一定距離型の確率的移動によるブロードキャスト制御

田 中 洋 輔*・東 俊 一*・杉 江 俊 治*

Broadcast Control with Constant-distance Random Movement

Yosuke TANAKA*, Shun-ichi AZUMA* and Toshiharu SUGIE*

This paper presents a new broadcast control method for multi-agent systems. By restricting the objective functions to a class of functions, we derive simple broadcast controllers with constant-distance random movement. This enables us to construct high performance broadcast controllers with a small number of tuning parameters. The proposed controllers are proven to asymptotically achieve given tasks with probability one. The performance is demonstrated by numerical simulation.

Key Words: multi-agent system, broadcast control, consensus

1. はじめに

マルチエージェントシステムとは、複数のエージェントが協力してあるタスクを達成するようなシステムのことである。今注目されるスマートグリッド、スマートシティをはじめとし、マルチロボットシステム、センサネットワークなどが応用先として挙げられる^{1), 2)}。

マルチエージェントシステムに対しては、これまでさまざまな成果が得られているが^{3)~7)}、本論文では特に、近年文献8)で考案された「ブロードキャスト制御」に着目する。これは、**Fig. 1**のように、エージェント群とブロードキャスト制御器で構成されるシステムにおいて、エージェント同士が情報交換（通信）を行わずに、ブロードキャスト制御器から送られる同一の指令のみを利用して、望みのタスクを実現するよう制御する手法である。ここで、ブロードキャスト制御器は、全体のタスクの達成度という圧縮された情報のみを観測することができ、個々のエージェントの情報は観測することができないことに注意する。この制御法は、エージェントを識別する必要がない、各エージェントが送信機能を搭載しなくてよい、といった従来のエージェント同士の通信を用いた制御法^{4)~6)}にない利点を持ち合わせている。

文献8)で提案されたブロードキャスト制御の方法をまとめるとつぎのようになる。まず、所望のタスクはある目的関数によって、その達成度が表現されているものとする。各エージェントは、最初にランダムな方向に移動し、この移動前後の目的関数の変化から、その地点における目的関数の勾配の

Fig. 1 Broadcast control of multi-agent systems

近似値を取得する。そして、この勾配情報に基づき、目的関数が減ると期待される地点へ移動する。各エージェントはこの2つの移動を繰り返す。このようにして、各エージェントの位置の更新にランダム要素を含めることで、同一の指令にもかかわらず各エージェントの役割分担を実現し、タスクを達成できることが知られている。

しかし、このブロードキャスト制御は、エージェント数に比例してタスクの達成までの時間が長くなる（収束が遅くなる）という欠点が知られている。加えて、タスクを達成するためには、エージェントの移動距離を時間とともに適切に減少させる必要があるが、この移動距離を設定するパラメータの数が多くなり、設計者の負担が大きくなってしまっている。以上の点を解消することで、ブロードキャスト制御はさらに広い範囲で利用されるものと考えられる。

そこで本論文では、上述した確率的移動の際の距離を定数とし、調整すべきパラメータの数を減らした制御器を提案する。そしてこの制御器に対し、タスクの達成度を表す目的

* 京都大学大学院情報学研究科 宇治市五ヶ庄

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Gokasho, Uji

(Received January 17, 2013)

(Revised July 8, 2013)

関数が、2 回微分すると定数になるようなクラスに限定することで、提案する制御器が確率 1 でタスクを近似的に達成できることを証明する。

以下ではまず、文献 8) の標準的なブロードキャスト制御と、そこに存在する問題点を指摘する。つぎに、この問題点を解決する、一定距離型の確率的移動によるブロードキャスト制御を提案し、この制御器により、ある限定したクラスの目的関数で表わされるタスクが確率 1 で達成されることを示す。最後に、数値シミュレーションによってその有効性を検証する。

[記法] $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{Z}_{0+}$ はそれぞれ実数, 正の実数, 非負の整数の集合を表わす。0 でスカラの零と零ベクトルの両方を記す。ベクトル $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^\top \in \mathbf{R}^n$ に対し、そのユークリッドノルムを $\|x\|$ で表わし、 $x^{(-1)}$ で $[x_1^{-1} \ x_2^{-1} \ \cdots \ x_n^{-1}]^\top$ を表現する。また、ベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ とそのスカラ値関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ に関して、

$$\nabla f(x) := \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right]^\top$$

$$\nabla^2 f(x) := \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \nabla f(x) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla f(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \nabla f(x) \right]$$

とする。また、確率変数 X, Y に対して、 $\mathbb{P}(X = a)$ で $X = a$ となる確率を、 $\mathbb{E}(X)$ で X の期待値を表わし、 $\mathbb{E}(X|Y)$ で、 Y が与えられたときの X の条件付き期待値を表わす。

2. 問題設定

Fig. 2 のシステムを考える。これは、Fig. 1 をブロック線図で表わしたものであり、 N 台のエージェント $P_1, P_2, \dots, P_N$ と、それらに搭載されるローカル制御器 $K_1, K_2, \dots, K_N$ 、およびブロードキャスト制御器 B で構成される。

エージェント P_i は次式で記述される。

$$P_i: x_i(t+1) = x_i(t) + u_i(t) \quad (1)$$

ここで、 $x_i(t) \in \mathbf{R}^n$, $u_i(t) \in \mathbf{R}^n$ はそれぞれ位置、入力であり、 t は離散時刻である。以下、表記の都合上、エージェント群の位置をまとめて

