多層最小射影法による局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計

福井善朗*・中村文一**

Design of Locally Semiconcave Practical Control Lyapunov Function via Multilayer Minimum Projection Method

Yoshiro FUKUI* and Hisakazu NAKAMURA**

We proposed a Sontag-type feedback controller by using a locally semiconcave practical control Lyapunov function (LS-PCLF) for asymptotic stabilization of a nonlinear system defined on a non-contractible manifold. We also proposed a design method of a nonsmooth control Lyapunov function called the multilayer minimum projection method. However, whether the method can be used as an LS-PCLF design method is not discussed, and we cannot design a controller by using the method and the controller in this situation. In this paper, we study a disassembled differential of a locally semiconcave function to handle an LS-PCLF. The minimal and maximal disassemble differentials, which are special types of a disassembled differential, are introduced. We elucidate that a set of reachable gradients and the Fréchet differential are equivalent to the minimal and maximal disassembled differential, respectively. Based on this fact, we prove that this method can be used as an LS-PCLF design method.

Key Words: nonlinear control, control Lyapunov function, locally semiconcave function

1. はじめに

われわれの身の回りには、多様体上で定義された非線形システムが数多くある。多様体とは複数のユークリッド空間を張り合わせて得られる空間¹⁾であり、多くの多様体は非可縮である特徴がある。ここで、非可縮とは1点からなる空間にホモトピー同値でないこと²⁾を意味しており、直感的には空間に穴が開いているものと思えば良い。車両ロボットの姿勢角 S^1 、宇宙ロボットの姿勢角 $SO(3)$ 、リンク構造をもつロボットアームのコンフィグレーション空間などは非可縮な多様体の典型例である。

このように多様体は身近な存在であるが、多様体上で定義されたシステムの目標点の安定化は難しい問題であることが知られている。Koditschek らはロボットシステムに対してなめらかな navigation 関数が一般に存在しないことを示した³⁾。Bhat らは、非可縮な多様体上で定義された非線形システムにおける目標点の大域的な安定化問題に対し、なめらかな制御 Lyapunov 関数は存在しないことを示した⁴⁾。この事

実から、なめらかな関数を使用する限りは準大域的な制御則の設計が限界となるが、その場合でも unwinding 現象のような制御性能の劣化が避けられないことが知られている⁵⁾。

これに対し、微分不可能な制御 Lyapunov 関数を使った大域的静的状態フィードバック制御系の設計が研究されている。微分不可能な関数の一種として局所半凹関数があり、応用上取り扱いやすい性質をもつとして注目を集めている^{6), 7)}。Rifford はユークリッド空間上で定義されたシステムが可制御であれば、局所半凹な制御 Lyapunov 関数が存在することを示した⁸⁾。われわれはこれまでの研究で、局所半凹な制御 Lyapunov 関数の一種である、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数を使った大域的な不連続静的状態フィードバック制御の設計法を提案した⁹⁾。これら一連の研究には、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数さえ設計できれば、多様体上で定義された非線形システムに対し、大域的な静的状態フィードバック制御系を設計できるメリットがある。

一方で、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法はいまだ確立していないという問題点がある。われわれは層空間を利用した微分不可能な制御 Lyapunov 関数の設計法を研究してきた。ここで、層空間とは、対象の多様体上に複数の空間を積層させることで得られる空間のことである。層空間を利用した局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法として最小射影法を提案した¹⁰⁾が、1枚の空間のみで層空間を設計する必要があり、一般的な問題に対して適用しづらい問題点がある。複数の空間で層空間を設計可能な手法として、多層最小

* 立命館大学情報理工学部 草津市野路東 1-1-1

** 東京理科大学理工学部 野田市山崎 2641

* College of Information Science and Engineering, Ritsumeikan University, 1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu

** Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, 2641 Yamazaki, Noda

(Received April 15, 2015)

(Revised August 5, 2015)

射影法を提案した^{11), 12)}が, 厳密な制御 Lyapunov 関数ならびに強制制御 Lyapunov 関数が設計できることしか示しておらず, 局所半凹実用制御 Lyapunov が設計できるかどうかは未検証である問題点がある. そのため, このままでは文献 9) の制御則設計法によりフィードバック制御系を設計することができない.

そこで, 本論文では, 多様体上で定義された局所半凹関数の定義・性質をまとめ, 多層最小射影法が局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法として利用できることを示す. これにより, 多様体上で定義された非線形システムに対し, より自由に大域的安定性が保証された制御系を設計可能とすることを旨とする.

2. 数学的準備

本論文に必要な数学的準備を行なう. $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ とする.

2.1 可微分多様体

本論文で取り扱う多様体論の用語を整理する. これら用語は文献 1) の定義に従う.

$\mathcal{X}$ は弧状連結でなめらかな n 次元多様体を意味する. チャート $(\mathcal{W}, \eta)$ に対し, V の局所座標表現を $V_{\mathcal{W}} := V \circ \eta^{-1}$ とかく. $T_x \mathcal{X}$ は接空間, $T_x^* \mathcal{X}$ は余接空間を意味しており, それぞれの要素を接ベクトル, 余接ベクトルとよぶ. 接ベクトル f に対する余接ベクトル τ の作用を $\langle \tau, f \rangle = \tau(f)$ とかく. C^1 級写像 $\phi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ に対し, 写像 $d\phi_{\tilde{x}}: T_{\tilde{x}} \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow T_{\phi(\tilde{x})} \mathcal{X}$ は $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ における ϕ の押し出しを, $d\phi_{\tilde{x}}^*$ は $d\phi_{\tilde{x}}$ の双対写像を意味する. $x \in \mathcal{X}$ において, 関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ の微分とよばれる余接ベクトルを $(dV)_x$ とかく.

2.2 層空間

多層最小射影法では, 層空間とよばれる空間を取り扱う.

定義 1 (層空間). 多様体 $\mathcal{X}$ に対し, 任意の $i \neq j \in L := \{1, \dots, \ell\}$ に対し $\tilde{\mathcal{X}}_i \cap \tilde{\mathcal{X}}_j = \emptyset$ を満たす多様体の族 $\{\tilde{\mathcal{X}}_i\}_{i \in L}$, 局所微分同相写像の族 $\{\phi_i: \tilde{\mathcal{X}}_i \rightarrow \mathcal{X}\}_{i \in L}$ を考える. このとき, 以下で定義される多様体 $\tilde{\mathcal{X}}$ を層空間と, 写像 $\phi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ を写像の族 $\{\phi_i: \tilde{\mathcal{X}}_i \rightarrow \mathcal{X}\}_{i \in L}$ のコプロダクトとよぶ.

$$\tilde{\mathcal{X}} := \coprod_{i \in L} \tilde{\mathcal{X}}_i \quad (1)$$

$$\phi(\tilde{x}) := \begin{cases} \phi_1(\tilde{x}) & (\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}_1) \\ \vdots \\ \phi_\ell(\tilde{x}) & (\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}_\ell) \end{cases} \quad (2)$$

定義より, 任意の $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ に対し, コプロダクト ϕ の押し出し $(d\phi)_{\tilde{x}}$ は全単射であることに注意しよう.

