.

(注意) 更新則 (21) では, 拘束面上の仮想的な外れ値 z_k^s を考え, 拘束面を出力とした問題として考えている. これにより, 最小化問題の枠組みで STC の更新則が議論できる. (16) 式同様, レグレッサが (14) 式で与えられ, かつ拘束面の回

帰モデルが $\bar{\mathbf{s}}_{k+d} + C(z^{-1})\mathbf{r}_{k+d}$ を誤差なく近似できたときの拘束面に生じる外れ値 $z_{k,i}^s$ は次式で与えられる.

$$z_{k,i}^s = C_{ii}(z^{-1})z_{k,i}. \quad (23)$$

しかしながら, (21) 式では, 簡単のため $z_{k,i}^s$ は (23) 式で与えられるとしている. このとき, 拘束面上のノイズは非干渉化されているため, 独立に考えることができる. そのため, (21) 式では $\mathbf{z}_k$ を各要素について独立に扱っている.

(注意) (21) 式では外れ値を評価関数内で評価し, 状態の事後推定値と合わせて推定している. 外れ値の評価の際, l_1 正則化項を使うことで値が小さい解をゼロに切り縮めることができるため, 外れ値がゼロの値であったとしても正確に推定することができる. この考えは l_1 正則化を用いたロバストカルマンフィルタの導出と同じである^{9)~11)}. 別の見方をすると, 外れ値は非常に大きな値をとり, 2 ノルムによる評価に対して感度が高くなるため, 2 ノルムよりも感度の低い評価関数を用いているともいえる.

【補題 1】 (21) 式は次式で書き直すことができる.

$$\hat{z}_{k,i} = \arg \min_{z_{k,i}} \xi_i^T W_i \xi_i + \lambda_i |z_{k,i}|, \quad (24)$$

$$\hat{\theta}_k^i = \hat{\theta}_{k-1}^i + \mathbf{K}_k^i (e_{k,i} - \hat{z}_{k,i}^s). \quad (25)$$

ここで, $\xi_i = e_{k,i} - C_{ii}(z^{-1})z_{k,i}$, $W_i = (1 - \phi_{k-d}^T \mathbf{K}_k^i)^T (R_i^s)^{-1} (1 - \phi_{k-d}^T \mathbf{K}_k^i) + (\mathbf{K}_k^i)^T (\mathbf{P}_k^i)^{-1} \mathbf{K}_k^i \in \mathbb{R}$ である.

(証明) 付録 A を参照のこと.

(注意) $z_{k,i}$ はスカラー変数であるため, (24) 式は解析的に解くことができる. (24) 式の解析解を付録 B に示す.

制御則 (19) および更新則 (21) に対して以下の四つの仮定を置く. このとき, 定理 2 が成り立つ.

【仮定 1】 制御対象のパラメータの真値は一定, もしくは変化が非常に遅い. すなわち, $\theta_k^i = \theta_{k-1}^i$ とみなせる.

【仮定 2】 拘束面のパラメータ $C(z^{-1})$ は Schur 安定の十分条件¹²⁾を満たすように設計されている. すなわち,

$$1 > c_{ii}^1 > \cdots > c_{ii}^{n-1} > 0, \text{ or } 1 > |c_{ii}^1| + \cdots + |c_{ii}^{n-1}|,$$

のいずれかを満たす.

【仮定 3】 正則化パラメータは次式で与えられる.

$$\lambda_i = 2W_i \sigma_i. \quad (26)$$

ここで, $\sigma_i^2 = \phi_{k-d}^T \mathbf{P}_{k-1}^i \phi_{k-d} + R_i^s$ である.

【仮定 4】 確率変数 θ_k^i , $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{z}_k$ は互いに独立である. また, $\mathbf{z}_k$ はホワイト性をもつ.