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1^\top(t) & x_2^\top(t) & \cdots & x_N^\top(t) \end{bmatrix}^\top \in \mathbf{R}^{nN} \quad (2)$$

と記すことにする。

ローカル制御器 K_i は

$$K_i: \begin{cases} \xi_i(t+1) = f(t, \xi_i(t), v(t)) \\ u_i(t) = g(t, \xi_i(t), v(t)) \end{cases} \quad (3)$$

で与えられる。 $\xi_i(t) \in \mathbf{R}^\mu$ は状態、 $v(t) \in \mathbf{R}$ はブロードキャスト制御器 B から送られる信号であり、 $u_i(t) \in \mathbf{R}^n$ は K_i の出力である。さらに、 $f: \mathbf{Z}_{0+} \times \mathbf{R}^\mu \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^\mu$, $g: \mathbf{Z}_{0+} \times \mathbf{R}^\mu \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ は、この制御器を記述する関数であり、後ほど、設計パラメータとして扱われる。関数 f, g , および初期状態 $\xi_i(0)$ は N 台すべてのエージェントに対して同じものであると仮定する。この仮定によって、エージェントは区別されることなく扱われ、大規模化に対応できるよう

Fig. 2 Broadcast control system

になる。

B はエージェント群のタスクの達成度を表わすスカラ関数 $J: \mathbf{R}^{nN} \rightarrow \{0\} \cup \mathbf{R}_+$ の値を各時刻で観測し、エージェント群に同一の指令を送るブロードキャスト制御器

$$B: v(t) = h(J(x(t))) \quad (4)$$

である。 $v(t) \in \mathbf{R}$ は出力であり、 $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ はこの制御器を記述する関数である。ここで、 B はすべてのエージェントの位置を把握することはできず、スカラ値 $J(x(t))$ という圧縮された情報しか得られない点に注意する。

Fig. 2 のシステムに対して、文献 8) で設定されたブロードキャスト制御問題は、つぎのものである。

問題 1 (ブロードキャスト制御問題) Fig. 2 のシステムに対し、制御目的を表わす目的関数 $J: \mathbf{R}^{nN} \rightarrow \{0\} \cup \mathbf{R}_+$ が任意に与えられるものとする。このとき、エージェント群の任意の初期位置 $x(0) \in \mathbf{R}^{nN}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(x(t)) = \min_{x \in \mathbf{R}^{nN}} J(x) \quad (5)$$

を満たすような $K_1, K_2, \dots, K_N$ (設計パラメータ f, g) と B (設計パラメータ h) を求めよ。□

問題 1 において、目的関数 J を適切に設定することによって、さまざまなタスクを実行することができる。たとえば、 J を

$$J(x(t)) := \sum_{i=1}^N \|x_i(t) - x_d\|^2 \quad (6)$$

とすると、エージェント群を位置 $x_d \in \mathbf{R}^n$ に集合させる、すなわち

$$x_1(\infty) = x_2(\infty) = \cdots = x_N(\infty) = x_d$$

を実現することができる。

(注意) (6) 式に対する問題 1 について、以下の点に注意する。(6) 式で指定されるタスクは、

- (a) 各エージェントが自らの位置 $x_i(t)$ を知る事ができる
- (b) ブロードキャスト制御器 B がすべてのエージェントの位置 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ を知る事ができる

の 2 点が成り立つときに、各エージェントに $x_i(t)$ から x_d まで進行させる入力を与えることで、容易に実現することがで

きる。しかし、本論文では、Fig. 2 に示されるように、(a), (b) が成立しないため、(6) 式で表わされるタスクを実現できる自明な解は存在しない。□

3. 標準的なブロードキャスト制御とその問題点

本章では、文献 8) で提案された標準的なブロードキャスト制御とその問題点を指摘する。

3.1 標準的なブロードキャスト制御

問題 1 の解として文献 8) で提案された制御器は、以下のようを与えられる。

● ローカル制御器 K_i

$$f(t, \xi_i(t), v(t)) = \begin{cases} \begin{bmatrix} r_i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} & \text{if } t \text{ is even} \\ \xi_i(t) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (7)$$

$$g(t, \xi_i(t), v(t)) = \begin{cases} c(t)r_i(t) & \text{if } t \text{ is even} \\ -c(t)\xi_{i1}(t) - a(t)\frac{v(t) - \xi_{i2}(t)}{c(t)}\xi_{i1}^{(-1)}(t) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (8)$$

● ブロードキャスト制御器 B

$$h(J(x(t))) = J(x(t)) \quad (9)$$

ここで $\xi_i(t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ であり、 $\xi_{i1}(t) \in \mathbf{R}^n$ は $\xi_i(t)$ の第 1 要素から第 n 要素を並べたもの、 $\xi_{i2}(t) \in \mathbf{R}$ は $\xi_i(t)$ の第 $n+1$ 要素を表わす。すなわち、 $\xi_i(t) = [\xi_{i1}^\top(t) \ \xi_{i2}(t)]^\top$ である。また、 $r_i(t) \in \mathbf{R}^n$ はある確率分布に従う確率変数であり、 $c(t) \in \mathbf{R}_+$ 、 $a(t) \in \mathbf{R}_+$ はこの制御器のゲインで、 $c(t)$ は

$$c(t) = c(t-1) \quad \forall t \in \{1, 3, 5, \dots\} \quad (10)$$

を満たすものである。

この制御器を使用した際の各エージェントは、Fig. 3 に示されるような 2 種類の移動を繰り返す。1 つは、同図 (a) にあるような、確率的移動とよばれるランダムな方向への移動である。もう 1 つは、同図 (b) にあるような、確率的移動前後の目的関数の値の差から計算された点への移動である。これは確定的移動とよばれる。