3. 局所半凹関数と分解微分

本章では局所半凹実用制御 Lyapunov 関数による制御系設

計の準備として, 多様体上で定義された局所半凹関数の定義・性質を整備する.

3.1 局所半凹関数とその分解

定義 2 (局所半凹関数⁶⁾). 開集合 $\mathcal{E}_{\mathcal{W}} \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された連続関数 $V_{\mathcal{W}}: \mathcal{E}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{R}$ が局所半凹関数であるとは, 任意の点 $\xi_0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ に対し, 定数 $C > 0$, ξ_0 の開近傍 $\Omega \subset \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ が存在して, 任意の $\xi, \xi' \in \Omega$ に対し以下が満たされることをいう.

$$V_{\mathcal{W}}(\xi) + V_{\mathcal{W}}(\xi') - 2V_{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi + \xi'}{2}\right) \leq C \|\xi - \xi'\|^2 \quad (3)$$

ただし, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである.

多様体 $\mathcal{X}$ 内の開集合 $\mathcal{E}$ 上で定義された連続関数 $V: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ が局所半凹関数であるとは, 任意の $x \in \mathcal{X}$, x まわりのチャート $(\mathcal{W}, \eta)$ に対し, V の局所座標表現 $V_{\mathcal{W}}$ が局所半凹関数であることをいう. ■

文献 6) 命題 2.1.12 より, 開集合 $\mathcal{E}_{\mathcal{W}}$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{W}}}$, 局所半凹関数 $\tilde{V}: \mathcal{E}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 級写像 $\phi: \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{W}}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ に対し, 合成写像 $\tilde{V} \circ \phi$ は局所半凹関数である. そのため, 性質 (3) を満たす定数 C の存在性はチャートの取り方に依存しない.

例 1. C^2 級関数は自明な局所半凹関数である. ■

例 2. C^2 級関数の最小として表現される関数は局所半凹関数である (文献 6) 命題 3.4.1) から, 以下で定義される関数 $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は局所半凹関数である.

$$V(x) := \min\{V_1'(x), V_2'(x)\} \quad (4)$$

$$V_1'(x) := (x - 1)^2 \quad (5)$$

$$V_2'(x) := (x + 1)^2 \quad (6)$$

注意 1. C^1 級関数は局所半凹関数とは限らない. $V(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$ で定義される関数 $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はその例である. ■

以下定義・命題より, 局所半凹関数は C^2 級関数の最小として表現できる関数であると考えられることもできる.

定義 3 (局所半凹関数の分解). 連続関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. 点 $x \in \mathcal{X}$ において, 以下を満たす x の開近傍 $\mathcal{E}$, コンパクトな添え数集合 $\mathcal{S}$ が存在するとき, 連続関数の族 $\{V_s: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ を $x \in \mathcal{X}$ における V の分解, あるいは単に V の分解とよぶ. $\{V_s: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ は必要に応じて, $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}, \{V_s\}$ などと略記する.

$$V_s(x) = V(x), \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (7)$$

$$V(x') = \min_{s \in \mathcal{S}} V_s(x'), \quad \forall x' \in \mathcal{E} \quad (8)$$

特に, $\{V_s\}$ が局所半凹関数の族であるとき, $\{V_s\}$ は局所半凹関数による V の分解であるとよぶ. あるいは, $\{V_s\}$ が C^r 級関数の族であるとき, $\{V_s\}$ は C^r 級関数による V の分解であるとよぶ. ただし, $r = 1, 2$ である. ■

Fig. 1 Example: locally semiconcave function and its decomposition

微分不可能点における局所半凹関数の分解は一意的に取れない。存在性は以下の命題により保証される。

命題 1. 任意の局所半凹関数 $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、各点 $x \in \mathcal{X}$ において C^2 級関数による分解が存在。 ■

証明. x まわりのチャート $(\mathcal{W}, \eta)$ を考えると、仮定より V の局所座標表現 $V_{\mathcal{W}} : \eta(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{R}$ は局所半凹関数。 (3) が満たされ、かつ、文献 6) 定理 3.4.2 で述べられているコンパクト集合 K の部分集合となる $\eta(x)$ の開近傍 Ω を取る。このとき、文献 6) 定理 3.4.2 よりコンパクト集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{2n}$ ならびに写像の族 $\{V_{\mathcal{W}s} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ が存在して、以下が成立。

$$V_{\mathcal{W}}(x') = \min_{s \in \mathcal{S}} V_{\mathcal{W}s}(x'), \quad \forall x' \in \Omega \quad (9)$$

$$V_{\mathcal{W}s}(x) = V_{\mathcal{W}}(x), \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (10)$$

$\mathcal{E} := \eta^{-1}(\Omega)$, $\{V_s : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ の各要素を $V_s := V_{\mathcal{W}s} \circ \eta$ と定義することで、証明できた。 □

例 3. (4)~(6) で定義される局所半凹関数 V を考える。 $\mathcal{E}$ として点 $0 \in \mathbb{R}$ の開近傍を取ると、 $\{V'_1, V'_2\}$ は 0 における分解の一例である。 ■

例 4. (4)~(6) で定義される局所半凹関数 V を考える。以下で定義される $\{V_s : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ は 0 における V 分解の一例である。

$$V_s(x) = \left(x + \frac{s}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad (11)$$

$$\mathcal{E} := [-0.5, 0.5] \quad (12)$$

$$\mathcal{S} := \left\{-2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right\} \quad (13)$$

(11)(12) ならびに以下 (14) で定義される $\{V_s : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ も 0 における V 分解の一例である。

$$\mathcal{S} := [-2, 2] \quad (14)$$

Fig. 1 に、局所半凹関数 V と (11)~(13) で定義される分解 $\{V_s\}$ のグラフを示す。グラフより、点 x における関数の分解とは、 $V(x)$ の値に対して上から接する関数の集合で、最小を取ることで局所的にもとの関数が表現できるものである

と読み取れる。これらは条件 (7), 条件 (8) に対応する。 ■

3.2 局所半凹関数に対する分解の性質

以下は分解の基本的な性質である。

補題 1. $x \in \mathcal{X}$ における局所半凹関数 $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ の C^1 級関数による分解 $\{V_s : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}$ を考える。 V の任意の連続微分可能点 $x' \in \mathcal{E}$ に対し、 $(dV)_{x'} = (dV_s)_{x'}$ を満たす $s \in \mathcal{S}$ が存在。 ■

証明. Alexandroff の定理 (文献 6) 定理 2.3.1) より、 $\mathcal{E}$ 内のほとんど至るところで V は C^2 級であることに注意する。 V の連続微分可能点 x' の開近傍 Ω が存在して、以下の関数 $V_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は、任意の $x'' \in \Omega$ に対し、 $V_0(x'') = 0$ を満たす。

$$V_0 := \min_{s \in \mathcal{S}} (V_s - V) \quad (15)$$

各 $s \in \mathcal{S}$ に対し $V_s - V$ は x まわりで C^1 級であることに注意すると、 $(d(V_s - V))_{x'} = 0$ を満たす $s \in \mathcal{S}$ が存在しないなら、 $V_0(x'') < 0$ を満たす点 $x'' \in \Omega$ が存在することになるので矛盾。ゆえに、 $(dV)_{x'} = (dV_s)_{x'}$ を満たす $s \in \mathcal{S}$ が存在。 □

