大規模線形システムに対する低次元関数オブザーバの設計法

定本 知徳*・石崎 孝幸*,**・井村 順一*,**

Low-dimensional Functional Observer Design for Large-scale Linear Systems

Tomonori SADAMOTO*, Takayuki ISHIZAKI*,** and Jun-ichi IMURA*,**

This paper proposes a design method of low-dimensional linear functional observers on the basis of a model reduction approach. This method can guarantee not only stability preservation but also an a priori estimation error bound for the observer approximation. Moreover, owing to the fact that this method can be applied to any functional observers, the method is compatible with the standard feedback gain determination methods, such as pole placement techniques. The efficiency of the proposed method is shown through a numerical example for electric power network systems.

Key Words: large-scale systems, observer design, model order reduction

1. はじめに

近年、計算技術の目覚ましい発展にともない、大規模システムに対する制御の必要性が高まっている。たとえば、スマートグリッドにおいては、数百万世帯以上の需要家を含んだ大規模システムに対する電力需給バランスのための制御が求められる。このような大規模システムの制御を行なうためには、すべての状態をセンサにより計測することは困難であるため、入出力応答から状態を推定するオブザーバの設計が求められる。しかしながら、一般に既存のオブザーバはシステムと同程度の次元となることから、大規模システムに対するオブザーバは一般に高次元なものとなる。そのため、運用時の計算量が爆発的に増加し、カルマンフィルタなどのオブザーバを大規模システムに適用することは困難な場合が多い。したがって、計算量の観点から、低次元なオブザーバの設計問題は、大規模システムの制御を行なう上で非常に重要な課題である。

線形システムに対するオブザーバの設計法は、制御理論分野において数多く提案されている^{1)~5)}。しかしながら、これらの一連の研究では、推定誤差に対する外部入力の影響を厳密に打ち消すことを前提にして状態のすべてまたは一部を推定する方法が提案されており、いい換えれば、これらの設計

法において近似は全く用いられていない。そのため、推定誤差に大きく影響しない状態もオブザーバの状態空間に含める必要があり、低次元なオブザーバを直接的に導出することは一般に困難である。

一方、近似により低次元オブザーバを設計する手法として、低次元化したモデルに対してオブザーバを設計するアプローチが考えられる。たとえば文献6)では、平衡実現の打ち切りによって得られた低次元モデルに対してLuenberger型の低次元オブザーバを設計している。しかしながら、そのような設計においては、低次元化誤差と推定誤差との関係が明らかでないことから、所望の推定誤差以下になるよう低次元なオブザーバを設計することは難しい。

そこで、本稿では、設計者により与えられる所望の推定性能に関して、推定誤差がその仕様を満たすような新しい低次元オブザーバの設計法を提案する。Fig. 1に前述のアプローチと本手法のアプローチの違いを示す。本手法は前述の手法とは異なり、対象とするシステムに対して設計されたオブザーバを低次元化する、オブザーバ低次元化のアプローチに基づくものである。本稿でははじめに、低次元オブザーバの設計問題を扱うとき、初期状態および外部入力に対する推定誤差をともに考慮する必要があることを述べる。そこで、これらの重みつき和として評価関数を定義し、推定性能の指標として用いる。つぎに、モデル低次元化の手法、特に、文献7)にて提案されている射影に基づく構造保存低次元化の手法を用いて、低次元性と評価関数（推定性能の劣化）の関係を明らかにする。そして、この結果を用いて低次元オブザーバの系統的な設計法を提案する。提案法は対象とするシステムに対するオブザーバ設計と低次元化が独立しているため、既存のオブザーバの設計法が利用できるという利点をもつ。最後に、提案法の有効性を電力ネットワークを対象とした数値例によ

* 東京工業大学大学院情報理工学研究科
東京都目黒区大岡山 2-12-1

** JST CREST 川口市本町 4-1-8

* Graduate School of Information Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama,
Meguro-ku, Tokyo

** Japan Science and Technology Agency, CREST 4-1-8
Honcho, Kawaguchi

(Received May 27, 2013)

(Revised February 28, 2014)

Fig. 1 Schematic depiction toward low-dimensional observers

り示す。

本稿の構成はつぎのとおりである。2 章では、低次元オブザーバの設計問題を定式化する。3 章では、射影に基づく低次元オブザーバ設計法を提案する。加えて、推定性能劣化の理論的な上界を与える。4 章では提案法を電力ネットワークに適用し有効性を示す。最後に、5 章において結論を述べる。

記法 本稿では、以下の記法を用いる。

$\mathbb{R}$	実数の集合
I_n	$n \times n$ の単位行列
$M \prec \mathcal{O}_n$ ($M \preceq \mathcal{O}_n$)	(半) 負定対称行列 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$M \succ \mathcal{O}_n$ ($M \succeq \mathcal{O}_n$)	(半) 正定対称行列 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{im}(M)$	行列 M の列ベクトルによって張られる空間
$\text{tr}(M)$	行列 M のトレース
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	行列 $M_1, \dots, M_n$ をブロック対角要素にもつ行列

二乗可積分な信号 $v(t) \in \mathbb{R}^n$ に対する $\mathcal{L}_2$ ノルムを

$$\|v(t)\|_{\mathcal{L}_2} := \left(\int_0^\infty v^T(t)v(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

により定義する。安定かつプロパーな伝達関数行列 G の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムおよび安定かつ厳密にプロパーな伝達関数行列 G の $\mathcal{H}_2$ ノルムをそれぞれ

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} &:= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(j\omega)\|, \\ \|G(s)\|_{\mathcal{H}_2} &:= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{tr}(G(j\omega)G^T(-j\omega))d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

により定義する。ここで $\|\cdot\|$ は誘導 2 ノルムである。

2. 問題定式化

2.1 低次元オブザーバの設計問題

本節では、低次元オブザーバの設計問題を与える。本稿では

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ z = Sx \end{cases} \quad (1)$$

により定義される n 次元線形システムを対象とする。ここで、 $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $C \in \mathbb{R}^{m_y \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m_y \times m_u}$, $S \in \mathbb{R}^{m_z \times n}$ であり、 $y \in \mathbb{R}^{m_y}$ は観測出力、 $z \in \mathbb{R}^{m_z}$ は推定すべき状態の部分空間を表わす。本稿では説