(8) 式の $a(t)$ 、 $c(t)$ はそれぞれ確定的移動、確率的移動の際のステップ幅を表わし、文献 8) では、文献 9) の場合と同様に、条件

$$(A1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty$$

$$(A2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a^2(t)}{c^2(t)} < \infty$$

とほかのいくつかの条件が成立するとき、この制御器が、エージェント群の位置 x を $J(x)$ の局所最小点 x^* に確率収束させることが示されている。したがって、文献 8) で提案された制御器では、条件 (A1)、(A2) を満たすように a と c を設定する必要があった。

Fig. 3 Agent motion by K_i and B

Fig. 4 Convergence of $J(x(t))$ for two parameter settings

3.2 問題点

しかしながら、パラメータ a 、 c の設計に関して、以下の問題点がある。

1 つは、設定するパラメータの数が多い点である。たとえば、条件 (A1)、(A2) を満たす a 、 c の組として、

$$a(t) := \frac{a_0}{\left(\frac{t-1}{2} + A\right)^\alpha} \quad (11)$$

$$c(t) := \begin{cases} \frac{c_0}{\left(\frac{t}{2} + 1\right)^\gamma} & \text{if } t \text{ is even} \\ c(t-1) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (12)$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \gamma > 0, \quad \alpha - \gamma > \frac{1}{2} \quad (13)$$

という形が提案されている^{8)~11)}が、これを用いる場合には a_0 、 A 、 α 、 c_0 、 γ という 5 つものパラメータを、エージェントに課せられる物理的な制約を考慮しながら、素早く収束するように、適切に定めなくてはならない。しかし、その設定方法に関して有効な方法は知られていない。たとえば Fig. 4 は、異なるパラメータ値を用いた場合の、目的関数の時間変化を表わしている。ただし、 J は (6) 式のように設定し、 $N = 50$ 、 $x_d := [0 \ 0]^\top$ とした。グラフ中の太線は、 $(a_0, c_0) = (0.6, 1.3)$ とした場合、細線は $(a_0, c_0) = (1.3, 0.6)$ とした場合である ($A = 450$ 、 $\alpha = 0.7$ 、 $\gamma = 0.3$)。 a_0 と c_0 の選択によって両者の収束速度には大きな違いが生じていることが見て取れる。

もう 1 つの問題点は、制御器におけるパラメータの役割、特徴が不明瞭であることである。実際、従来の標準的なブロードキャスト制御器では、エージェント P_i への制御入力 $u_i(t)$ を求める (7)、(8) 式において、調整すべきパラメータ a 、 c が混在しており、ある組 (a, c) が求める設計仕様を満たしていなかった場合に、どちらのパラメータをどう調整すればよいのかもよくわからない。

4. 一定距離型の確率的移動によるブロードキャスト制御

本章では、確率的移動の際の距離 $c(t)$ を定数（すなわち $c(0) = c(1) = \dots$ ）とするようなブロードキャスト制御を提案する。

4.1 提案制御器

ブロードキャスト制御器 B は (9) 式と同じものとする。一方、ローカル制御器は Fig. 5 で示されるように、2つのローカルサブ制御器 K_{i1} , K_{i2} で構成されるものとする。 K_{i1} は、

$$K_{i1} : \begin{cases} \xi_i(t+1) = f_1(t, \xi_i(t), v(t)) \\ u_{i1}(t) = g_{11}(t, \xi_i(t), v(t)) \\ w_i(t) = g_{12}(t, \xi_i(t), v(t)) \end{cases} \quad (14)$$

$$f_1(t, \xi_i(t), v(t)) = \begin{cases} \begin{bmatrix} r_i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} & \text{if } t \text{ is even} \\ \xi_i(t) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (15)$$

$$g_{11}(t, \xi_i(t), v(t)) = \begin{cases} cr_i(t) & \text{if } t \text{ is even} \\ -c\xi_{i1}(t) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (16)$$

$$g_{12}(t, \xi_i(t), v(t)) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \text{ is even} \\ \frac{v(t) - \xi_{i2}(t)}{c} \xi_{i1}^{(-1)}(t) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (17)$$

と与えられるものであり、 $u_{i1}(t) \in \mathbf{R}^n$, $w_i(t) \in \mathbf{R}^n$ はこのサブ制御器の出力である。 $c \in \mathbf{R}_+$ はゲインであり、 t によらない定数である。また、 $\xi_{i1}(t)$, $\xi_{i2}(t)$ は (8) 式で用いられたものと同じである。

ローカルサブ制御器 K_{i2} は

$$K_{i2} : u_{i2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \text{ is even} \\ -a(t)w_i(t) & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases} \quad (18)$$