補題 2. 局所半凹関数 V に対する局所半凹関数による分解 $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ 、各 $s \in \mathcal{S}$ に対する C^r 級関数による V_s の分解 $\{V_{ss'}\}_{s' \in \mathcal{S}'(s)}$ を考える。このとき、 $\{V_{ss'}\}_{s \in \mathcal{S}, s' \in \mathcal{S}'(s)}$ は C^r 級関数による V の分解。ただし、 $r = 1, 2$ である。 ■

証明. 定義より明らかに成立。 □

補題 3. 連続関数 $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。各 $x \in \mathcal{X}$ において局所半凹関数による分解 $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ が存在するならば、 V は局所半凹関数。 ■

証明. 命題 1 より、各 s に対し C^2 級関数による V_s の分解 $\{V_{ss'}\}_{s' \in \mathcal{S}'(s)}$ が存在。補題 2 より、 $\{V_{ss'}\}_{s \in \mathcal{S}, s' \in \mathcal{S}'(s)}$ は C^2 級関数による V の分解。これと文献 6) 命題 3.4.1 より成立。 □

3.3 局所半凹関数の分解微分

本論文では全微分を一般化した概念である分解微分を取り扱う。本節で述べる定義は文献 9) における定義を明確にしたものになっている。

定義 4 (分解微分⁹⁾). 局所半凹関数 $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。各 $x \in \mathcal{X}$ 上で与えられた C^1 級関数による V の分解 $\{V_s\}$ に対し、以下で定義される $\tilde{D}V : \mathcal{X} \rightarrow 2^{T_x^* \mathcal{X}}$ を、 $\{V_s\}$ による V の分解微分、あるいは単に V の分解微分とよぶ。

$$\tilde{D}V(x) := \{(dV_{s'})_x \mid V_{s'} \in \{V_s\}\} \quad (16)$$

例 5. (4)~(6) で定義される局所半凹関数 V を考える。分解 $\{V'_1, V'_2\}$ に対応する、点 0 における分解微分は以下で計算さ

れる.

$$\tilde{D}V(0) = \left\{ \xi dx \mid \xi = \frac{\partial V_1'}{\partial x}(0), \frac{\partial V_2'}{\partial x}(0) \right\} \quad (17)$$

$$= \{ \xi dx \mid \xi = -2, 2 \} \quad (18)$$

ただし, dx は余接空間 $T_x^*\mathbb{R}$ の自然な基底であり, ξ は基底 dx に対応するベクトルの構成要素である.

(11)~(13) で定義される分解 $\{V_s\}$ に対応する点 0 における分解微分は以下で計算される.

$$\tilde{D}V(0) = \left\{ \frac{\partial V_s}{\partial x}(0) dx \right\}_{s \in \mathcal{S}} \quad (19)$$

$$= \left\{ \xi dx \mid \xi = -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2 \right\} \quad (20)$$

(11)(12)(14) で定義される分解 $\{V_s\}$ に対応する点 0 における分解微分も同様に以下で計算される.

$$\tilde{D}V(0) = \left\{ \xi dx \mid \xi \in [-2, 2] \right\} \quad (21)$$

この例で示したように, 微分不可能な点上において分解の取り方は無数に存在するため, 分解微分の取り方も無数に存在する. そのため, 「極小」「極大」に限って分解を取った場合の分解微分を考えることは自然な発想である.

定義 5 (極小分解, 極大分解). $x \in \mathcal{X}$ における局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ の C^1 級関数による分解 $\{V_s: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{s \in \mathcal{S}}, \{V_{s'}: \mathcal{E}' \rightarrow \mathbb{R}\}_{s' \in \mathcal{S}'}$ を考える. x の開近傍 $\Omega \subset \mathcal{E} \cap \mathcal{E}'$ が存在して, 以下が満たされるとき, $\{V_s\} \preceq \{V_{s'}\}$ とかく.

$$\{V_s|_{\Omega}\}_{s \in \mathcal{S}} \subset \{V_{s'}|_{\Omega}\}_{s' \in \mathcal{S}'} \quad (22)$$

ただし, $V_s|_{\Omega}$ は V_s の Ω による制限である.

分解 $\{V_s\}$ が極小分解であるとは, $\{V_{s'}\} \preceq \{V_s\}$ かつ $\{V_{s'}|_{\Omega}\} \neq \{V_s|_{\Omega}\}$ を満たす C^1 級関数による分解 $\{V_{s'}\}$ が存在しないことをいう. 同様にして極大分解も定義される. ■

明らかに任意の局所半凹関数に対して極小分解が存在する.

例 6. (4) で定義される局所半凹関数 V を考える. (5)(6) で定義される分解 $\{V_1', V_2'\}$ は極小分解の一例である. (11)(12)(14) で定義される分解 $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ は極大分解の一例である. ■

以下は極小分解の特徴的な性質である.

補題 4. x における極小分解 $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ を考える. 任意の $s \in \mathcal{S}$, x の開近傍 Ω に対し, 連続微分可能点 $x' \in \Omega$ が存在して, $(dV_s)_{x'} = (dV)_{x'}$ が成立. ■

補題 4 を証明するには以下の補題が必要である.

補題 5. x における極小分解 $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ を考える. 任意の $s \in \mathcal{S}$, x の開近傍 Ω に対し, $x' \in \Omega$ が存在して, $\{s'|V_{s'}(x') = V(x')\} = \{s\}$ が成立. ■

証明. 背理法で示す. $s \in \mathcal{S}$, x の開近傍 Ω が存在して, 任意

の $x' \in \Omega$ に対し, $\{s'|V_{s'}(x') = V(x')\} \neq \{s\}$ と仮定する. $\{s'|V_{s'}(x') = V(x')\}$ が空集合だと分解の定義 (8) に反するから, $s \in \{s'|V_{s'}(x') = V(x')\}$ なら, $\{s'|V_{s'}(x') = V(x')\}$ は s 以外の要素ももつ. ゆえに, $\{V_s\}$ から V_s を取り除いたものは, V の x における分解である. これは $\{V_s\}$ が極小分解であることと矛盾する. □

補題 4 の証明. 補題 5, 文献 6) 命題 3.1.5(c), 文献 6) 定理 3.4.4 より成立. □

以下は分解微分より自然に導出される概念である.

定義 6 (極小分解微分, 極大分解微分). 極小分解 $\{V_s\}$ による分解微分を極小分解微分とよび, $\tilde{D}_{\min}V$ とかく. 同様に極大分解微分 $\tilde{D}_{\max}V$ も定義される. ■

例 7. (4) で定義される局所半凹関数 V に対し, (18),(21) で定義される分解微分はそれぞれ極小分解, 極大分解の一例である. ■

極大分解微分は明らかに一意に定まる. 極小分解微分が一意に定まるかどうかは次節で明らかになる.

3.4 一般化微分と分解微分の関係

文献 9) では, 分解微分と従来から研究されている一般化微分の包含関係を示した. 本節では極大・極小分解微分を使うことで, 一般化微分と分解微分のより具体的な関係を明らかにする.