明のため、安定な Σ に対する問題設定および主結果を述べる。不安定な Σ に対する拡張は 3.1 節の注意 2 において述べる。また、可観測性行列 $[C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T$ がフルランクであると仮定する。

(1) 式によって定義される Σ に対して、最小次元オブザーバ¹⁾

$$\Sigma_o: \begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + Hu + Gy \\ z_o = L\xi + My \end{cases} \quad (2)$$

を定義する。ここで、 $n_o := n - m_y$ として $F \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $H \in \mathbb{R}^{n_o \times m_u}$, $G \in \mathbb{R}^{n_o \times m_y}$, $L \in \mathbb{R}^{m_z \times n_o}$, $M \in \mathbb{R}^{m_z \times m_y}$ である。なお、初期状態は一般の場合も同様に議論可能であるが、以降では表記の煩雑さを避けるため $\xi(0) = 0$ とする。

ここで、後の議論のためオブザーバ Σ_o の性質について再考する。システム Σ の出力 z は、システムの初期状態 x_0 および、システムに印加される入力 $u(t)$ に依存して時刻とともに変動することから、 $z(t; x_0, u)$ と表わされる。同様に、観測出力は $y(t; x_0, u)$ と表わされる。オブザーバ Σ_o は、 $y(t; x_0, u)$ および $u(t)$ を入力とするシステムであるから、出力 z_o はシステムの初期状態 x_0 および u に依存し $z_o(t; x_0, u)$ と表わされる。さて、 u から z_o までの伝達関数は、 u から z までの伝達関数と同一となることが知られている⁴⁾。すなわち、 $z(t; x_0, u)$ と $z_o(t; x_0, u)$ の差は u に依存せず

$$e_z(t; x_0) := z(t; x_0, u) - z_o(t; x_0, u) \quad (3)$$

と表わされ、適切に F, H, G, L および M が設計されているとき、 $e_z(t; x_0)$ は時刻とともに収束する。このように、オブザーバ Σ_o とは、推定誤差 e_z への入力 u による影響を完全に消去した上で、初期状態 x_0 に依存する推定誤差を収束させる働きをもつ。

つぎに、 $\hat{n}_o \leq n_o$ とし、(1) 式によって定義される Σ に対して、 $\hat{n}_o$ 次元の低次元オブザーバ

$$\hat{\Sigma}_o: \begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = \hat{F}\hat{\xi} + \hat{H}u + \hat{G}y \\ \hat{z}_o = \hat{L}\hat{\xi} + \hat{M}y \end{cases} \quad (4)$$

を定義する。ここで、 $\hat{\xi}(0) = 0$, $\hat{F} \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times \hat{n}_o}$, $\hat{H} \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times m_u}$, $\hat{G} \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times m_y}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{m_z \times \hat{n}_o}$, $\hat{M} \in \mathbb{R}^{m_z \times m_y}$ である。推定信号 $\hat{z}_o$ は状態 $\hat{\xi}$ の関数であるので、以降では $\hat{\Sigma}_o$ を低次元関数オブザーバと呼ぶ^{2)~4)}。

オブザーバ Σ_o の場合と同様に、低次元オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ による推定誤差について考える。低次元オブザーバの出力 $\hat{z}_o$ はシステムの初期状態 x_0 および入力 u に依存し $\hat{z}_o(t; x_0, u)$ と表わされる。一般に、入力 u から $\hat{z}_o$ までの伝達関数は、 u から z_o までの伝達関数と異なるため、低次元オブザーバを用いた場合の推定誤差 $z - \hat{z}_o$ は x_0 のみならず入力 u にも依存することとなり

$$\hat{e}_z(t; x_0, u) := z(t; x_0, u) - \hat{z}_o(t; x_0, u) \quad (5)$$

として表わされる。これは、最小次元オブザーバの場合と異

なり、低次元関数オブザーバの設計問題ではシステムの初期状態 x_0 および入力 u をともに考慮する必要があることを示唆している。次節では、この観点から $\hat{\Sigma}_o$ の設計問題を定式化する。

2.2 オブザーバ低次元化による定式化

本節では、低次元関数オブザーバの設計問題を、オブザーバの低次元化問題として定式化する。(2) 式により定義される Σ_o の近似によって (4) 式の低次元関数オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ を設計する。具体的には、双直交射影⁸⁾を用いて

$$\begin{aligned}\hat{F} &= PFP^\dagger, \quad \hat{H} = PH, \quad \hat{G} = PG \\ \hat{L} &= LP^\dagger, \quad \hat{M} = M\end{aligned}\quad (6)$$

により $\hat{\Sigma}_o$ を設計することを考える。ここで、 $P \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times n_o}$, $P^\dagger \in \mathbb{R}^{n_o \times \hat{n}_o}$ は $PP^\dagger = I_{\hat{n}_o}$ を満たすものとし、 F, H, G, L および M は (3) 式の e_z が所望の収束率をもつよう設計されているものとする。

まずはじめに、オブザーバ低次元化問題における低次元化誤差を

$$\Delta(t; x_0, u) := e_z(t; x_0) - \hat{e}_z(t; x_0, u) \quad (7)$$

により定義する。ここで、 Δ は入力 u だけではなくシステムの初期状態 x_0 にも依存することに注意されたい。なぜなら、 x_0 に依存する観測出力 $y(t; x_0, u)$ から z_o への伝達関数と $y(t; x_0, u)$ から $\hat{z}_o$ への伝達関数は一般に異なるためである。線形システムにおいて入力応答と初期状態応答は独立に現れることから、入力 u による低次元化誤差 Δ_u を

$$\Delta_u(t) := \Delta(t; 0, u) \quad (8)$$

として定義し、低次元化誤差の初期状態に依存する項を

$$\Delta_{x_0}(t) := \Delta(t; x_0, 0) \quad (9)$$

により定義する。なお、任意の $c \geq 0$ に対して初期状態 cx_0 における初期値応答は $c\Delta_{x_0}$ となることから、以降では一般性を失うことなく $\|x_0\| = 1$ を仮定する。(8) および (9) 式の低次元化誤差をともに考慮するために評価関数

$$J(\Delta_{x_0}, \Delta_u) := \sqrt{w_{x_0} \|\Delta_{x_0}(t)\|_{L_2}^2 + w_u \|\Delta_u(t)\|_{L_2}^2} \quad (10)$$