である。ただし、 $u_{i2}(t) \in \mathbf{R}^n$, $a(t) \in \mathbf{R}_+$ はそれぞれ出力、ゲインである。

ローカル制御器 K_i の基本的な構造は (7), (8) 式のものと同じであるが、ゲイン c が定数となっている点に注意する。

4.2 収束定理

つぎに、提案制御器によって、与えられたタスクが確率 1 で達成されることを示そう。

まず、ローカル制御器 K_i とブロードキャスト制御器 B に対して以下が成り立つ。

[補題 1] Fig. 2 のシステムに対し、目的関数 $J : \mathbf{R}^{nN} \rightarrow \{0\} \cup \mathbf{R}_+$ が与えられるものとする。また、 B , K_{i1} , K_{i2} は (4), (9), (14)~(18) 式で与えられているものとする。このと

Fig. 5 Structure of local controller K_i

き、以下の 2 つの条件が成り立つならば、すべての $s \in \mathbf{Z}_{0+}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して、

$$\mathbb{E} \left(\frac{J(x(2s+1)) - J(x(2s))}{c} r_i^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) = \frac{\partial J(x)}{\partial x_i}(2s) \quad (19)$$

が成り立つ。

(B1) すべての $x \in \mathbf{R}^{nN}$ に対し、関数 J は 3 階微分可能であり、すべての $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して、 $\frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 J(x) = 0$ が成り立つ。

(B2) $r_i(t)$ の第 j 要素を $r_{ij}(t)$ と記す。このとき、 $r_{ij}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, n$, $t = 0, 1, \dots$) はベルヌーイ分布

$$\begin{cases} \mathbb{P}(r_{ij}(t) = 1) = 0.5 \\ \mathbb{P}(r_{ij}(t) = -1) = 0.5 \end{cases}$$

に従う互いに独立な確率変数である。

(証明) Fig. 5, (1), (14), (16), (18) 式より、 $x_i(2s)$ と $x_i(2s+1)$ の関係は、

$$x_i(2s+1) = x_i(2s) + cr_i(2s) \quad (20)$$

となる。これを、(2) 式と $r(t) := [r_1^\top(t) \ r_2^\top(t) \ \dots \ r_N^\top(t)]^\top \in \mathbf{R}^{nN}$ を用いて、すべてのエージェント分をまとめると、つぎのようになる。

$$x(2s+1) = x(2s) + cr(2s) \quad (21)$$

また、(B1) に注意して、 $J(x(2s) + cr(2s))$ をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} J(x(2s) + cr(2s)) &= J(x(2s)) + cr^\top(2s) \nabla J(x(2s)) \\ &\quad + \frac{1}{2} c^2 r^\top(2s) \nabla^2 J(\bar{x}(2s)) r(2s) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ただし、 $\bar{x}(2s)$ は、 $x(2s)$ と $x(2s) + cr(2s)$ を結んだ線分上のある点である。

(21), (22) 式より、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} (J(x(2s+1)) - J(x(2s))) r_i^{(-1)}(2s) \\ &= \frac{1}{c} (J(x(2s) + cr(2s)) - J(x(2s))) r_i^{(-1)}(2s) \\ &= (r^\top(2s) \nabla J(x(2s))) r_i^{(-1)}(2s) \\ &\quad + \frac{1}{2} c (r^\top(2s) \nabla^2 J(\bar{x}(2s)) r(2s)) r_i^{(-1)}(2s) \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。ここで、付録 A に示した補題 2 から、(23) 式の右辺第 1 項に関して、 $x(2s)$ が与えられたときの条件付き期待値が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left((r^\top(2s) \nabla J(x(2s))) r_i^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(r_i^\top(2s) \frac{\partial J(x)}{\partial x_i}(2s) \right) r_i^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j \neq i} \mathbb{E} \left(\left(r_j^\top(2s) \frac{\partial J(x)}{\partial x_j}(2s) \right) r_i^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) \\
& = \frac{\partial J(x)}{\partial x_i}(2s) \quad (24)
\end{aligned}$$

一方で、(B1) のもとで $\nabla^2 J(\bar{x})$ が定数であることに注意すると、同様に、付録 A の補題 2 から、(23) 式の右辺第 2 項に関して、 $x(2s)$ が与えられたときの条件付き期待値が、

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\frac{c}{2} \left(r^\top(2s) \nabla^2 J(\bar{x}(2s)) r(2s) \right) r_i^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) \\
& = \frac{c}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left(\left(r_j^\top(2s) \frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}(2s) r_k(2s) \right) r_i^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) \\
& = 0 \quad (25)
\end{aligned}$$

となる。(23)~(25) 式より、(19) 式が得られる。□

この補題においては、(B1) が従来のブロードキャスト制御に課せられるものとは異なっており、これが、確率的移動が一定の場合にタスクの達成を保証する鍵となる。この条件が満たされるタスクとしては、たとえば (6) 式のものが挙げられる。