極大分解微分に対する議論はシンプルである.

定義 7 (Fréchet 微分 (文献 13) 定義 3.1, 文献 6) 命題 3.1.7)). 局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. x の開近傍 $\mathcal{E}$ に対し, 以下を満たす C^1 級写像全体の集合 $\{V_i: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ を考える.

$$V(x') \leq V_i(x') \quad \forall i \in I, x' \in \mathcal{E} \quad (23)$$

$$V_i(x) = V(x) \quad \forall i \in I \quad (24)$$

このとき, 以下で定義される $\partial_F V: \mathcal{X} \rightarrow 2^{T_x^* \mathcal{X}}$ を Fréchet 微分とよぶ.

$$\partial_F V := \{dV_{i'} \mid V_{i'} \in \{V_i\}_{i \in I}\} \quad (25)$$

補題 6. 局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 以下が成立. ■

$$\tilde{D}_{\max} V = \partial_F V \quad (26)$$

証明. 極大分解の定義と定義 7 は一致しているため成立. □

問題は極小分解微分に対する議論である.

定義 8 (可到達勾配 (文献 6) 定義 3.1.10), 可到達微分). 局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. $p \in T_x^* \mathcal{X}$ が点 $x \in \mathcal{X}$ 上の可到達勾配であるとは, $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ 上の点列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して, 以下を満たすことをいう.

(A1) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し V は x_k 上で連続微分可能

(A2) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

(A3) $\lim_{k \rightarrow \infty} (dV)_{x_k} = p$

x 上の可到達勾配全体からなる集合を可到達微分とよび、 $D^*V(x)$ とかく、

補題 7. 局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、以下が成立。

$$\tilde{D}_{\min} V = D^*V \quad (27)$$

証明. $\tilde{D}_{\min} V(x) \subset D^*V(x)$ を示す。固定した $dV_s(x) \in \tilde{D}_{\min} V(x)$ を考える。補題 4 より任意の x の開近傍 Ω_k 上において、 $dV(x_k) = dV_s(x_k)$ を満たす V の連続微分可能点 x_k が存在。 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \{x\}$ となるように開近傍の族 $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を取ると、点列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は条件 (A1)(A2)(A3) を満たすため、 $p \in D^*V(x)$ を確認できた。

$\tilde{D}_{\min} V(x) \supset D^*V(x)$ を示す。 x まわりのチャート $(\mathcal{W}, \eta)$ を 1 つ取ると、自然な基底が存在して、 x における関数 V_s に対する微分 $(dV_s)_x$ の局所座標表現に対するベクトルの構成要素は $\partial V_{s\mathcal{W}} / \partial \xi(\eta(x))$ と表わされる。ただし、 $\xi \in \eta(\mathcal{W})$ である。

このとき、任意の $p(x) \in D^*V(x)$ に対し、 $p(x)$ の局所座標表現 $(d\eta_x^*)^{-1}p(x)$ に対するベクトルの構成要素を $p_{\mathcal{W}}$ とすると、以下が成立。

$$\min_{s \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x)) - p_{\mathcal{W}} \right\| \quad (28)$$

$$= \min_{s \in \mathcal{S}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x)) - \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x_k)) \right\| \quad (29)$$

$$= \min_{s \in \mathcal{S}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x_k)) - \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x_k)) \right\| \quad (30)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{s \in \mathcal{S}} \left\| \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x_k)) - \frac{\partial V_{s\mathcal{W}}}{\partial \xi}(\eta(x_k)) \right\| \quad (31)$$

$$= 0 \quad (32)$$

ただし、(28)(29) 間で条件 (A3) を、(29)(30) 間で V_s の局所座標表現 $V_{s\mathcal{W}}$ が C^1 級であることを、(31)(32) 間で補題 1 を使った。(28)~(32) より、 $(dV_s)_x = p(x)$ を満たす $s \in \mathcal{S}$ が存在。ゆえに、 $\tilde{D}_{\min} V(x) \supset D^*V(x)$ が成立。 $\square$

系 1 (補題 7 の系)。任意の局所半凹関数に対し、極小分解微分が一意に定まる。 $\blacksquare$

証明. 2 つの極小分解を考える。補題 7 より、一方による極小分解微分と可到達微分は一致。他方による極小分解微分と可到達微分も一致。ゆえに成立。 $\square$

以下が本章の結論である。

定理 1. 局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。任意の V の分解微分 $\tilde{D}V$ に対し、以下が成立^(注 1)。

(注 1) 局所半凹関数に対し、Fréchet 微分、Clarke 微分、Proximal subgradient、可到達微分の凸包は一致するため、(33) の第 5 項はこれら好きな概念に読み替えることもできる。

$$D^*V = \tilde{D}_{\min} V \subset \tilde{D}V \subset \tilde{D}_{\max} V = \partial_F V \quad (33)$$

証明. 補題 6、補題 7 より成立。 $\square$

定理 1 は文献 9) での議論を拡張・整理したものである。また、分解微分を使うことで、可到達微分を条件 (A2)(A3) で述べた極限操作を行なうことなく取り扱い可能とした利点もある。

4. 対象問題

多様体 $\mathcal{X}$ 上で定義された以下の非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (34)$$

ただし、 $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U} \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m); t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$ であり、 $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^m$ への写像全体の集合を意味する。写像 $f: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow T_x \mathcal{X}$ は x, u に関して連続であることを仮定する。

本論文の問題は、システム (34) の原点 $0 \in \mathcal{X}$ を大域的漸近安定化するための局所半凹実用制御 Lyapunov 関数を設計することである。ただし、原点 0 とは安定化したい平衡点のことであり、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数は次節で定義される。

4.1 局所半凹実用制御 Lyapunov 関数

定義 9 (局所半凹実用制御 Lyapunov 関数)。システム (34) に対し、以下を満たす局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数とよぶ (文献 9) 定義 5, 文献 9) 定理 2)。

(B1) 各 $K > 0$ に対しレベル集合 $\{x \in \mathcal{X} \mid V(x) \leq K\}$ はコンパクト

(B2) $V(0) = 0$ かつ、任意の $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ に対し、 $V(x) > 0$

(B3) $R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し、コンパクト集合 $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ 、正の定数 Q 、分解微分 $\tilde{D}V$ 、 $p(x) \in \tilde{D}V(x)$ が存在して、以下が成立

$$\begin{aligned} \min_{u \in \bar{\mathcal{U}}} \langle p(x), f(x, u) \rangle &< -Q, \\ \forall x \in \{x \in \mathcal{X} \mid R_1 \leq V(x) \leq R_2\} \end{aligned} \quad (35)$$

Fréchet 微分を使って定義 9 を書き直すことも可能である。

定義 10 (定義 9 と同値な定義)。システム (34) に対し、(B1)、(B2) ならびに以下の (B3') を満たす局所半凹関数 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数とよぶ。

(B3') $R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し、コンパクト集合 $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ 、正の定数 Q 、 $p(x) \in \partial_F V(x)$ が存在して、以下が成立

$$\min_{u \in \bar{\mathcal{U}}} \langle p(x), f(x, u) \rangle < -Q,$$

$$\forall x \in \{x \in \mathcal{X} \mid R_1 \leq V(x) \leq R_2\} \quad (36)$$

■

4.2 層上におけるシステムの再構成

与えられた層空間 $\tilde{\mathcal{X}}$ ならびにコプロダクト $\phi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ を考える. 定義 1 より, 任意の $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ に対し, コプロダクト ϕ の押し出し $(d\phi)_{\tilde{x}}$ は全単射だから, 多様体 $\tilde{\mathcal{X}}$ 上で定義される以下のシステムを一意に定めることができる.