を定義する。ここで、非負定数 w_{x_0}, w_u は近似誤差 Δ_{x_0} または Δ_u のどちらを重視するかを測る割合とするため、 $w_{x_0} + w_u = 1$ を満たすものとする。たとえば、 $w_{x_0} = 1$ とした場合には初期状態 x_0 に対する近似誤差が評価され、 $w_u = 1$ とした場合には入力 u に対する近似誤差が評価される。この評価関数 J が小さいことは、低次元オブザーバの推定値 $\hat{z}_o$ が対象システムの推定値 z_o のよい近似であることを表わすため、(10) 式の評価関数は推定性能の評価を与えている。以上のもと、(10) 式の J を小さくするような低次元オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ を求める問題として、オブザーバ低次元化問題を設定する。なお、

本稿では簡単のため u を大きさ 1 のインパルス入力、すなわち $\|u_0\| = 1$ を満たす任意の $u_0 \in \mathbb{R}^{m_u}$ に関して、入力 $u(t) = u_0 \delta(t)$ に対する低次元化誤差を評価する。

[問題 1] (1) 式の Σ に対し、(3) 式の $e_z(t; x_0)$ が所望の収束率をもつように Σ_o が与えられているとする。さらに、 $u(t) = u_0 \delta(t)$ として、(10) 式の評価関数を定義する。このとき、 $\|u_0\| = 1$ である任意の u_0 および与えられた正の定数 ϵ に対して

$$J(\Delta_{x_0}, \Delta_u) \leq \epsilon \quad (11)$$

を満たす、(4), (6) 式の $\hat{n}_o$ 次元関数オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ を求めよ。

問題 1 は、適切な F, H, G, L および M が与えられているという前提のもと、 $\hat{n}_o$ を決定し、(6) 式的双直交射影 P および $P^\dagger$ を求める問題であることに注意されたい。

3. 主 結 果

3.1 関数オブザーバ低次元化解析

本節では、問題 1 のオブザーバ低次元化問題を解くことにより、(4) 式の低次元関数オブザーバを設計する手法について述べる。そのために本小節では、(6) 式によって定義される双直交射影 P および $P^\dagger$ と (10) 式によって定義される評価関数 $J(\Delta_{x_0}, \Delta_u)$ の関係を明らかにする。

以降の議論のため、つぎの補題を示す。

[補題 1] 安定な (2) 式の Σ_o に対して、 $V \succ \mathcal{O}_{n_o}$ は

$$F^\top V + VF \prec \mathcal{O}_{n_o} \quad (12)$$

を満たすものとする。このとき

$$S_\gamma(F, L, V) \prec \mathcal{O}_{n+n_o} \quad (13)$$

を満たす有界な $\gamma > 0$ が存在する。ここで

$$S_\gamma(F, L, V) := \begin{bmatrix} F^\top V + VF + \gamma^{-1} L^\top L & VF \\ F^\top V & -\gamma V \end{bmatrix} \quad (14)$$

である。いま、 V の Cholesky 分解 $V = V_{\frac{1}{2}}^\top V_{\frac{1}{2}}$ に対して、 $P = WV_{\frac{1}{2}}$ および $P^\dagger = V_{\frac{1}{2}}^{-1} W^\top$ とする。ここで、 $W \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times n_o}$ は $WW^\top = I_{\hat{n}_o}$ を満たす行列とする。このとき、任意の W に対して

$$\left\| LP^\dagger (sI_{\hat{n}_o} - PFP^\dagger)^{-1} PFV_{\frac{1}{2}}^{-1} \right\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma \quad (15)$$

が成り立つ。

(証明) まず、(13) 式を満たす有界な $\gamma > 0$ の存在性を示す。(13) 式は

$$F^\top V + VF + \gamma^{-1} (L^\top L + VFV) \prec \mathcal{O}_{n_o} \quad (16)$$

と等価である。いま、(12) 式より $F^\top V + VF \prec -\beta I_{n_o}$ となる $\beta > 0$ が存在する。よって、任意の正の定数 η に対して

$$\gamma = \frac{1}{\beta} \left(\lambda_{\max}(L^T L + VFV) + \eta \right)$$

は (16) 式を満たす．ここで $\lambda_{\max}(X)$ は半正定値行列 $X = X^T \succeq \mathcal{O}_{n_o}$ の最大固有値を表わす．以上より，(13) 式を満たす有界な $\gamma > 0$ が存在することが示された．つぎに，有界実補題⁹⁾を用いて (15) 式を示す．特に

$$\mathcal{F}_\gamma(PFP^\dagger, PFV_{\frac{1}{2}}^{-1}, LP^\dagger; I_{\hat{n}_o}) \prec \mathcal{O}_{n+\hat{n}_o} \quad (17)$$

として， $V(\hat{\xi}) = \hat{\xi}^T \hat{\xi}$ を蓄積関数にもつことを示す⁷⁾．ここで

$$\mathcal{F}_\gamma(A, B, C; V) := \begin{bmatrix} A^T V + V A + \gamma^{-1} C^T C & V B \\ B^T V & -\gamma I_{m_u} \end{bmatrix}$$

とする． $\mathcal{S}_\gamma(F, L, V)$ は $\tilde{V} := \text{diag}(V_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}})$ を用いて

$$\tilde{V}^T \mathcal{S}_\gamma(V_{\frac{1}{2}} F V_{\frac{1}{2}}^{-1}, L V_{\frac{1}{2}}^{-1}, I_{n_o}) \tilde{V}$$

とかける．したがって，(13) 式は

$$\mathcal{S}_\gamma(V_{\frac{1}{2}} F V_{\frac{1}{2}}^{-1}, L V_{\frac{1}{2}}^{-1}, I_{n_o}) \prec \mathcal{O}_{n+n_o} \quad (18)$$

と等価である．さらに， W が行フルランクであるから

$$\mathcal{F}_\gamma(PFP^\dagger, PFV_{\frac{1}{2}}^{-1}, LP^\dagger; I_{\hat{n}_o})$$

は $\tilde{W} := \text{diag}(W, I_n)$ によって

$$\tilde{W} \mathcal{S}_\gamma(V_{\frac{1}{2}} F V_{\frac{1}{2}}^{-1}, L V_{\frac{1}{2}}^{-1}, I_{n_o}) \tilde{W}^T$$