補題 1 から以下の定理が得られる。

《定理 1》 Fig. 2 のシステムに対し、目的関数 $J: \mathbf{R}^{nN} \rightarrow \{0\} \cup \mathbf{R}_+$ が与えられるものとする。また、 B, K_{i1}, K_{i2} は (4), (9), (14)~(18) 式で与えられているものとし、 $x^* \in \mathbf{R}^{nN}$ は $\frac{\partial J(x^*)}{\partial x} = 0$ を満たすあるベクトルとする。このとき、与えられた初期位置 $x(0) \in \mathbf{R}^{nN}$ に対して、条件 (A1), (B1), (B2) と以下の 4 つの条件が成り立つならば、確率 1 で、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| \leq c\sqrt{nN} \quad (26)$$

が成り立つ。

(C1) 実数 $\tau \in \mathbf{R}$ とベクトル $\theta \in \mathbf{R}^{nN}$ に対して、微分方程式

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = -\nabla J(\theta(\tau)) \quad (27)$$

は漸近安定な平衡点 θ^* をもつ。また、ある定数 $\delta > 0$ が存在して、すべての $t \in \mathbf{Z}_{0+}$ に対し $J^2(x(t)) \leq \delta$ が成り立つ。

(C2) 初期値 $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbf{R}^{nN}$ に対する (27) 式の微分方程式の解を $\theta(\tau | \theta_0) \in \mathbf{R}^{nN}$ とし、 $\mathbf{D}(x^*) := \{\theta_0 \in \mathbf{R}^{nN} | \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau | \theta_0) = x^*\}$ と定義する。このとき、確率 1 で、 $x(t) \in \mathbf{F}$ を満たす $t \in \mathbf{Z}_{0+}$ が無限個存在するようなコンパクト集合 $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{D}(x^*)$ が存在する。

(C3) 確率 1 で、すべての $t \in \mathbf{Z}_{0+}$ に対し $\|x(t)\| < \infty$ が成り立つ。

(C4) K_{i2} のゲイン $a(t) \in \mathbf{R}_+$ に対して、以下が成り立つ。

$$\sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty$$

(証明) まずは、偶数時刻 ($t = 2s$) において、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|x(2s) - x^*\| = 0 \quad (28)$$

が確率 1 で成立することを示す。Fig. 5, (1), (14)~(16),

(18) 式から、エージェント i の偶数時刻でのダイナミクスは、

$$x_i(2s+2) = x_i(2s) - a(2s+1)w_i(2s+1) \quad (29)$$

となる。ただし、(4), (9), (14), (15), (17) 式から、

$$w_i(2s+1) = \frac{J(x(2s+1)) - J(x(2s))}{c} r_i^{(-1)}(2s) \quad (30)$$

となっている点に注意する。ここで、 $w_i(2s+1)$ とその期待値の差を表わす変数をつぎのように導入する。

$$e_i(2s+1) := w_i(2s+1) - \mathbb{E}(w_i(2s+1) | x(2s)) \quad (31)$$

すると、(A1), (B1), (B2) のもとで成立する補題 1 と (2), (29)~(31) 式から、偶数時刻におけるエージェント群のダイナミクスは、

$$\begin{aligned}
x(2s+2) &= x(2s) - a(2s+1) \nabla J(x(2s)) \\
&\quad - a(2s+1) e(2s+1) \quad (32)
\end{aligned}$$

と表現できる。ただし、

$$e(t) := \begin{bmatrix} e_1^\top(t) & e_2^\top(t) & \cdots & e_N^\top(t) \end{bmatrix}^\top \in \mathbf{R}^{nN} \quad (33)$$

である。(32) 式は、付録 B の (B.1) 式に示した確率近似のアルゴリズムにおいて、 ζ, k, ϕ, κ をそれぞれ $x, 2s, \nabla J, e$ と置き換えたものに対応する。また、(C2), (C3), (A1) はそれぞれ、補題 3 に示される (B.1) 式のアルゴリズムの収束条件 (D1)~(D3) を意味し、さらに付録 C のようにして (B2), (C1), (C4) からもう 1 つの収束条件 (D4) の成立が示される。

したがって、(32) 式において、(A1), (B1), (B2), (C1)~(C4) が満たされるとき、確率 1 で、(28) 式が成り立つ。

つぎに、(B2), (21) 式より、偶数時刻の状態 $x(2s)$ と奇数時刻の状態 $x(2s+1)$ の間には、以下の関係が成り立つ。

$$\|x(2s+1) - x(2s)\| = c\sqrt{nN} \quad (34)$$

したがって (28), (34) 式から、定理 1 の成立が示される。□

この定理によって、提案制御器が近似的にタスクを実現することが保証される。また、 c を小さく設定することで、その精度を任意によくできることがわかる。

定理 1 において仮定した 7 つの条件に関して説明しておく。(A1), (B2), (C4) は制御器のパラメータに関する条件である。ここで (C4) は、標準的なブロードキャスト制御器⁸⁾に課せられた条件 (A2) と比べて大幅に制約を減らしている。これが本論文で提案する制御器の大きな特徴である。(B1), (C1) は問題のパラメータに関する条件であり、与えられた J を解析することにより確認できる。(C2) は (C1) の J から作られる微分方程式の平衡点に関する条件、(C3) はエージェントの位置の有界性を示す条件であり、これらは確率近似アルゴリズムにおいて標準的なものである^{8), 9), 12)}。

つぎに、(26) 式について補足する。(26) 式は、エージェン

ト群の位置が x^* にどの程度近づくことができるかを表わしているが、この条件は、おのおののエージェントに対しては、以下のことを意味している点に注意する。

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_i^*\| \leq c\sqrt{n} \quad (35)$$