《定理 2》(ロバスト STC の性能) システム (1) のパラメータ $\mathbf{A}(z^{-1})$ および $\mathbf{B}(z^{-1})$ が未知であり, 観測値が (18) 式で与えられたとする. 仮定 1-4 を満たすとき, 外れ値の推定誤差の分散 $E[(z_{k,i} - \hat{z}_{k,i})^2]$ は有界である. また, 共分散行列 $\mathbf{P}_k^i$ ($k \rightarrow \infty$) が十分小さいとき, 次式の不等式が成り立つ.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[(s_{k,i}^* - s_{k,i})^2] \leq \mathcal{O}(R_i^s). \quad (27)$$

ここで、 $s_{k,i}^*$ および $s_{k,i}$ はそれぞれ外れ値が存在しない場合の STC の拘束面、および外れ値が存在する場合のロバスト STC の拘束面を表す。

(証明) 付録 C を参照のこと。

ここで、拘束面および拘束面上の観測ノイズの分散 R_i^s について注意を与える。

(注意) 定理 2 は、拘束面において、 R_i^s のオーダーの分散をもつノイズ成分を残した形で外れ値ノイズが除去されることを意味する。このことは、拘束面上において、提案手法は分散 R_i^s を基準に小さい信号をガウスノイズとみなし、それ以外を外れ値ノイズとして推定していることを意味する。また、拘束面上のガウスノイズの分散 R_i^s が十分小さい場合、 $s_k \rightarrow s_k^*$ になることを意味する。これは、 R_i^s が十分小さければ、外れ値が存在する場合でも外れ値が存在しない場合と同じ性能が得られることを意味している。

(注意) 定理 2 は提案手法の性能が拘束面 $s_{k,i}$ 上のガウスノイズの分散 R_i^s に依存することを意味している。そのため R_i^s を正確に決定することが重要となる。本手法では外れ値ノイズ $z_{k,i}$ が推定できるため、外れ値ノイズを差し引いたイノベーションを用いて分散を数値的に推定することができる。すなわち、拘束面の観測ノイズ v_k^s の分散は次式で推定される。

$$R_{k,i}^s = \frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_{k-j,i}^2 - \phi_{k-d}^T P_k^i \phi_{k-d},$$

$$\varepsilon_{k-j,i} = e_{k-j,i} - C_{ii}(z^{-1}) \hat{z}_{k-j,i}.$$

ここで N は推定に用いる過去のデータ数である。

4.2 外れ値ノイズが存在する場合の共分散行列の更新則

前節では外れ値が存在した場合のパラメータ θ_k の更新則、および拘束面の挙動について議論した。ここでは、外れ値が存在した場合における共分散行列 P_k^i の更新則について考察する。

今、仮定 1 より、推定誤差は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \theta_k^i - \hat{\theta}_k^i &= \theta_{k-1}^i - \hat{\theta}_{k-1}^i - K_k^i(e_{k,i} - \hat{z}_{k,i}^s) \\ &= (I - K_k^i \phi_{k-d}^T) (\theta_{k-1}^i - \hat{\theta}_{k-1}^i) \\ &\quad - K_k^i v_{k,i}^s - K_k^i (z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s). \end{aligned} \quad (28)$$

よって、パラメータ θ_k の推定誤差に関する共分散行列 P_k^i は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_k^i &= E[(\theta_k^i - \hat{\theta}_k^i)(\theta_k^i - \hat{\theta}_k^i)^T] \\ &= (I - K_k^i \phi_{k-d}^T) P_{k-1}^i \\ &\quad + K_k^i E[(z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s)^2] (K_k^i)^T. \end{aligned} \quad (29)$$

通常の STC ($z_{k,i}^s = 0$) では共分散行列 P_k^i を次式で計算している。

$$P_k^i = (I - K_k^i \phi_{k-d}^T) P_{k-1}^i, \quad (30)$$

しかしながら、(29) 式より、外れ値が存在する場合の実際の P_k^i には $z_{k,i}^s$ の二次モーメントの項が追加されている。そ

のため、たとえば $z_{k,i}^s$ がコーシー分布のように二次モーメントが無限大となる分布に従う場合、実際には P_k^i を無限大にする必要がある。しかしながら、その際にパラメータが推定されないという矛盾が生じる。一方、ロバスト STC の場合、(29) 式および (C.1) 式より次式が成り立つ。

$$P_k^i \leq (I + K_k^i \phi_{k-d}^T) P_{k-1}^i. \quad (31)$$

つまり、ロバスト STC において、外れ値ノイズが存在する場合の実際の共分散行列は (31) 式の範囲を満たすように選択すれば良いことになる。そして、この場合、パラメータの更新則である (30) 式は (31) 式を満たす解の一つである。つまり、ロバスト STC では、(30) 式を用いることで、外れ値が存在する場合においても状態を推定でき、かつ共分散行列が収束することが期待される。