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \quad (37)$$

$$:= (d\phi_{\tilde{x}})^{-1} f(\phi(\tilde{x}), u) \quad (38)$$

5. 多層最小射影法による局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計

3章の議論ならびに文献 12) 定理 4 を踏まえ, 多層最小射影法は局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法としても使用できることを示す.

5.1 主結果

以下が本論文の主結果であり, 文献 12) 定理 4 を拡張したものである. 違いは定理内の条件 (C4) を局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計用に拡張したことである.

定理 2. 非線形システム (34) に対し, 層空間 $\tilde{\mathcal{X}}$, 全射の C^2 級コプロダクト $\phi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, 以下を満たす局所半凹関数 $\hat{V}: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

- (C1) 各 $K > 0$ に対し集合 $\{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}} \mid \hat{V}(\tilde{x}) \leq K\}$ はコンパクト
- (C2) 集合 $\mathcal{M} := \{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}} \mid V(\tilde{x}) = 0, \phi(\tilde{x}) = 0\}$ は空集合でない
- (C3) 任意の $\tilde{x} \notin \mathcal{M}$ に対し, $\hat{V}(\tilde{x}) > 0$
- (C4) $R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, コンパクト集合 $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$, 正の定数 Q , 分解微分 $\tilde{D}\hat{V}$, $\tilde{p}(\tilde{x}) \in \tilde{D}\hat{V}(\tilde{x})$ が存在して, 以下が成立

$$\min_{u \in \bar{\mathcal{U}}} \langle \tilde{p}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle < -Q,$$

$$\forall \tilde{x} \in \{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}} \mid R_1 \leq \hat{V}(\tilde{x}) \leq R_2\} \quad (39)$$

このとき, 以下で定義される $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{X}$ 上のシステム (34) に対する局所半凹実用制御 Lyapunov 関数である.

$$V(x) := \min_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x}) \quad (40)$$

■

定理 2 は Fréchet 微分を使って書き直すこともできる.

系 2 (定理 2 と同値な命題). 非線形システム (34) に対し, 層空間 $\tilde{\mathcal{X}}$, 全射の C^2 級コプロダクト $\phi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, (C1)(C2)(C3) ならびに以下の (C4') を満たす局所半凹関数 $\hat{V}: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

(C4') $R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, コンパクト集合 $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$, 正の定数 Q , $\tilde{p}(\tilde{x}) \in \partial_F \hat{V}(\tilde{x})$ が存在して, (36) が成立

このとき, (40) で定義される $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{X}$ 上のシステム (34) に対する局所半凹実用制御 Lyapunov 関数である. ■

以下は文献 9) 内の (51) を拡張したものであり, 得られた局所半凹実用制御 Lyapunov 関数に対し, 条件 (B3) を満たす分解微分を計算するためのツールである.

定理 3. (40) で定義される V ならびに条件 (C4) で定義される分解微分 $\tilde{D}\hat{V}$ を考える. 以下が成立する分解微分 $\tilde{D}V$ が存在して, 局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の条件 (B3) を満たす.

$$\tilde{D}V(x) = \left\{ (d\phi_{\tilde{x}}^*)^{-1} \tilde{p}(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \mathcal{S}(x), \tilde{p}(\tilde{x}) \in \tilde{D}\hat{V}(\tilde{x}) \right\} \quad (41)$$

$$\mathcal{S}(x) := \operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x}) \quad (42)$$

ただし, (42) 右辺における argmin 演算は以下で定義される.

$$\operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x}) := \left\{ \tilde{x} \mid \hat{V}(\tilde{x}) = \min_{\tilde{x}' \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x}') \right\} \quad (43)$$

■

5.2 主結果の証明

定理 2 を証明するため, 以下の補題を用意する.

補題 8. V は条件 (B1)(B2) を満たす連続関数. ■

証明. 文献 12) 定理 4 の証明と同様に成立. □

定義 11 (柱状近傍¹⁰⁾). 与えられた点 $x \in \mathcal{X}$ において, 各 $\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)$ に対して以下を満たす開近傍 $N(\tilde{x})$ が存在するとき, 集合 $C(x) \subset \tilde{\mathcal{X}}$ を x の柱状近傍とよぶ.

$$C(x) = \bigcup_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} N(\tilde{x}) \quad (44)$$

■

以下は証明のキーとなる補題である.

補題 9. (40) で定義される V に対し, 各点 $x \in \mathcal{X}$ に対し, 以下を満たす x の開近傍 $\mathcal{E}$ ならびに柱状近傍 $C(x) = \bigcup_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} N(\tilde{x})$ が存在.

- ϕ の $N(\tilde{x})$ による制限 $\phi_{N(\tilde{x})}: N(\tilde{x}) \rightarrow \mathcal{E}$ は微分同相写像
- 任意の $x \in \mathcal{E}$ に対し, $V(x') = \min_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}(x')$

■

証明. 文献 10) 補題 4 によって得られる x の柱状近傍 $C' = \bigcup_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} N'(\tilde{x})$ と, 各 $\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)$ に対し逆写像定理により得られる $\tilde{x}$ の開近傍 $F(\tilde{x})$ を用意する. このとき, 以下のよ

うに柱状近傍 C を定義することで証明できた.

$$N(\tilde{x}) := \phi^{-1}(\mathcal{E}) \quad (45)$$

$$\mathcal{E} := \bigcap_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \phi(N'(\tilde{x})) \cap \bigcap_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \phi(F(\tilde{x})) \quad (46)$$

補題 9 より V の局所半凹関数による分解を得ることができる.

補題 10. 補題 9 で与えられる柱状近傍 C に対し, コンパクトな添え数集合 $\mathcal{S}(x) \subset \phi^{-1}(x)$ が存在して, $\{\hat{V} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}\}_{\tilde{x} \in \mathcal{S}(x)}$ は V の局所半凹関数による分解である. ■

証明. 文献 10) 補題 4 より, (43) で定義される $\phi^{-1}(x)$ の部分集合 $\operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x})$ は有限集合である. 有限集合はコンパクト集合だから, (42) のように, $\mathcal{S}(x) := \operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x})$ と定義して成立. □

補題 11. V は局所半凹関数. ■

証明. 補題 3, 補題 10 より成立. □

補題 12. (40) で定義される V ならびに条件 (C4) で定義される分解微分 $\tilde{D}\hat{V}$ に対し, V の C^1 級関数による分解 $\{V_s\}$ が存在して, $\{V_s\}$ による分解微分 $\tilde{D}V$ は (41) を満たす. ■

証明. 各 $\tilde{x} \in \mathcal{S}(x)$ に対し $\hat{V} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}$ は局所半凹関数. 条件 (C4) で定義される分解微分 $\tilde{D}\hat{V}$ に対応した $\hat{V}$ の分解 $\{\hat{V}_{s'}\}_{s' \in \mathcal{S}'(\tilde{x})}$ を考えると, $\{\hat{V}_{s'} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}\}_{s' \in \mathcal{S}'(\tilde{x})}$ は $\hat{V} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}$ の C^1 級関数による分解.