ここで、 $x_i^* \in \mathbf{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は、 $x^* = [x_1^{*\top} x_2^{*\top} \dots x_N^{*\top}]^\top$ を満たすベクトルである。(35) 式は、(B2)、および (20)、(28) 式から直接的に導かれる。

5. 数値シミュレーションによる検証

合意の達成を目的とする (6) 式の目的関数に対し、数値シミュレーションにより提案手法の有効性を検証する。ここで $n = 2$, $N = 50$, $x_d = [0 \ 0]^\top$ とし、 B , K_{i1} , K_{i2} は (4), (9), (14)~(18) 式のように与えられる。また、ゲイン $a(t)$, c はそれぞれ、

$$a(t) := \frac{2.2}{\left(\frac{t-1}{2} + 450\right)^{0.95}} \quad (36)$$

$$c := 0.4$$

と設定した。これらは条件 (A1), (C4) を満たしている。

このときの目的関数 $J(x)$ の時間変化は Fig. 6 の太線のようになる。一定距離型の確率的移動によるブロードキャスト制御を用いて、目的のタスクが達成されていることが確認できる。

また、グラフ中の細線は、標準的なブロードキャスト制御器⁸⁾によるシミュレーション結果である。ここで、 K_i , B は (4), (7)~(9) 式である。ただし、 $a(t)$ は (36) 式と同じにし、 c は、条件 (A2) を満足するように、(12) 式において、 $c_0 := 0.4$

Fig. 6 Time evolution of the objective function

Fig. 7 Convergence with $c = 0.04$ and $c = 0.4$

とした上で、4 種類の γ ($\gamma = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) に対する結果である。このグラフから、提案法は設計パラメータが少ないにもかかわらず従来法と同程度の制御性能を示すことも確認できる。

つぎに、提案法において、 c の大きさによって目的関数 $J(x)$ の時間変化がどう変わるかを確認しよう。Fig. 7 は、 c を 0.1 倍の $c = 0.04$ とした場合 (太線) と、上述の結果 (細線) を比較したものである。ただし、時間区間 [1000, 10000] に対応する部分を示している。この結果から、 c の値が小さいほうが、十分長い時間が経過した後の値が 0 に近づいていることがわかり、(26) 式が成立していることが確認される。

6. おわりに

本論文では、一定距離型の確率的移動によるブロードキャスト制御を提案した。最初に、ブロードキャスト制御問題に対する従来の標準的な制御器に含まれるパラメータに関する問題点を指摘した。つぎに、その問題点を解決するため、制御器の確率的移動の際の距離を定数とする制御器を提案し、この制御器を用いると、2 階微分を行なうと定数になるような目的関数で表わされるようなクラスのタスクが確率 1 で達成されることを証明した。最後に、合意制御を例に挙げて、この制御器を用いたシミュレーションを行ない、提案した制御法が有効であることを示した。

謝辞 本研究の一部は、科学研究費補助金萌芽研究 #23656270 および基盤研究 (A) #25249058 の助成を受けた。記して、謝意を表したい。

参考文献

- 1) M. Pipattanasomporn, H. Feroze and S. Rahman: Multi-Agent Systems in a Distributed Smart Grid: Design and Implementation, *IEEE Power Systems Conference and Exposition*, 1/8 (2009)
- 2) D.C. Parker, S.M. Manson, M.A. Janssen, M.J. Hoffmann and P. Deadman: Multi-Agent Systems for the Simulation of Land-Use and Land Cover Change: A Review, *Annals of the Association of American Geographers*, **93**-2, 314/337 (2003)
- 3) 藤田, 畑中: 協調制御～合意から被覆まで～, 第 52 回システム制御情報学会研究発表講演会誌, 1/6 (2008)
- 4) R. Olfati-Saber: Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, *Proceedings of the IEEE*, **95**-1, 215/233 (2007)
- 5) J. Cortes, S. Martinez, T. Karatas and F. Bullo: Coverage control for mobile sensing networks, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **20**-2, 243/255 (2004)
- 6) C.T. Abdallah and H.G. Tanner: Complex Networked Control Systems: Introduction to the Special Section, *IEEE Control Systems Magazine*, **27**-4, 30/32 (2007)
- 7) M. Mesbahi and M. Egerstedt: *Graph Theoretic Methods in Multi-Agent Networks*, Princeton University Press (2010)
- 8) S. Azuma, R. Yoshimura and T. Sugie: Broadcast Control of Multi-Agent Systems, *Automatica*, **49**-8, 2307/2316 (2013)
- 9) J.C. Spall: Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation, *IEEE*

Transactions on Automatic Control, **37-3**, 332/341 (1992)

- 10) 前田 裕: 同時摂動最適化法とその応用, システム制御情報学会誌, **5-4**, 47/53 (2008)
- 11) J.C. Spall: *Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control*, Wiley (2003)
- 12) H.J. Kushner and D.S. Clark: *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems*, Springer (1978)

《付 録》

A. 補題 1 の証明の補足

Fig. 2 のシステムに対し, 目的関数 $J: \mathbf{R}^{nN} \rightarrow \{0\} \cup \mathbf{R}_+$ が与えられるものとする. また, B, K_{i1}, K_{i2} は (4), (9), (14)~(18) 式で与えられているものとする. このとき, 以下の補題が成り立つ.