とかける．したがって，(18) 式により (17) 式が示される． $\square$

補題 1 は，(13) 式を満たす正定行列 V と有界な γ が存在すること，および $PFP^\dagger$ は安定であり，かつ任意の W に対して，低次元モデルは (15) 式によって与えられる上界をもつことを意味している．この上界は 2.2 節で述べたオブザーバ低次元化の誤差解析に関するつぎの定理において重要な役割を果たす．

《定理 1》 (1) 式および (2) 式で定義される安定な Σ と Σ_o を考え，

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} F & GC \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{bmatrix} GD + H \\ B \end{bmatrix} \quad (19)$$

とする．また，非負定数 w_u, w_{x_0} に対して， $\mathcal{K} \succeq \mathcal{O}_{n+n_o}$ は

$$\mathcal{A}\mathcal{K} + \mathcal{K}\mathcal{A}^T + w_u \mathcal{B}\mathcal{B}^T + w_{x_0} \text{diag}(0, I_n) = 0 \quad (20)$$

を満たすものとする．さらに， $V \succ \mathcal{O}_{n_o}$ および $\gamma > 0$ は (14) 式によって定義される $\mathcal{S}_\gamma$ に対して

$$\mathcal{S}_\gamma(F, L, V) \prec \mathcal{O}_{n+n_o} \quad (21)$$

を満たすものとし， $V_{\frac{1}{2}}$ は $V = V_{\frac{1}{2}}^T V_{\frac{1}{2}}$ を満たす行列として定義する．また，与えられた非負定数 θ に対して， $W \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times n_o}$ は $WW^T = I_{\hat{n}_o}$ および

$$\text{im} \left((L V_{\frac{1}{2}}^{-1})^T \right) \subseteq \text{im}(W^T), \quad \sqrt{\text{tr}(\Phi) - \text{tr}(W\Phi W^T)} \leq \theta \quad (22)$$

を満たすものとする．ただし

$$\Phi := V_{\frac{1}{2}} \mathcal{K}_{1:n_o} V_{\frac{1}{2}}^T \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o} \quad (23)$$

であり， $\mathcal{K}_{1:n_o} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ は $\mathcal{K}$ の第 1 行および列から第 n_o 行および列までの主座小行列とする．このとき，(6) 式において $P = W V_{\frac{1}{2}}$ および $P^\dagger = V_{\frac{1}{2}}^{-1} W^T$ を用いて得られる $\hat{\Sigma}_o$ に対して，(8)，(9)，(10) 式によって定義される評価関数に關して

$$J(\Delta_{x_0}, \Delta_u) \leq \gamma \theta \quad (24)$$

が成り立つ．

(証明) まず， $\mathcal{S} := [-L, S - MC]$ ， $\mathcal{X}_0 := [0, x_0^T]^T$ および

$$\mathcal{P} := \text{diag}(P, I_n), \quad \mathcal{P}^\dagger := \text{diag}(P^\dagger, I_n)$$

を定義する．いま， $\mathcal{X} := [\xi^T, x^T]^T$ とすると

$$\Sigma_{e_z} : \begin{cases} \dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}u \\ e_z = \mathcal{S}\mathcal{X} - M Du \end{cases}$$

を得る．ここで $\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_0$ である．同様に $\hat{\mathcal{X}} := [\hat{\xi}^T, \hat{x}^T]^T$ とすると

$$\hat{\Sigma}_{\hat{e}_z} : \begin{cases} \dot{\hat{\mathcal{X}}} = \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\dagger \hat{\mathcal{X}} + \mathcal{P}\mathcal{B}u \\ \hat{e}_z = \mathcal{S}\mathcal{P}^\dagger \hat{\mathcal{X}} - M Du \end{cases}$$

を得る．ここで $\hat{\mathcal{X}}(0) = \mathcal{P}\mathcal{X}_0$ である． Σ_{e_z} と $\hat{\Sigma}_{\hat{e}_z}$ によって定義される誤差システムの同次変換を

$$T = \begin{bmatrix} -\mathcal{P} & I_{n+\hat{n}_o} \\ I_{n+n_o} & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n+n_o} \\ I_{n+\hat{n}_o} & \mathcal{P} \end{bmatrix}$$

とすると

$$T \text{diag}(\mathcal{A}, \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\dagger) T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\dagger & -\mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} \\ 0 & \mathcal{A} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{P}\mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{P}\mathcal{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{X}_0 \end{bmatrix}$$

および $[\mathcal{S}, -\mathcal{S}\mathcal{P}^\dagger] T^{-1} = [-\mathcal{S}\mathcal{P}^\dagger, \mathcal{S}\mathcal{P}^\dagger \mathcal{P}]$ を得る．ここで

$$\bar{\mathcal{P}} := [\bar{W} V_{\frac{1}{2}}, 0], \quad \bar{\mathcal{P}}^\dagger := [\bar{W} V_{\frac{1}{2}}^{-T}, 0]^T$$

であり $\bar{W} \in \mathbb{R}^{(n-\hat{n}_o) \times n}$ は $[W^T, \bar{W}^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ がユニタリとなる行列とする．いま， $\bar{\mathcal{P}}^\dagger \bar{\mathcal{P}}$ のブロック構造から

$$\bar{\mathcal{P}}^\dagger \bar{\mathcal{P}} = \mathcal{J} \bar{\mathcal{P}}^\dagger \bar{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{J} := \text{diag}(I_{n_o}, 0)$$

が成り立つことに注意すると， $\|u_0\| = 1$ であるような任意の $u_0 \in \mathbb{R}^{m_u}$ に対して

$$\|\Delta_u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|\Theta(s) \mathcal{J} \bar{\mathcal{P}}^\dagger \bar{\mathcal{P}} (s I_{n+n_o} - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B}\|_{\mathcal{H}_2}$$

が成り立つ．ここで

$$\Theta(s) := \mathcal{S}\mathcal{P}^\dagger (s I_{n+\hat{n}_o} - \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\dagger)^{-1} \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{S}$$

とする．(22) 式より $L V_{\frac{1}{2}}^{-1} \bar{W}^T = 0$ が従うので

$$\Theta(s)\mathcal{J}\overline{\mathcal{P}}^\dagger\overline{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} -\theta(s)V_{\frac{1}{2}}^{-1}, 0 \end{bmatrix} \text{diag}(\overline{W}^\top \overline{W} V_{\frac{1}{2}}, 0)$$