補題 2, 補題 10 より以下は C^1 級関数による V の分解.

$$\{V_s\} := \{\hat{V}_{s'} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}\}_{\tilde{x} \in \mathcal{S}(x), s' \in \mathcal{S}'(\tilde{x})} \quad (47)$$

分解微分の定義より, 各 $(\tilde{x}', s') \in \operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \mathcal{S}(x), s' \in \mathcal{S}'(\tilde{x})} \hat{V}_{s'} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1}(x)$ に対し, $d(\hat{V}_{s'} \circ \phi_{N(\tilde{x})}^{-1})_x \in \tilde{D}V(x)$. 文献 1) 命題 3.6(d) より $d(\phi_{N(\tilde{x}')}^{-1})_x = (d\phi_{\tilde{x}'})^{-1}$. $\tilde{x}' = \phi_{\tilde{x}'}^{-1}(x)$ より以下が成立するため, 証明できた.

$$d(\hat{V}_{s'} \circ \phi_{N(\tilde{x}')}^{-1})_x = (d\hat{V}_{s'})_{\tilde{x}'} \circ d(\phi_{N(\tilde{x}')}^{-1})_x \quad (48)$$

$$= (d\phi_{\tilde{x}'}^*)^{-1}(d\hat{V}_{s'})_{\tilde{x}'} \quad (49)$$

補題 13. 条件 (C4) で定義される分解微分 $\tilde{D}\hat{V}$, (42) で定義される $\mathcal{S}(x)$, 補題 12 で定義される $\tilde{D}V(x)$ を考える. 任意の $x \in \mathcal{X}$, $\tilde{x} \in \mathcal{S}(x)$, $\tilde{p}(\tilde{x}) \in \tilde{D}\hat{V}(\tilde{x})$ に対し, 以下が成立.

$$\langle p(x), f(x, u) \rangle = \langle \tilde{p}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle \quad (50)$$

$$p(x) := (d\phi_{\tilde{x}}^*)^{-1}\tilde{p}(\tilde{x}) \in \tilde{D}V(x) \quad (51)$$

証明. 補題 12 より $p(x) \in \tilde{D}V(x)$. また, 以下より成立.

$$\langle p(x), f(x, u) \rangle = \langle d\phi_{\tilde{x}}^*p(x), (d\phi_{\tilde{x}})^{-1}f(x, u) \rangle \quad (52)$$

$$= \langle \tilde{p}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle \quad (53)$$

以上より, 主結果の証明の準備が整った.

定理 2 の証明. 補題 8, 補題 11 より, 条件 (B3) が満たされることを確認すれば主結果を示したことになる.

$R_2 > R_1 > 0$ を満たす任意の $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, $\tilde{D}V(x)$ を補題 12 で, $\bar{U}, Q$ を条件 (C4) で定義されたものとする. 任意の $x \in \{x \in \mathcal{X} \mid R_1 \leq V(x) \leq R_2\}$ に対し, $\tilde{x} \in \operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)} \hat{V}(\tilde{x})$ を取り, (C4) を満たす $\tilde{p}(\tilde{x})$ を使って (51) で $p(x)$ を定義すると, 補題 13 より以下が成立.

$$\min_{u \in \bar{U}} \langle p(x), f(x, u) \rangle = \min_{u \in \bar{U}} \langle \tilde{p}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle \quad (54)$$

$\tilde{x} \in \{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}} \mid R_1 \leq \hat{V}(\tilde{x}) \leq R_2\}$ ならびに条件 (C4) より, 以下のとおり条件 (B3) が満たされる.

$$\min_{u \in \bar{U}} \langle p(x), f(x, u) \rangle < -Q \quad (55)$$

定理 3 の証明. 補題 12 ならびに定理 2 より成立. □

6. 設 計 例

本章では多層最小射影法による局所半凹実用制御 Lyapunov 関数を使った制御則の設計例を紹介する.

記述を簡便にするため, 本章では多様体に対する各種概念を, ユークリッド空間に対する各種概念に読み替えて記述する. たとえば, 余接ベクトル $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ は単に n 次元行ベクトル $[a_1, \dots, a_n]$ と記述する.

6.1 シンプルな障害物回避問題に対する設計例

平面上から $[-8, 0]^T$ を中心とする半径 1 の円をくりぬいた平面 $\mathcal{X}_{e1}$ 上に配置された移動ロボットのシステムを考える.

$$\dot{x} = u \quad (56)$$

$$\mathcal{X}_{e1} := \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}(-8, 0) \quad (57)$$

$$\mathcal{B}(x, y) := \{(x_1, x_2)^T \mid (x_1 - x)^2 + (x_2 - y)^2 \leq 1\} \quad (58)$$

ただし, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathcal{X}_{e1}, u \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ である.

このシステムに対し, 以下で定義される層空間・コプロダクトを考える.

$$L_{e1} := \{1\} \quad (59)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_{e1} := \mathbb{R}^2 \quad (60)$$

$$\phi_{e1}(\tilde{x}) := \begin{bmatrix} (r_{e1}(\tilde{x}) + d_{e1+1}(\tilde{x})) \cos \tilde{x}_2 - d_{e1+1}(\tilde{x}) \\ (r_{e1}(\tilde{x}) + d_{e1+1}(\tilde{x})) \sin \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$r_{e1}(\tilde{x}) := \begin{cases} \tilde{x}_1 & (\tilde{x}_1 \geq 0) \\ \frac{2}{\pi} d_{e1}(\tilde{x}) \tan^{-1}(\tilde{x}_1 \frac{\pi}{2d_{e1}(\tilde{x})}) & (\tilde{x}_1 < 0) \end{cases} \quad (62)$$

$$d_{e1}(\tilde{x}) := \frac{7}{\tilde{x}_2^2 + 1}, \quad d_{e1+1}(\tilde{x}) := 1 + d_{e1}(\tilde{x}) \quad (63)$$

Fig. 2 Example 1: manifold $\mathcal{X}_{e1}$ and coproduct ϕ_{e1}

Fig. 3 Locally semiconcave function V_{e1} on manifold $\mathcal{X}_{e1}$

Fig. 2 にコプロダクト ϕ_{e1} による対応関係のイメージを示す. 写像 ϕ_{e1} は平面 $\tilde{\mathcal{X}}_{e1} = \mathbb{R}^2$ を帯状に縮め, くりぬいた円に巻きつける対応関係にあたる. 層空間とは, 「(単数/複数の)空間をやわらかく曲げ伸ばしして, もとの空間に重ねる対応関係」と解釈できる.