5. シミュレーション

5.1 条件

制御対象として不安定零点をもつ 2 入力 2 出力非最小位相系を考える。

$$y_k = -A_1 y_{k-1} + B_0 u_{k-1} + B_1 u_{k-2},$$

ここで、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

拘束面のパラメータは次式のように設計する。

$$C(z^{-1}) = \text{diag}(1 + 0.2z^{-1}, 1 - 0.1z^{-1}),$$

$$Q(z^{-1}) = \text{diag}(1.3(1 - z^{-1}), 1.7(1 - z^{-1})).$$

このとき、 $A(z^{-1})Q(z^{-1}) + B(z^{-1})C(z^{-1})$ の根はすべて単位円内に入り、また多項式 $F(z^{-1})$ および $G(z^{-1})$ の真値は Diophanten 方程式より次式として決定される。

$$F(z^{-1}) = F^0, \quad G(z^{-1}) = G^0 + G^1 z^{-1}.$$

ただし、

$$F^0 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.2 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$G^0 = \begin{bmatrix} 2.1 & 0.3 \\ 0.2 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad G^1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix}.$$

外れ値ノイズとして、コーシーノイズおよび混合ガウスノイズの二通りを考える。コーシー分布 $p_c(x)$ および混合ガウス分布 $p_g(x)$ はそれぞれ次式で表わされる。

$$p_c(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (x - x_0)^2},$$

$$p_g(x) = (1 - \epsilon) \mathcal{N}(0, \Sigma_1^2) + \epsilon \mathcal{N}(0, \Sigma_2^2).$$

Table 1 Root mean squared errors of tracking errors the controlled plant under Cauchy noise

	output 1	output 2
self tuning controller with a fixed variance	3.9×10^{-3}	6.9×10^{-3}
self tuning controller with an updated variance	3.8×10^{-3}	6.1×10^{-3}
proposed method	3.3×10^{-3}	5.7×10^{-3}

Table 2 Root mean squared errors of tracking errors of the controlled plant under Gaussian mixture noise

	output 1	output 2
self tuning controller with a fixed variance	4.3×10^{-3}	7.0×10^{-3}
self tuning controller with an updated variance	9.5×10^{-3}	8.9×10^{-3}
proposed method	4.1×10^{-3}	5.8×10^{-3}

ここで, x_0 はコーシー分布の中心値を, δ はコーシー分布の幅を表す. また, ϵ は確率 p で 1 になり, 確率 $(1-p)$ で 0 となる変数である.

ノミナルな観測ノイズとして, 平均が $\mathbf{0}$, 共分散行列が $\text{diag}(1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-2})$ の正規白色ノイズを与える. 外れ値ノイズとしてコーシー分布を用いる場合はノミナルノイズにコーシーノイズを印加する. そのパラメータは $x_0 = 0$, $\delta = 1 \times 10^{-3}$ とする. 混合ガウス分布を用いる場合, そのパラメータを $p = 0.1$, 標準偏差をノミナルノイズの 5 倍とする.

ロバスト STC のパラメータは, $R_{0,1}^s = R_{0,2}^s = 1$, $\mathbf{P}_0^1 = \mathbf{P}_0^2 = \mathbf{I}$ とし, 拘束面上の分散の推定に用いるデータ数は $N = 20$ とする. また, パラメータの初期値は以下のとおりとする.

$$\hat{\mathbf{F}}_0^0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.1 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{G}}_0^0 = \begin{bmatrix} 2.0 & -0.1 \\ 0.2 & 3.0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}_0^1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & -1.0 \end{bmatrix}.$$

通常の STC において, 拘束面上の分散は固定した場合と推定した場合の二通りを考える. 分散を固定する場合は $R_1^s = R_2^s = 10$ とする. そのほかのパラメータはロバスト STC と同じ値とする.