が成り立つ。ここで

$$\theta(s) := LP^\dagger(sI_{\hat{n}_o} - PFP^\dagger)^{-1}PF$$

である。したがって

$$\|\Delta_u(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \|\theta(s)V_{\frac{1}{2}}^{-1}\|_{\mathcal{H}_\infty}^2 \|[\overline{W}V_{\frac{1}{2}}, 0](sI_{n+n_o} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}\|_{\mathcal{H}_2}^2$$

が成り立つ。一方, $\|x_0\| = 1$ から

$$\mathcal{X}_0\mathcal{X}_0^\top \preceq \text{diag}(0, I_n)$$

が成り立つので, 同様に初期値応答についても

$$\|\Delta_x(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \|\theta(s)V_{\frac{1}{2}}^{-1}\|_{\mathcal{H}_\infty}^2 \|[\overline{W}V_{\frac{1}{2}}, 0](sI_{n+n_o} - \mathcal{A})^{-1}[0, I_n]^\top\|_{\mathcal{H}_2}^2$$

が成り立つ。したがって

$$J(\Delta_{x_0}, \Delta_u) \leq \gamma \sqrt{\text{tr}(\overline{W}V_{\frac{1}{2}}(\mathcal{K}_{1:n}^{(1)} + \mathcal{K}_{1:n}^{(2)})V_{\frac{1}{2}}^\top \overline{W}^\top)}$$

が成り立つ。ここで, $\mathcal{K}^{(1)}, \mathcal{K}^{(2)}$ は, それぞれリアップノフ方程式

$$\mathcal{A}\mathcal{K}^{(1)} + \mathcal{K}^{(1)}\mathcal{A}^\top + w_{x_0}\text{diag}(0, I_n) = 0$$

$$\mathcal{A}\mathcal{K}^{(2)} + \mathcal{K}^{(2)}\mathcal{A}^\top + w_u\mathcal{B}\mathcal{B}^\top = 0$$

の解である。なお, $\mathcal{A}$ は安定であることから, 非負定値解 $\mathcal{K}^{(1)}$ および $\mathcal{K}^{(2)}$ は常に存在する¹⁰⁾ことに注意されたい。さらに, リアップノフ方程式の解の一意性より

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{(1)} + \mathcal{K}^{(2)}$$

が従う。一方, (22) 式より

$$\sqrt{\text{tr}(\overline{W}\Phi\overline{W}^\top)} = \sqrt{\text{tr}(\overline{W}V_{\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{1:n_o}V_{\frac{1}{2}}^\top\overline{W}^\top)} \leq \theta$$

が成り立つ。いま補題 1 より, $\|\theta(s)V_{\frac{1}{2}}^{-1}\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$ が成り立つことに注意すると

$$J(\Delta_x, \Delta_u) \leq \gamma \sqrt{\text{tr}(\overline{W}\Phi\overline{W}^\top)} \leq \gamma\theta$$

となり, 求める結果が従う。□

定理 1 は, (2) 式によって定義される最小次元オブザーバ Σ_o を適切に近似する双直交射影を与える。本結果は, (1) 式および (2) 式によって定義される Σ および Σ_o のダイナミクスを陽に考慮しながら, (24) 式の推定性能を評価するという点で新しいものである。このとき, (24) 式における θ は所望の低次元オブザーバを設計するためのパラメータを意味していることに注意されたい。

(注意 1) $WW^\top = I_{\hat{n}_o}$ でありかつ設定した θ に対して (22) 式を満たす $W \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times n_o}$ は以下のように設計が可能である。はじめに (23) 式によって定義される Φ の全固有値および固有

ベクトル $\{(\lambda_i, v_i)\}_{i \in \{1, \dots, n_o\}}$ を求める。ここで, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ かつ $\|v_i\| = 1$ としても一般性を失わないことに注意されたい。つぎに

$$\theta^2 \geq \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_{n_o} \quad (25)$$

を満たすような最小の $m \in \{1, \dots, n_o\}$ を求め, $V_m = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{R}^{n_o \times m}$ を定義する。最後に, Gram-Schmidt の正規直交化法により

$$\text{im}(W^\top) = \text{im}([V_m, (LV_{\frac{1}{2}}^{-1})^\top])$$

を満たす W を求める。このとき, 低次元オブザーバの次元は $\hat{n}_o = \text{rank}([V_m, (LV_{\frac{1}{2}}^{-1})^\top])$ として決定されることに注意されたい。結果として, $WW^\top = I_{\hat{n}_o}$ でありかつ (22) 式を満たす W が得られる。

(注意 2) 定理 1 は Σ が安定である場合に限定されているが, Σ が不安定システムであっても, つぎのようにして拡張可能である。いま, n_s を $\mathcal{A}$ の安定極の数として, 行列

$$U \in \mathbb{R}^{n_s \times (n+n_o)}, \quad \overline{U} \in \mathbb{R}^{(n+n_o-n_s) \times (n+n_o)} \quad (26)$$

が $UAU^\top \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ を安定とし

$$UA\overline{U}^\top = 0, \quad U^\top U + \overline{U}^\top \overline{U} = I_{n+n_o}$$

を満たすものとして定義する。さらに, $\mathcal{K}_U \succeq \mathcal{O}_{n_s}$ は

$$\text{sym}(UAU^\top \mathcal{K}_U) + w_u U \mathcal{B} \mathcal{B}^\top U^\top + w_{x_0} U \text{diag}(0, I_n) U^\top = 0$$

を満たすものとし, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{K} := U^\top \mathcal{K}_U U$ により定義する。ここで $\text{sym}(X) := X + X^\top$ とする。以上のもと, W が (22) 式を満たし, さらに

$$\text{im}([V_{\frac{1}{2}}, 0]\overline{U}^\top) \subseteq \text{im}(W^\top) \quad (27)$$

を満たすとき, 定理 1 と同様の結果が成り立つ。証明は, 以下のとおりである。まず, 行列 U は

$$UAU^\top = \begin{bmatrix} \overline{U}A\overline{U}^\top & \overline{U}AU^\top \\ 0 & UAU^\top \end{bmatrix}, \quad U := \begin{bmatrix} \overline{U} \\ U \end{bmatrix}$$

を満たす。したがって, (27) 式と U による同次変換により

$$\|\overline{W}\mathcal{V}(sI_{n+n_o} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\text{tr}(\overline{W}\mathcal{V}\mathcal{K}^{(1)}\mathcal{V}^\top\overline{W}^\top)}$$