[補題 2] (B1) と (B2) が成立するものとする. このとき, 任意の $(i, j, k) \in \{1, 2, \dots, N\}^3$ に対し,

$$\mathbb{E} \left(\left(r_i^\top(2s) \frac{\partial J(x)}{\partial x_i}(2s) \right) r_j^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) = \begin{cases} \frac{\partial J(x)}{\partial x_i}(2s) & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbb{E} \left(\left(r_i^\top(2s) \frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}(2s) r_j(2s) \right) r_k^{(-1)}(2s) \middle| x(2s) \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ.

(証明) 以下では, 簡単のため, 時刻 $(2s)$ の表記を省略する. また, $\left[\frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right]_l, \left[\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{lm}$ はそれぞれ $\frac{\partial J(x)}{\partial x_i}$ の第 l 成分, $\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ の第 (l, m) 成分を表わすことにする.

まず, (A.1) 式の成立を示す. (B2) より, $r_i(t)$ の各要素の逆数 $r_{il}^{-1}(t)$ もまた同じベルヌーイ分布に従う確率変数であることから, $(l, m) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ に対し,

$$\mathbb{E}(r_{il} r_{jm}^{-1} | x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, l) = (j, m) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

が成り立つ. ここで (A.3) 式と (B2), $\mathbb{E} \left(\left[\frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right]_l \middle| x \right) = \left[\frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right]_l$ に注意すると, (A.1) 式の左辺の第 p 要素は,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(r_i^\top \frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right) r_{jp}^{-1} \middle| x \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{l=1}^n r_{il} \left[\frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right]_l r_{jp}^{-1} \middle| x \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right]_l \mathbb{E}(r_{il} r_{jp}^{-1} | x) \\ &= \begin{cases} \left[\frac{\partial J(x)}{\partial x_i} \right]_p & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. これより, (A.1) 式が得られる.

つぎに, (A.2) 式を考える. (B2), (A.3) 式より, $(l, m, o) \in \{1, 2, \dots, n\}^3$ に対し,

$$\mathbb{E}(r_{il} r_{jm} r_{ko}^{-1}) = \begin{cases} \mathbb{E}(r_{ko}^{-1}) & \text{if } (i, l) = (j, m) \\ \mathbb{E}(r_{il}) & \text{if } (i, l) \neq (j, m) = (k, o) \\ \mathbb{E}(r_{jm}) & \text{if } (j, m) \neq (i, l) = (k, o) \\ \mathbb{E}(r_{il}) \mathbb{E}(r_{jm}) \mathbb{E}(r_{ko}^{-1}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

が成り立ち, (B2) から右辺はすべて 0 となる. 一方で, (B1) より, $\nabla^2 J(\bar{x})$ は $\bar{x}$ に依存しない定数であるから, $\mathbb{E} \left(\left[\frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{lm} \middle| x \right) = \left[\frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{lm}$ である. これと (A.4) 式を用いると, (A.2) 式の左辺の第 p 要素は,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\left(r_i^\top \frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} r_j \right) r_{kp}^{-1} \middle| x \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n r_{il} \left[\frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{lm} r_{jm} r_{kp}^{-1} \middle| x \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \left[\frac{\partial^2 J(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{lm} \mathbb{E}(r_{il} r_{jm} r_{kp}^{-1} | x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. すなわち, (A.2) 式が成り立つ. $\square$

B. Robbins-Monro アルゴリズム

Robbins-Monro アルゴリズムは以下のように与えられる.

$$\zeta(k+1) = \zeta(k) - a(k)\phi(\zeta(k)) + a(k)\kappa(k) \quad (\text{B.1})$$

ここで, $\zeta(k) \in \mathbf{R}^q$ は状態, $a(k) \in \mathbf{R}_+$ はゲイン, $\phi: \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ はある関数, $\kappa(k) \in \mathbf{R}^q$ は確率変数である. このとき, 以下の補題が成り立つ¹²⁾.

[補題 3] 微分方程式

$$\dot{\zeta}(k) = -\phi(\zeta(k)) \quad (\text{B.2})$$

のある漸近安定平衡点を ζ^* とする. このとき, 以下の 4 つの条件が成り立つならば, 確率 1 で,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\zeta(k) - \zeta^*\| = 0$$

が成り立つ.

(D1) 初期値 $\zeta(0) = \zeta_0 \in \mathbf{R}^q$ に対する (B.2) 式の微分方程式の解を $\zeta(k | \zeta_0) \in \mathbf{R}^q$ とし, $\mathbf{G}(\zeta^*) := \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^q | \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k | \zeta_0) = \zeta^*\}$ と定義する. このとき, 確率 1 で, $\zeta(k) \in \mathbf{H}$ を満たす $k \in \mathbf{Z}_{0+}$ が無限個存在するようなコンパクト集合 $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}(\zeta^*)$ が存在する.

(D2) 確率 1 で, すべての $k \in \mathbf{Z}_{0+}$ に対し $\|\zeta(k)\| < \infty$ が成り立つ.

(D3) ゲイン $a(k)$ は,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a(k) = \infty$$

を満たす.