5.2 STC とロバスト STC の性能比較結果

シミュレーション結果を **Fig. 2**~**Fig. 9** に示す. **Fig. 2** はコーシーノイズを外れ値として加えたときの観測値を示す. **Fig. 3**~**Fig. 5** はそれぞれ分散を固定した場合の STC, 分散を推定した場合の STC, そしてロバスト STC による制御結果を示す. また, **Fig. 6** は混合ガウスノイズを外れ値として加えたときの観測値を示す. **Fig. 7**~**Fig. 9** はそれぞれ分散を固定した場合の STC, 分散を推定した場合の STC, そしてロバスト STC による制御結果を示す. これらの結果より, 提案手法の結果は目標値の切り替わりでオーバーシュートが生

Fig. 2 Measurement including outliers distributed by Cauchy distribution. (a) and (b) are output 1 and 2, respectively **Fig. 3** Control performances using normal self tuning controller with a fixed variance under Cauchy noise: The solid line is a reference and dashed line is an output of the controlled object. (a) and (b) are results of output 1 and 2, respectively **Fig. 4** Control performances using normal self tuning controller with an updated variance under Cauchy noise: The solid line is a reference and dashed line is an output of the controlled object. (a) and (b) are results of output 1 and 2, respectively **Fig. 5** Control performances using robust self tuning controller under Cauchy noise: The solid line is a reference and dashed line is an output of the controlled object. (a) and (b) are results of output 1 and 2, respectively

じているものの, 定常値では外れ値が除去され, 性能が改善されていることがわかる.

Table 1 および **Table 2** に制御偏差の二乗平均平方根を示す. これらの結果より, 提案手法を用いることで制御偏差が低減されていることがわかる.

Fig. 6 Measurement including outliers distributed by Gaussian mixture distribution. (a) and (b) are output 1 and 2, respectively

Fig. 7 Control performances using normal self tuning controller with a fixed variance under Gaussian mixture noise: The solid line is a reference and dashed line is an output of the controlled object. (a) and (b) are results of output 1 and 2, respectively

Fig. 8 Control performances using normal self tuning controller with an updated variance under Gaussian mixture noise: The solid line is a reference and dashed line is an output of the controlled object. (a) and (b) are results of output 1 and 2, respectively

Fig. 9 Control performances using robust self tuning controller under Gaussian mixture noise: The solid line is a reference and dashed line is an output of the controlled object. (a) and (b) are results of output 1 and 2, respectively

5.3 分散と外れ値ノイズの推定精度の関係

定理 2 では、拘束面上において、提案手法は分散 R_i^s に比例したノイズ成分以外を外れ値ノイズとして推定していることを述べた。ここでは、観測値上において、拘束面上のガウスノイズの分散 R_i^s の値が外れ値ノイズの推定精度にどのよ

Table 3 Root mean squared errors of estimates of outliers in output 1 under Cauchy noise ($\times 10^{-2}$)

	R_1^s			
	0.001	0.01	0.1	1
RMSE of $v_{k,1} + z_{k,1} - \hat{z}_{k,1}$	2.93	7.19	9.99	10.2
RMSE of $z_{k,1} - \hat{z}_{k,1}$	7.69	3.90	0.63	1.33

Table 4 Root mean squared errors of estimates of outliers in output 2 under Cauchy noise ($\times 10^{-2}$)

	R_2^s			
	0.001	0.01	0.1	1
RMSE of $v_{k,2} + z_{k,2} - \hat{z}_{k,2}$	2.97	7.19	10.0	10.1
RMSE of $z_{k,2} - \hat{z}_{k,2}$	7.70	3.90	0.67	1.16