を得る。ここで $\mathcal{V} := [V_{\frac{1}{2}}, 0] \in \mathbb{R}^{n_o \times (n+n_o)}$ とし, $\mathcal{K}^{(1)}$ は

$$\text{sym}(UAU^\top \mathcal{K}_U^{(1)}) + w_u U \mathcal{B} \mathcal{B}^\top U^\top = 0$$

を満たす $\mathcal{K}_U^{(1)} \succeq \mathcal{O}_{n_s}$ を用いて, $\mathcal{K}^{(1)} := U^\top \mathcal{K}_U^{(1)} U$ により定義されるものとする。なお, $UAU^\top$ は安定であるから, 非負定値解 $\mathcal{K}_U^{(1)}$ は常に存在することに注意されたい。同様に, $\mathcal{K}^{(2)}$ を

$$\text{sym}(UAU^\top \mathcal{K}_U^{(2)}) + w_{x_0} U \text{diag}(0, I_n) U^\top = 0$$

を満たす $\mathcal{K}_U^{(2)}$ により, $\mathcal{K}^{(2)} := U^\top \mathcal{K}_U^{(2)} U$ として定義する。このとき, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{(1)} + \mathcal{K}^{(2)}$ が従う。

3.2 低次元関数オブザーバの設計手順

本節では、与えられた誤差評価指標を満たすような低次元関数オブザーバの設計法を述べる。問題 1 を解く手順はつぎのとおりとなる。

- (1) 式の Σ に対して, (3) 式の推定値 $e_z \in \mathbb{R}^{m_z}$ が所望の収束率をもつように (2) 式の Σ_o を設計する。
 - (26) 式および UAU^T を安定にする行列 U および $\bar{U}$ を求める。
 - (12) 式を満たす V を用いて, (21) 式を満たす γ を求める。
 - 与えられた正の定数 ϵ に対し, (22) 式における非負定数 θ を $\theta = \epsilon/\gamma$ として求める。
 - 与えられた非負定数 w_{x_0}, w_u および θ に対し, (22), (27) 式および $WW^T = I_{n_o}$ を満たす $W \in \mathbb{R}^{\hat{n}_o \times n_o}$ を求める。具体的には, V_m を注意 1 の手順により求められる行列として, Gram-Schmidt の正規直交化法により
- $$\text{im}(W^T) = \text{im}([V_m, (LV_{\frac{1}{2}}^{-1})^T, [V_{\frac{1}{2}}, 0]\bar{U}^T])$$
- を満たす W を求めることにより得られる。
- 双直交射影を $P = WV_{\frac{1}{2}}$ および $P^\dagger = V_{\frac{1}{2}}^{-1}W^T$ として求める。
 - (4) 式および (6) 式により, 低次元関数オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ を構成する。

以上の手順は, (10) 式の評価関数によって与えられる推定性能を保証するような, 最小次元オブザーバ Σ_o よりもさらに低次元なオブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ の設計法を与えている。次章では, 数値例を通して本設計法の有効性を示す。

4. 数 値 例

4.1 電力ネットワークモデル

本節では, 発電機と負荷によって構成される, 文献 11)~13) に示されるような電力ネットワークを取り扱う。いま, N を発電機の数とし, 各 $i \in \{1, \dots, N\}$ に対し, i 番目の発電機のダイナミクスを

$$\Sigma_i^g : \begin{cases} \dot{\phi}_i = \tilde{A}_i \phi_i + \frac{1}{\tilde{M}_i} \tilde{b} p_i^g + \tilde{b} u_i \\ \delta_i^g = \tilde{c} \phi_i \end{cases} \quad (28)$$

としてモデル化する。ここで, $\phi_i \in \mathbb{R}^4$ は原動機およびガバナの状態, $p_i^g \in \mathbb{R}$ は流入電力, $\delta_i^g \in \mathbb{R}$ は位相角, $u_i \in \mathbb{R}$ は位相角指令値であり

$$\tilde{A}_i := \begin{bmatrix} A_i^f & \frac{-1}{\tilde{M}_i} bc \\ k_i bb^T & A_i^c \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} := \begin{bmatrix} b \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} := \begin{bmatrix} c & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}$$

および

$$A_i^f := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D_i}{M_i} \end{bmatrix}, \quad A_i^c := \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_i} & \frac{1}{T_i} \\ 0 & -k_i R_i \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。ここで, M_i, D_i, T_i, k_i および R_i はそれぞれ慣性定数, 制動係数, タービン時定数, 調速機時定数および速度調定率を表す正定数であり, $0_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は零行列とする。(28) 式によって定義される発電機 Σ_i^g は, (A_i^c, b, c) および (A_i^f, b, c) によって記述されるガバナと原動機が内部接続されているという構造をもつ。つぎに, 本稿では簡単のため, 負荷を回転マス-ダンパ系としてモデル化する¹¹⁾。すなわち, L を負荷の数とし, 各 $i \in \{1, \dots, L\}$ に対して, i 番目の負荷のダイナミクスを

$$\Sigma_i^l : \begin{cases} \dot{\psi}_i = A_i^f \psi_i + \frac{1}{M_i} b p_i^l \\ \delta_i^l = c \psi_i \end{cases} \quad (29)$$

によりモデル化する。ここで, $\psi_i \in \mathbb{R}^2$ は回転体の角度および角速度, $p_i^l \in \mathbb{R}$ は流入電力, δ_i^l は位相角とする。ここで

$$p := [p_1^g, \dots, p_N^g, p_1^l, \dots, p_L^l]^T$$

$$\delta := [\delta_1^g, \dots, \delta_N^g, \delta_1^l, \dots, \delta_L^l]^T$$

とすると, 原動機と負荷の接続関係は

$$p = -Y\delta \quad (30)$$

として記述される。ここで, $Y \in \mathbb{R}^{(N+L) \times (N+L)}$ はアドミッタンス行列であり, 流入電力は位相角の差に依存するため, Y はグラフラプラシアン¹⁴⁾となる。また, 電力は発電機および負荷について入力電力を正としていることに注意されたい。状態変数を

$$x := [\phi_1^T, \dots, \phi_N^T, \psi_1^T, \dots, \psi_L^T]^T \in \mathbb{R}^n \quad (31)$$