(D4) 任意の $\eta > 0$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{m \geq n} \left\| \sum_{k=n}^m a(k) \kappa(k) \right\| \geq \eta \right) = 0$$

が成り立つ. $\square$

C. (B2), (C1), (C4) から (D4) が成立することの証明

まず, a, e に関して, $H(\mu) := \sum_{s'=s}^{\mu} a(2s'+1)e(2s'+1)$

($\mu \geq s$) と定義すると,

$$H(\mu) = H(\mu-1) + a(2\mu+1)e(2\mu+1)$$

となるから,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H(\mu) | H(\mu-1)) \\ &= \mathbb{E}(H(\mu-1) + a(2\mu+1)e(2\mu+1) | H(\mu-1)) \\ &= H(\mu-1) + a(2\mu+1)\mathbb{E}(e(2\mu+1) | H(\mu-1)) \end{aligned} \quad (C.1)$$

が成り立つ. ここで (31) 式より, (33) 式の $e(t)$ に関して

$$\mathbb{E}(e(2s+1) | x(2s)) = 0 \quad \forall (s, x(2s)) \in \mathbf{Z}_{0+} \times \mathbf{R}^{nN} \quad (C.2)$$

なので, $e(2\mu+1)$ の期待値は $H(\mu-1)$ に依存せず, 常に 0 となることから, (C.1) 式から,

$$\mathbb{E}(H(\mu) | H(\mu-1)) = H(\mu-1)$$

が導かれる. よって $H(\mu)$ はマルチンゲールであり, すべての $\eta > 0$ に対して, Doob のマルチンゲール不等式

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{\mu \geq s} \left\| \sum_{s'=s}^{\mu} a(2s'+1)e(2s'+1) \right\| \geq \eta \right) \\ \leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{s'=s}^{\infty} a(2s'+1)e(2s'+1) \right\|^2 \right) \end{aligned} \quad (C.3)$$

を満たす¹²⁾. ここで (C.2) 式より, すべての $s_1, s_2 \in \mathbf{Z}_{0+}$ ($s_1 < s_2$) に対し,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^\top(2s_1+1)e(2s_2+1)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^\top(2s_1+1)e(2s_2+1) | x(2), x(4), \dots, x(2s_2))) \\ &= \mathbb{E}(e^\top(2s_1+1)\mathbb{E}(e(2s_2+1) | x(2), x(4), \dots, x(2s_2))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることに注意すると, (C.3) 式の右辺はつぎのように変形できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{s'=s}^{\infty} a(2s'+1)e(2s'+1) \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \left(\sum_{s'=s}^{\infty} a^2(2s'+1) \|e(2s'+1)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\eta^2} \sum_{s'=s}^{\infty} a^2(2s'+1) \mathbb{E}(\|e(2s'+1)\|^2) \end{aligned} \quad (C.4)$$

さらに, (B2), (C1), (30), (31), (33) 式より,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|e(2s'+1)\|^2) \\ &= \mathbb{E}(\|w(2s'+1)\|^2) - \|\mathbb{E}(w(2s'+1) | x(2s'))\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E}(\|w(2s'+1)\|^2) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\frac{4\delta}{c^2} \|r^{(-1)}(2s')\|^2 \right) \\ &= \frac{4nN\delta}{c^2} \end{aligned} \quad (C.5)$$

が成り立つ. (C.3)~(C.5) 式をまとめると,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{\mu \geq s} \left\| \sum_{s'=s}^{\mu} a(2s'+1)e(2s'+1) \right\| \geq \eta \right) \\ \leq \frac{4nN\delta}{\eta^2 c^2} \sum_{s'=s}^{\infty} a^2(2s'+1) \end{aligned} \quad (C.6)$$

となる. よって (C4) より, (C.6) 式で $s \rightarrow \infty$ を考えると, すべての $\eta > 0$ に対して,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{\mu \geq s} \left\| \sum_{s'=s}^{\mu} a(2s'+1)e(2s'+1) \right\| \geq \eta \right) = 0$$

となり, (D4) が成立する.

[著者紹介]

田 中 洋 輔

1989 年生. 2012 年京都大学工学部物理工学科卒業. 同年より同大学大学院情報学研究科修士課程に入学し, 現在に至る. システム情報制御学会の会員.

東 俊 一 (正会員)

1976 年生. 2004 年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程修了. 同年より日本学術振興会特別研究員, 2005 年京都大学大学院情報学研究科助手, 2007 年同助教, 2011 年同准教授となり現在に至る. この間, 2004~2005 年ジョージア工科大学客員研究員, 2009~2010 年ペンシルバニア大学客員研究員. ハイブリッドシステム制御論の研究に従事. 博士 (工学). 2005, 2008 年計測自動制御学会論文賞, 2011 年度同学会制御部門パイオニア賞などを受賞. IEEE, システム情報制御学会などの会員.

杉 江 俊 治 (正会員・フェロー)

1978 年京都大学大学院修士課程精密工学専攻修了. 84 年同博士後期課程研究指導認定退学. 78~80 年日本電信電話公社勤務. 84 年大阪府立大学工学部助手. 88 年京都大学工学部助教授を経て, 現在情報学研究科教授. ロバスト制御理論とその応用, システム同定などの研究に従事. 工学博士. システム情報制御学会, 日本鉄鋼協会, ロボット学会などの会員. IEEE フェロー.