うに影響するかを調べる。

拘束面上のガウスノイズの分散 R_i^s を固定し、外れ値ノイズとしてコーシーノイズを考える。そのほかの条件は 5.1 節と同じとする。このとき、提案手法による外れ値の推定精度を **Table 3**, **Table 4** に示す。表からわかるように、分散が小さい場合は、 $v_{k,i} + z_{k,i} - \hat{z}_{k,i}$ の RMSE が小さく、 $z_{k,i} - \hat{z}_{k,i}$ の RMSE が大きい。これは、分散が小さい場合、観測ガウスノイズも含めて外れ値ノイズとして推定していることを意味する。一方、分散が大きくなると、 $v_{k,i} + z_{k,i} - \hat{z}_{k,i}$ の RMSE が大きくなり、 $z_{k,i} - \hat{z}_{k,i}$ の RMSE は小さくなる。つまり、ガウスノイズと外れ値ノイズが分離できていることがわかる。さらに、分散が大きくなりすぎると、外れ値ノイズが検出されずにガウスノイズの中に残り、外れ値ノイズの推定誤差が大きくなる。このように、観測値上においても拘束面上と同様に、分散を基準として外れ値ノイズを推定していることがわかる。

6. おわりに

本論文では、外れ値ノイズに対してロバストな STC を提案した。提案手法では、従来手法の STC のパラメータ更新則が誤差の二次形式の最小化問題の解であることを利用し、最小化問題に l_1 正則化を追加することで外れ値ノイズを陽に推定し、除去している。また、外れ値ノイズが存在する場合の定常偏差を解析し、外れ値ノイズが存在しない場合の通常の STC と同程度の定常偏差が得られることを示した。さらに、数値シミュレーションを通して提案手法の有効性を示した。数値シミュレーションでは、非最小位相系を例題とし、非最小位相系に対しても有効であることを示した。

提案手法は過渡応答が劣化しているが、これは目標値の変化を外れ値として推定していることが原因であると考えられる。過渡応答でも精度良く推定できる手法の提案、そして実アプリケーションによる検証が今後の課題である。

謝辞 本研究は科学研究費助成事業基盤研究 (B) 24360166 から研究費の一部の支援を得ました。ここに感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) R.E. Kalman: Design of a self-optimizing control system, *Trans. on ASME*, **80**-2, 468/478 (1958)
- 2) D.W. Clark, D. Phil and P.J. Gawthrop: Self-Tuning Control, *IEE Proceedings*, **126**-6, 633/640 (1979)
- 3) G.C. Goodwin, P.J. Ramadge and P.E. Caines: Discrete-time multivariable adaptive control, *IEEE Trans on Automatic Control*, **25**-3, 449/456 (1980)
- 4) A. Patete, K. Furuta and M. Tomizuka: Self-Tuning Control Based on Generalized Minimum-Variance Criterion for Auto-Regressive Model, *Automatica*, **44**-8, 1970/1975 (2008)
- 5) K. Furuta, A. Ohata and A. Sugiki: Self-tuning Control based on Discrete-time Sliding Mode with Applications, *Proc. the 18th IFAC World Congress*, 774/779 (2011)
- 6) T. Yamamoto, A. Inoue and S.L. Shah: Generalized Minimum Variance Self-Tuning Pole-Assignment Controller with a PID Structure, *Proc. 1999 IEEE Int. Conf. on Control Applications*, 125/130 (1999)
- 7) I. Bilik and J. Tabrikian: Maneuvering Target Tracking in the Presence of Glint using the Nonlinear Gaussian Mixture Kalman Filter, *IEEE Trans. on Aero. Elec. Sys.*, **46**-1, 246/262 (2010)
- 8) N. Guenard, T. Hamel and R. Mahony: A Practical Visual Servo Control for an Unmanned Aerial Vehicle, *IEEE Trans. on Robotics*, **24**-2, 331/340 (2008)
- 9) Y. Kaneda, Y. Irizuki and M. Yamakita: Design Method of Robust Kalman Filter via l_1 Regression and Its Application for Vehicle Control with Outliers, *Proc. 38th Annual Conf. of IEEE Industrial Electronics Society*, 2210/2215 (2012)
- 10) Y. Kaneda, Y. Irizuki and M. Yamakita: Design Method of Robust Kalman Filter for Multi Output Systems Based on Statistics, *Proc. the 2013 American Control Conference*, 1346/1351 (2013)
- 11) Y. Kaneda, Y. Irizuki and M. Yamakita: Robust Unscented Kalman Filter via l_1 regression and Design Method of Its Parameters, *Proc. 9th Asian Control Conference*, 1/6 (2013)
- 12) 森, 小亀: パラメータを含む Schur 性表現に基づく実多項式安定性の十分条件, *電気学会論文誌 C*, **119**-8, 1076/1077 (1999)