として定義する。ここで, $n := 4N + 2L$ である。加えて, (1) 式における観測出力 y および信号 z を

$$y := \text{diag}([I_2, 0_{2 \times 2}], \dots, [I_2, 0_{2 \times 2}])[\phi_1^T, \dots, \phi_N^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$$

$$z := \text{diag}(c, \dots, c)[\psi_1^T, \dots, \psi_L^T]^T \in \mathbb{R}^{L_z}$$

とする。すなわち, y は全発電機の位相角および角速度であり, z は 1 番目から L_z 番目までの負荷の角度とする。最終的に, (1) 式の Σ として電力ネットワークのダイナミクスは

$$A = \text{diag}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N, A_1^f, \dots, A_L^f) - \tilde{B}Y\tilde{C}$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N \otimes \tilde{b} \\ 0_{2L \times 1} \end{bmatrix}$$

$$C = [\text{diag}([I_2, 0_{2 \times 2}], \dots, [I_2, 0_{2 \times 2}]) \ 0_{2N \times 2L}]$$

$$D = 0_{2N \times 1}$$

$$S = [0_{L_z \times 4N} \ \text{diag}(c, \dots, c) \ 0_{L_z \times 2(L-L_z)}]$$

となる。ここで $\mathbf{1}_N := [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$ とし

$$\tilde{B} := \text{diag}\left(\frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_N}, \frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_L}\right) \text{diag}(I_N \otimes \tilde{b}, I_L \otimes b)$$

$$\tilde{C} := \text{diag}(I_N \otimes \tilde{c}, I_L \otimes c)$$

である。ここで, 簡単のため入力 p は全発電機へ同様に印加されるものとした。なお, 以上のモデルにおいては, (30) 式の

Fig. 2 Order of resulting models versus values of ϵ

Y がグラフラプリアンであるため、発電機または負荷の位相角差のみが動特性に影響する。そのため、位相角全体の偏差に関して動特性は不変，すなわち

$$Av = 0, \quad v := [\mathbf{1}_N^T \otimes \tilde{c} \quad \mathbf{1}_L^T \otimes c]^T \in \mathbb{R}^n \quad (32)$$

を満たす。したがって、 A は零固有値をもつことから、全体システムは準安定であることに注意されたい。

4.2 低次元オブザーバの設計

本節では、提案する低次元オブザーバの設計結果を示す。以降では、 $N = 50$ 個の発電機と $L = 400$ 個の負荷をもつ 1000 次元の電力ネットワーク ($n = 1000$) を扱う。評価出力 z は 1 番目から $L_z = 100$ 番目までの負荷の角度とした。初期状態は $x_0 = \mathbf{1}_{1000}/\sqrt{1000}$ とし、システムのパラメータはつぎのとおりとする。すべての i に対して $k_i = 0.01$, $R_i = 0.05$, $D_i = 1.5$, $T_i = 0.2$, $M_i = 10$ とし、発電機と負荷の結合関係を表わす (30) 式の Y は Holme-Kim¹⁵⁾ モデルと呼ばれる複雑ネットワークに対するグラフラプリアンとして与え、非対角項のうち非零の値は範囲 $[0, 1]$ より無作為に生成した。このとき、システムは準安定となり、対応する固有ベクトルは (32) 式における v となった。

はじめに、(10) 式の評価関数の重み w_{x_0} および w_u を $w_{x_0} = 0.1, w_u = 0.9$ として固定し、 ϵ を変化させた場合の設計結果について示す。3.2 節の手順 (a) において、(2) 式により定義される最小次元オブザーバ Σ_o は F が安定となり、オブザーバが所望の推定性能をもつように設計した。また、(26) 式の $\bar{U}$ を (32) 式における不安定固有ベクトル v とし、手順 (c) では、(12) 式を解くことにより V を求め、(21) 式を満たす γ を求めた。最後に、低次元オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ を手順 (d)~(g) に沿っていくつかの ϵ ごとに設計した。なお、上記以外の物理パラメータおよび設計パラメータの場合についても同様の結果が得られているため、以下では代表的な結果を示す。

まず、パラメータ ϵ に対する低次元オブザーバの次元 $\hat{n}_o$ の変化を Fig. 2 に示す。(25) 式において $\theta = \epsilon/\gamma$ であり、 γ は Σ_o によって定まる定数であることから、(25) 式を満たす最小の m は ϵ の増加に伴い減少する。したがって、Fig. 2 に示されるように、 $\hat{n}_o$ は ϵ の増加に伴い減少する。さらに、結果として得られた (10) 式の評価関数 $J(\Delta_{x_0}, \Delta_u)$ の、次元 $\hat{n}_o$

Fig. 3 Performance function versus $\hat{n}_o$

Fig. 4 $\mathcal{H}_\infty$ norm of $\Delta_u(s)$ versus $\hat{n}_o$

に対する変化を Fig. 3 に示す。この図から、 ϵ を小さくすることにより、推定性能が向上することが確認できる。以上のことから、低次元オブザーバの次元と推定性能がトレードオフの関係にあり、パラメータ ϵ によって調整可能であることがわかる。

前節では簡単化のため、入力 u を大きさ 1 のインパルス入力とし、 u に対する低次元化誤差 Δ_u の評価を行ない、低次元化誤差解析とそれに基づく設計法を与えた。そこで、そのようにして設計された低次元オブザーバが、任意の入力 $u(t)$ に対しても適切に低次元化誤差 $\Delta_u(t)$ を小さくするものであるか、数値的に検証する。Fig. 4 に、オブザーバの次元 $\hat{n}_o$ に対する $\Delta_u(s)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの変化を示す。ここで、 $\Delta_u(s)$ は u から $\Delta(t)$ までの伝達関数とする。Fig. 4 より、提案法によって設計されたオブザーバの次元が増加することに伴い、 $\Delta_u(s)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが減少することが確認できる。また、同様の傾向が Fig. 3 においても確認できる。これらの事実は、提案法によって設計されたオブザーバにより、任意の二乗可積分入力に対して適切な推定が可能であることを示唆している。

つぎに、インパルス入力と異なる入力に対する時間応答を比べることにより、最小次元オブザーバと低次元オブザーバの比較を行なう。(1) 式、(2) 式および (4) 式の z , z_o および $\hat{z}_o$ の第一要素の応答を Fig. 5 に示す。ここで、低次元オブザーバは $\hat{n}_o = 131$ および 225 次元の場合をプロットした。なお、そのほかの負荷の応答は同様であるため省略し、入力は、いくつかの周波数成分を含むように、 $u(t) = 0.02 + \sin(0.1t) \cos(0.1t) \sin(0.05t)$ とした。また、初期状態