文献 9) と同様の議論より, 以下で定義される $\hat{V}_{e1}$ ならびに $\tilde{D}\hat{V}_{e1}$ は条件 (C1)~(C4) が満たされていることが確認できる.

$$\hat{V}_{e1}(\tilde{x}) := \tilde{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \tilde{x} \quad (64)$$

$$\tilde{D}\hat{V}_{e1}(\tilde{x}) := \left\{ \frac{\partial \hat{V}_{e1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) \right\} \quad (65)$$

主結果である定理 2 より, 以下で定義される関数 V_{e1} は局所半凹実用制御 Lyapunov 関数である.

$$V_{e1}(x) := \min_{\tilde{x} \in \phi_{e1}^{-1}(x)} \hat{V}_{e1}(\tilde{x}) \quad (66)$$

定理 3 より, 以下で計算される分解微分 $\tilde{D}V_{e1}(x)$ は局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の条件 (B3) を満たす.

$$\tilde{D}V_{e1}(x) = \left\{ \frac{\partial \hat{V}_{e1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) \left(\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) \right)^{-1} \middle| \tilde{x} \in \mathcal{S}_{e1}(x) \right\} \quad (67)$$

$$\mathcal{S}_{e1}(x) := \operatorname{argmin}_{\tilde{x} \in \phi_{e1}^{-1}(x)} \hat{V}_{e1}(\tilde{x}) \quad (68)$$

Fig. 3 に V_{e1} のグラフを示す. 目標地点である $[x_1, x_2]^T =$

$[0, 0]^T$ で 0 を, 円形障害物上で無限大の値を取っていることが確認できる. 目標地点から見て, 円形障害物の裏側に尾根のような微分不可能領域ができていいることにも注意しよう.

Sontag 型制御則⁹⁾を設計するため, 分解微分の要素 $p_{e1}(x) \in \tilde{D}V_{e1}(x)$ を以下のとおり選ぶ.

$$p_{e1}(x) := \frac{\partial \tilde{V}_{e1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{s}_{e1}(x)) \left(\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{s}_{e1}(x)) \right)^{-1} \quad (69)$$

$$\tilde{s}_{e1}(x) := \tilde{s}_{e1,2} \circ \tilde{s}_{e1,1}(x) \quad (70)$$

$$\tilde{s}_{e1,1}(x) := \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1 + 8)^2 + x_2^2} - 1 - \tilde{d}_{e1}(x) \\ \arg(x_1 + 8 + ix_2) \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\tilde{s}_{e1,2}(\tilde{x}) := \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & (\tilde{x}_1 \geq 0) \\ \frac{2}{\pi} d_{e1}(\tilde{x}) \tan(\tilde{x}_1 \frac{\pi}{2d_{e1}(\tilde{x})}) & (\tilde{x}_1 < 0) \\ \tilde{x}_2 & \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\tilde{d}_{e1}(x) := \frac{7}{(\arg(x_1 + 8 + ix_2))^2 + 1} \quad (73)$$

ただし, 関数 $\tilde{s}_{e1}(x)$ は, 各 x に対し (67) 内にある $\mathcal{S}_{e1}(x)$ の要素を 1 つ定める関数である.

このとき, システム (56) に対する Sontag 型制御則⁹⁾は, 以下のように計算される.

$$u = -p_{e1}(x) \quad (74)$$

$\tilde{s}_{e1}$ は不連続関数であるため, 上記制御則は不連続な静的状態フィードバック制御則であることに注意する.

6.2 複雑な障害物回避問題に対する設計例

以下で定義される平面 $\mathcal{X}_{e2}$ 上に配置された移動ロボットのシステムを考える.

$$\dot{x} = u \quad (75)$$

$$\mathcal{X}_{e2} := \{(x_1, x_2) \mid -12 < x_1 < 12, -12 < x_2 < 12\}$$

$$\setminus \{(x_1, x_2) \mid 4 \leq x_1 \leq 12, 4 \leq x_2 \leq 12\}$$

$$\setminus \{(x_1, x_2) \mid 4 \leq x_1 \leq 12, -12 \leq x_2 \leq -4\}$$

$$\setminus \{(x_1, x_2) \mid -12 \leq x_1 \leq 4, 4 \leq x_2 \leq 12\}$$

$$\setminus \{(x_1, x_2) \mid -12 \leq x_1 \leq 4, -12 \leq x_2 \leq -4\}$$

$$\setminus \mathcal{B}(8, 0) \setminus \mathcal{B}(0, 8) \setminus \mathcal{B}(-8, 0) \setminus \mathcal{B}(0, -8) \quad (76)$$

ただし, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathcal{X}_{e1}, u \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ である.

多様体 $\mathcal{X}_{e2}$ は 4 つの穴が開いている空間であり, システム (75) の目標点 $[x_1, x_2]^T = [0, 0]^T$ を大域的に安定化する静的な不連続状態フィードバックの設計は, 一般には難しい問題である. 1 つの空間 $\tilde{\mathcal{X}}_i$ のみで条件 (C1)~(C4) を満たす層空間 $\tilde{\mathcal{X}}$ を設計することも困難であることに注意する.

このシステムに対し, 以下で定義される層空間・コプロダクトを考える.

$$L_{e2} := \{1, 2, 3, 4\} \quad (77)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_{e2,i} := \mathcal{X}_{e1} \quad (78)$$

Fig. 4 Example 2: manifold $\mathcal{X}_{e2}$ and coproduct ϕ_{e2}

$$\phi_{e2,i}(\tilde{x}) := T_i \phi_{\text{box}}(\tilde{x}) \quad (79)$$

ただし, $i \in L_{e2}$ であり, T_i, ϕ_{box} は以下で定義される.

$$T_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$T_3 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, T_4 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\phi_{\text{box}} : \begin{cases} x_1 = \begin{cases} \frac{8}{\pi} \tan^{-1}(\frac{\pi}{8} \tilde{x}_1) & (0 < \tilde{x}_1) \\ \tilde{x}_1 & (-10 < \tilde{x}_1 \leq 0) \\ \frac{4}{\pi} \tan^{-1}(\frac{\pi}{4}(\tilde{x}_1 + 10)) - 10 & (\tilde{x}_1 \leq -10) \end{cases} \\ x_2 = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \tan^{-1}(\frac{\pi}{4}(\tilde{x}_2 - 2)) + 2 & (2 < \tilde{x}_2) \\ \tilde{x}_2 & (-2 < \tilde{x}_2 \leq 2) \\ \frac{4}{\pi} \tan^{-1}(\frac{\pi}{4}(\tilde{x}_2 + 2)) - 2 & (\tilde{x}_2 \leq -2) \end{cases} \end{cases} \quad (82)$$

Fig. 4 に ϕ_{e2} による対応関係のイメージを示す. 写像 ϕ_{e2} は複数の空間 $\tilde{\mathcal{X}}_{e2,i} = \tilde{\mathcal{X}}_{e1}$ を束ね, $\mathcal{X}_{e2}$ を覆う対応関係にあたる. 層空間とは, 「(単数/複数の) 空間をやわらかく曲げ伸ばして, もとの空間に重ねる対応関係」と解釈できることがこの例からもわかる. 各 $\tilde{\mathcal{X}}_{e2,i}$ として, システム (56) が定義される多様体 $\tilde{\mathcal{X}}_{e1}$ をそのまま使っていることにも注意しよう.