《 付 録 》

A. 補題 1 の導出

$\xi_i = e_{k,i} - C_{ii}(z^{-1})z_{k,i}$ とすると, (21) 式の拘束条件の式より,

$$\begin{aligned}\theta_k^i - \hat{\theta}_{k-1}^i &= K_k^i \xi_i, \\ v_{k,i}^s &= (1 - \phi_{k-d}^T K_k^i) \xi_i.\end{aligned}$$

よって,

(21) 式

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \min \xi_i^T (1 - \phi_{k-d}^T K_k^i)^T (R_i^s)^{-1} (1 - \phi_{k-d}^T K_k^i) \xi_i \\ + \xi_i^T (K_k^i)^T \left(P_{k-1}^i \right)^{-1} K_k^i \xi_i + \lambda_i |z_{k,i}| \\ \Leftrightarrow (24) \text{ 式}.\end{aligned}$$

ここで, (24) 式は $z_{k,i}$ のみに関する最適化問題となっていることに注意する. また, 最適解 $\hat{\theta}_k^i$ と $\hat{z}_{k,i}$ との間には

$\theta_k^i = \hat{\theta}_{k-1}^i + K_k^i(e_{k,i} - z_{k,i}^s)$ の関係が成り立つ. ゆえに, $z_{k,i}^s$ の推定値を $\hat{z}_{k,i}^s = C_{ii}(z^{-1})\hat{z}_{k,i}$ とすることで, $\hat{\theta}_k^i$ は (25) 式で計算することができる.

B. ロバスト STC の解析解

今, W_i がスカラーであることに注意する. $\partial \|\hat{z}_{k,i}\|_1 := \frac{\partial \|z_{k,i}\|_1}{\partial z_{k,i}} \Big|_{z_{k,i}=\hat{z}_{k,i}}$ とすると, (24) 式において最適性の必要条件より次式が得られる.

$$\begin{aligned}-C_{ii}(z^{-1})(e_{k,i} - C_{ii}(z^{-1})\hat{z}_{k,i}) + \frac{\lambda_i}{2W_i} \partial \|\hat{z}_{k,i}\|_1 &= 0. \\ \Leftrightarrow C_{ii}(z^{-1}) \left(e_{k,i} - \sum_{j=1}^{n-1} c_{ii}^j \hat{z}_{k-j,i} - \hat{z}_{k,i} \right) & \\ - \frac{\lambda_i}{2W_i} \partial \|\hat{z}_{k,i}\|_1 &= 0. \\ \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{n-1} c_{ii}^l e_{k-l,i} - \sum_{l=0}^{n-1} c_{ii}^l \sum_{j=1}^{n-1} c_{ii}^j \hat{z}_{k-j-l,i} & \\ - \sum_{j=1}^{n-1} c_{ii}^j \hat{z}_{k-j,i} - \hat{z}_{k,i} - \frac{\lambda_i}{2W_i} \partial \|\hat{z}_{k,i}\|_1 &= 0. \quad (\text{B.1})\end{aligned}$$

ここで, $e'_{k,i}$ を次式で定義する.

$$\begin{aligned}e'_{k,i} &= \sum_{l=0}^{n-1} c_{ii}^l e_{k-l,i} \\ &\quad - \sum_{l=0}^{n-1} c_{ii}^l \sum_{j=1}^{n-1} c_{ii}^j \hat{z}_{k-j-l,i} - \sum_{j=1}^{n-1} c_{ii}^j \hat{z}_{k-j,i},\end{aligned}$$