Fig. 5 Responses of angle of the first load

Fig. 6 Initial value responses of angle of the first load

Fig. 7 Input responses of angle of the first load

に対する応答を確認するため、 x_0 の大きさを適切に拡大した結果を示している。この図から、低次元オブザーバ $\hat{\Sigma}_o$ の次元が増加することに伴い、最小次元オブザーバ Σ_o の推定軌道へ漸近していくことが確認できる。

また、低次元オブザーバの次元を $\hat{n}_o = 190$ と固定して (10) 式の評価関数 $J(\Delta_{x_0}, \Delta_u)$ における重み w_{x_0}, w_u を変化した場合の設計結果を示す。(1) 式、(2) 式および (4) 式の z , z_o および $\hat{z}_o$ の第一要素の初期状態応答および前述の入力に対する応答を Fig. 6, Fig. 7 に示す。図より、初期状態の重

Fig. 8 Comparison of the first element of $z, \hat{z}_o$ with that of response of designed observer by existing approach

み w_{x_0} を大きく評価した場合は、初期状態応答に対する推定精度が入力応答を評価した場合に比べて向上する。逆に、入力重み w_u を大きくとる場合は入力応答の推定精度が向上する。このように、(10) 式の評価関数の重みを変化させることにより、低次元オブザーバの次元を変化させることなく推定性能を調整可能であることがわかる。

最後に、文献 6) において提案されている既存の低次元オブザーバ設計法と提案法との比較を数値的に行なう。なお、提案法によって設計されたオブザーバは 190 次元とした。既存手法による低次元オブザーバの具体的な設計手順は以下のとおりである。まず、(1) 式において入力 u から出力 y までの伝達関数を精度よく近似するような低次元モデルを、平衡打ち切り法により生成する。ここでは 190 次元の低次元モデルを生成した。このとき、低次元化誤差の H_∞ ノルムは 1×10^{-14} となった。つぎに、低次元モデルの状態を推定するような Luenberger 型のオブザーバを設計し、これを用いて、 z に対応する出力を構成する。

Fig. 8 に、 $z, \hat{z}_o$ および上述の手順により設計された低次元オブザーバの評価出力の第一要素の時間応答を、それぞれ灰色点線、白丸付き実線および黒丸付き実線により示す。この図から、既存手法による推定信号が大きく変動していることが確認される。低次元化誤差が非常に小さい値であるにもかかわらず、このように推定信号が変動する原因として、低次元化の際に入力 u による影響のみが考慮されており、システムの初期状態による影響が考慮されていないことが挙げられる。この事実は、2 章で議論したように低次元オブザーバ設計問題において、初期状態と入力の影響を同時に考慮する必要があることを示唆している。

5. おわりに

本稿では、設計者により与えられる所望の推定性能に関して、近似誤差がその仕様を満たすような新しい低次元オブザーバの設計法を提案した。そのような低次元オブザーバの設計問題を、システムの初期状態と入力に対するオブザーバ低次元化誤差を評価関数として与え、提案法によって推定誤差の

収束性および先験的な推定性能の上界を与えた。提案法は対象とするシステムに対するオブザーバ設計と低次元化が独立しているため、既存のオブザーバの設計法が利用できるという利点をもつ。提案法の有効性を電力ネットワークを対象とした数値例により確認した。

参 考 文 献

- 1) D. Luenberger: An introduction to observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **16**-6, 596/602 (1971)
- 2) C.-C. Tsui: What is the minimum function observer order?, *Journal of the Franklin Institute*, **335**-4, 623/628 (1998)
- 3) C.-C. Tsui: A new algorithm for the design of multifunctional observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**-1, 89/93 (1985)
- 4) M. Darouach: Existence and design of functional observers for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**-5, 940/943 (2000)
- 5) C.-C. Tsui: On the order reduction of linear function observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**-5, 447/449 (1986)
- 6) A.K. Singh and J. Hahn: State estimation for high-dimensional chemical processes, *Computers and Chemical Engineering*, **29**-11-12, 2326/2334 (2005)
- 7) T. Ishizaki, H. Sandberg, K.H. Johansson, K. Kashima, J. Imura and K. Aihara: Structured model reduction of interconnected linear systems based on singular perturbation, *Proc. of the American Control Conference (ACC13)*, 5544/5549 (2013)
- 8) A.C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2005)
- 9) S. Boyd, L. El Ghaoul and E. Feron: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1987)
- 10) S. Sastry: *Nonlinear Systems: Analysis, stability, and control*, Springer (1999)
- 11) P. Kundur: *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill Education (1994)
- 12) A. Monticelli: *State Estimation in Electric Power Systems: A generalized approach*, Springer (1999)
- 13) M.D. Ilic and S. Liu: *Hierarchical Power Systems Control: Its value in a changing industry*, Springer (1996)
- 14) M. Mesbahi and M. Egerstedt: *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, Princeton University Press (2010)
- 15) S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang: Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports*, **424**-4, 175/308 (2006)

[著 者 紹 介]

定 本 知 徳 (学生会員)

1987年千葉県生まれ。2009年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業。同年東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻修士課程に進学。2011年同大学大学院機械制御システム専攻修士課程卒業。同年住友重機械工業(株)入社。2013年東京工業大学大学院情報環境学専攻博士課程に進学。現在に至る。システム制御情報学会の会員。

石 崎 孝 幸 (正会員)

2008年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業。2009年同大学大学院情報理工学研究科修士課程修了。2012年同大学大学院情報理工学研究科博士課程修了。2012年より同大学大学院情報理工学研究科助教となり現在に至る。2011年日本學術振興会特別研究員(DC)、2012年同研究員(PD)へ資格変更。2012年の5か月間、客員研究員としてスウェーデン王立工科大学に滞在。博士(工学)。システム制御情報学会、IEEEの会員。

井 村 順 一 (正会員)

1990年京都大学大学院工学研究科修士課程修了。92年同大学大学院工学研究科博士課程中途退学。同年同大学工学部機械工学科助手。96年広島大学工学部助教授。2001年東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授。2004年同教授。現在に至る。98年より1年間Twente大学客員研究員。非線形システム、ハイブリッドシステムの制御の研究に従事。博士(工学)。システム制御情報学会、日本ロボット学会、日本鉄鋼協会、IEEEなどの会員。