このとき, (B.1) 式は次式として書き直すことができる.

$$e'_{k,i} - \hat{z}_{k,i} - \frac{\lambda_i}{2W_i} \partial \|\hat{z}_{k,i}\|_1 = 0.$$

今, 定義より絶対値の微分は劣勾配で与えられるため, 最適解 $\hat{z}_{k,i}$ は次式として計算できる.

$$\begin{cases} \hat{z}_{k,i} = e'_{k,i} - \frac{\lambda_i}{2W_i} & \hat{z}_{k,i} > 0, \\ \hat{z}_{k,i} \in e'_{k,i} - \frac{\lambda_i}{2W_i} [-1, 1] & \hat{z}_{k,i} = 0, \\ \hat{z}_{k,i} = e'_{k,i} + \frac{\lambda_i}{2W_i} & \hat{z}_{k,i} < 0, \end{cases}$$

$$\therefore \hat{z}_{k,i} = \begin{cases} e'_{k,i} - \frac{\lambda_i}{2W_i} & e'_{k,i} > \frac{\lambda_i}{2W_i} \\ 0 & -\frac{\lambda_i}{2W_i} \leq e'_{k,i} \leq \frac{\lambda_i}{2W_i} \\ e'_{k,i} + \frac{\lambda_i}{2W_i} & e'_{k,i} < -\frac{\lambda_i}{2W_i} \end{cases}.$$

C. 定理 2 の証明

最初に, 外れ値の推定誤差の分散が有界であることを示す.

今, $\eta_i \in [-1, 1]$ を定義する. このとき, (24) 式に関する最適性の必要条件は次式で表わされる.

$$\forall z_{k,i}, \quad -2W_i(e_{k,i} - \hat{z}_{k,i}^s) + \lambda_i \eta_i = 0.$$

η_i はランダムに選択可能であるため, 確率変数とみなしても一般性は失われない. また, η_i の選択はほかの確率変数に依存しないため, ほかの確率変数と独立である. 今, パラメータ λ_i は (26) 式で与えられるため, 次式が成り立つ.

$$e_{k,i} - \hat{z}_{k,i}^s = \sigma_i \eta_i.$$

よって, (21) 式より,

$$\begin{aligned} z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s &= e_{k,i} - \phi_{k-d}^T (\theta_k^i - \hat{\theta}_{k-1}^i) - v_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s, \\ &= \sigma_i \eta_i - \phi_{k-d}^T (\theta_k^i - \hat{\theta}_{k-1}^i) - v_{k,i}^s. \end{aligned}$$

今, 仮定より $\theta_k^i = \theta_{k-1}^i$ が成り立ち, また各確率変数が独立であることに注意する. このとき, $\eta_i^2 \leq 1$ より, $z_{k,i}^s$ の推定誤差の分散はつぎの不等式で抑えられる.

$$\begin{aligned} E[(z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s)^2] &\leq \phi_{k-d}^T P_{k-1}^i \phi_{k-d} + R_i^s + \sigma_i^2 \\ &= 2(\phi_{k-d}^T P_{k-1}^i \phi_{k-d} + R_i^s). \quad (C.1) \end{aligned}$$

よって, $E[(z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s)^2]$ は有界である. また, 仮定より $z_{k,i} - \hat{z}_{k,i}$ はホワイト性をもつため, (23) 式より $E[(z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s)^2] = \sum_{j=0}^{n-1} (c_{ii}^j)^2 E[(z_{k-j,i} - \hat{z}_{k-j,i})^2]$ となる. 今, 仮定より $(c_{ii}^j)^2$ もまた Schur 多項式の係数となるため, $E[(z_{k,i} - \hat{z}_{k,i})^2]$ もまた有界となる.

最後に, 推定されたパラメータを用いて (27) 式が成り立つことを示す. まず, システムのパラメータが既知の場合を考える. (17), (22) 式より次式が成り立つ.

$$s_{k,i} - s_{k,i}^* = C_{ii}(z^{-1})(\hat{z}_{k,i} - z_{k,i}).$$

よって, (23) 式より, 次式が導かれる.

$$s_{k,i} - s_{k,i}^* = \hat{z}_{k,i}^s - z_{k,i}^s.$$

(C.1) 式より, $s_{k,i} - s_{k,i}^*$ の分散は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} E[(s_{k,i} - s_{k,i}^*)^2] &= E[(z_{k,i}^s - \hat{z}_{k,i}^s)^2] \\ &\leq 2(\phi_{k-d}^T P_{k-1}^i \phi_{k-d} + R_i^s). \end{aligned}$$

ゆえに, $E[(s_{k,i} - s_{k,i}^*)^2]$ もまた有界である. P_k^i ($k \rightarrow \infty$) が十分小さいとき, すなわち $\phi_{k-d}^T P_{k-1}^i \phi_{k-d} \ll R_i^s$ を満たすとき, (27) 式は成り立つ. 4.2 節では, 外れ値環境下においても (30) 式を用いることで推定誤差の共分散行列が収束することを示している. 実際, (30) 式より, つぎの不等式が得られる.

$$\begin{aligned} P_k^i - P_{k-1}^i &= -K_k^i \phi_{k-d}^T P_{k-1}^i \\ &= -\frac{P_{k-1}^i \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T P_{k-1}^i}{\phi_{k-d}^T P_{k-1}^i \phi_{k-d} + R_i^s} \leq 0. \end{aligned}$$

システムのパラメータが未知の場合, 拘束面は推定されたパラメータを用いて次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{s}_{k+d} &= \hat{G}_k(z^{-1})u_k \\ &\quad + \hat{F}_k(z^{-1})(y_k - \hat{z}_k) - C(z^{-1})r_{k+d}. \quad (C.2) \end{aligned}$$

今, $\hat{\phi}_k$ を次式で定義する.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_k &= \begin{bmatrix} Z^{-m-d+1}u_{k,1} \cdots Z^{-m-d+1}u_{k,p} \\ Z^{-n+1}(y_{k,1} - \hat{z}_{k,1}) \cdots Z^{-n+1}(y_{k,p} - \hat{z}_{k,p}) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

このとき, (C.2), (22) 式より次式が与えられる.

$$s_{k,i} - \hat{s}_{k,i} = \hat{\phi}_{k-d}^T (\theta_k^i - \hat{\theta}_k^i).$$

よって,

$$E[(s_{k,i} - \hat{s}_{k,i})^2] = \hat{\phi}_{k-d}^T P_k^i \hat{\phi}_{k-d}.$$

これは, P_k^i が十分小さいとき, $\hat{s}_k \rightarrow s_k$ となることを意味する. すなわち, システム (18) のパラメータが未知の場合においても $\hat{s}_k$ は理想的な値に収束する. よって, 未知システムに対して (27) 式は成り立つ.

[著 者 紹 介]

金 田 泰 昌 (正会員)

2005 年東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻修士課程修了. 同年 (株) リコー入社. 2007 年 (地独) 東京都立産業技術研究センター入所. 現在, 同センター情報技術グループ主任研究員. 博士 (工学). 状態推定理論, およびその実装方法・応用に関する研究に従事. IEEE, 電気学会, 各会員.

入 月 康 晴 (正会員)

2002 年名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻博士課程修了. 博士 (工学). 現在, (地独) 東京都立産業技術研究センター情報技術グループ主任研究員. 知能化技術, 非線形モデリング, 組み込みシステムの信頼性向上に関する研究開発に従事. 電気学会, 日本知能情報ファジィ学会, 各会員.

山 北 昌 毅 (正会員)

1989 年東京工業大学制御工学専攻修了 (工学博士). 同年同制御工学科助手. 93 年豊橋技術科学大学情報工学系講師. 95 年より東京工業大学制御システム工学科助教授. 2000 年より同大学大学院機械制御システム専攻助教授 (2007 年より准教授). ロボット工学, 適応学習制御, 非線形ロバスト制御などの研究に従事. IEEE, システム制御情報学会, 電気学会, 日本ロボット学会, 各会員.