簡単な計算より, 以下で定義される $\hat{V}_{e2,i}$ ならびに $\tilde{D}\hat{V}_{e2,i}$ は条件 (C1)~(C4) を満たしていることが確認できる.

$$\hat{V}_{e2,i}(\tilde{x}) := V_{e1}(\tilde{x}) \quad (83)$$

$$\tilde{D}\hat{V}_{e2,i}(\tilde{x}) := \tilde{D}V_{e1}(\tilde{x}) \quad (84)$$

定理 2 より, システム (75) に対する局所半凹実用制御 Lyapunov 関数が以下のとおり得られる.

$$V_{e2}(x) := \min_{\tilde{x} \in \phi_{e2}^{-1}(x)} \hat{V}_{e2}(\tilde{x}) \quad (85)$$

Fig. 5 に V_{e2} のグラフを示す. 目標地点である $[x_1, x_2]^T = [0, 0]^T$ で 0 を, 円形障害物上や通路外で無限大の値を取っていることが確認できる. (83) より V_{e2} は V_{e1} を利用して設計した関数であるため, V_{e2} も V_{e1} と同様に, 円形障害物の裏

Fig. 5 Locally semiconcave function V_{e2} on manifold $\mathcal{X}_{e2}$

側に尾根のような微分不可能領域ができていていることに注意しよう.

定理 3 ならびに (84) より, 以下で計算される分解微分 $\tilde{D}V_{e2}(x)$ は局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の条件 (B3) を満たす.

$$\tilde{D}V_{e2}(x) = \left\{ \tilde{p}(\tilde{x}) \left(\frac{\partial \phi_{e2}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) \right)^{-1} \tilde{x} \in \mathcal{S}_{e2}(x), \right. \\ \left. \tilde{p}(\tilde{x}) \in \tilde{D}V_{e1}(\tilde{x}) \right\} \quad (86)$$

$$\mathcal{S}_{e2}(x) := \underset{\tilde{x} \in \phi_{e2}^{-1}(x)}{\text{argmin}} \hat{V}_{e2}(\tilde{x}) \quad (87)$$

分解微分の要素として以下で定義される $p_{e2}(x) \in \tilde{D}V_{e2}(x)$ を考える.

$$p_{e2}(x) := p_{e1}(\tilde{s}_{e2}(x)) \left(\frac{\partial \phi_{e2}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{s}_{e2}(x)) \right)^{-1} \quad (88)$$

$$\tilde{s}_{e2}(x) := \begin{cases} \phi_{e2,1}^{-1}(x) & (x \in \mathcal{X}_1) \\ \vdots \\ \phi_{e2,4}^{-1}(x) & (x \in \mathcal{X}_4) \end{cases} \quad (89)$$

$$\mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} \mid \phi_{e2,i}^{-1}(x) \in \mathcal{S}_{e2}(x) \\ \phi_{e2,j}^{-1}(x) \notin \mathcal{S}_{e2}(x) \ (j < i)\} \ (i \in L_{e2}) \quad (90)$$

ただし, 関数 $\tilde{s}_{e2}(x)$ は, 各 x に対し (86) 内にある $\mathcal{S}_{e2}(x)$ の要素を 1 つ定める関数である.

このとき, システム (75) に対する Sontag 型制御則⁹⁾は, 以下のように計算される.

$$u = -p_{e2}(x) \quad (91)$$

$$p_{e2}(x) = \begin{cases} p_{e1}(\phi_{e2,1}^{-1}(x)) \left(\frac{\partial \phi_{e2,1}}{\partial \tilde{x}}(\phi_{e2,1}^{-1}(x)) \right)^{-1} & (x \in \mathcal{X}_1) \\ \vdots \\ p_{e1}(\phi_{e2,4}^{-1}(x)) \left(\frac{\partial \phi_{e2,4}}{\partial \tilde{x}}(\phi_{e2,4}^{-1}(x)) \right)^{-1} & (x \in \mathcal{X}_4) \end{cases} \quad (92)$$

初期位置を $[x_1(0), x_2(0)]^T = [16, 16]^T$ と設定した場合のシミュレーション結果を Fig. 6~Fig. 8 に示す. ロボットは円形障害物を避けながら平面 $\mathcal{X}_{e2}$ 内を進み, 目標位置 $[x_1, x_2]^T = [0, 0]$ に到達できていることがわかる.

Fig. 6 Simulation result: trajectory in the $\mathcal{X}_{e2}$ plane

Fig. 7 Simulation result: time variation of the state

Fig. 8 Simulation result: time variation of the input

このように、多層最小射影法を使うことで、 $\mathcal{X}_{e2}$ のような複雑な空間に対して、大域的な局所半凹実用制御 Lyapunov 関数が設計できることがわかる。また、Sontag 型制御則⁹⁾により大域的な制御が実現できていることもわかる。

7. 考 察

従来の局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法である最

小射影法では、1つの空間 $\tilde{\mathcal{X}}_1$ のみで層空間 $\tilde{\mathcal{X}}$ を設計しなければならない強い制約があった。これに対し、定理 2 より、多層最小射影法により局所半凹実用制御 Lyapunov 関数が設計できることが明らかになった。多層最小射影法では、複数の空間 $\tilde{\mathcal{X}}_i$ により層空間 $\tilde{\mathcal{X}}$ を設計できるため、より複雑な多様体 $\mathcal{X}$ 上の非線形システムに対し、局所半凹実用制御 Lyapunov 関数が設計できるようになった。

6.1 節では単数障害物回避問題、6.2 節では複数障害物回避問題に対する多層最小射影法の適用例を示した。前者は 1つの空間のみで層空間を設計した例、後者は複数の空間で層空間を設計した例になっている。(78)より、各 $\tilde{\mathcal{X}}_{e2,i}$ として $\tilde{\mathcal{X}}_{e1}$ をそのまま使うことで、単数障害物回避問題に対する制御 Lyapunov 関数の設計結果を、複数障害物回避問題に対する制御 Lyapunov 関数の設計に活用している。この活用は(83)(84)(86)(88)にも表われており、単数障害物回避問題に対する制御 Lyapunov 関数 V_{e1} ・分解微分 $\tilde{D}V_{e1}$ を、複数障害物回避問題に対する制御 Lyapunov 関数 V_{e2} ・分解微分 $\tilde{D}V_{e2}$ の設計に活用していることが確認できる。

このように、多層最小射影法には、層空間の多層構造を利用することで複雑な問題に対して局所半凹実用制御 Lyapunov 関数を設計可能とした利点がある。また、簡単な問題に対する設計結果を複雑な問題に対する設計に活用可能とする利点もある。

これらの利点は、制御則設計資産の再利用可能性を向上させている意味ももっており、不連続制御の設計結果をほかの問題にも自由に活用可能とする意義ももっている。

8. おわりに

本論文では、多様体上で定義された非線形システムに対する局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計問題に対し、多層最小射影法は局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法としても利用可能であるか検証を行なった。

まず、検証の準備として、局所半凹関数の分解や分解微分を導入・整理し、可到達微分・分解微分・Fréchet 微分との関係性を定理 1 としてまとめた。つぎに主結果である定理 2 を証明し、多層最小射影法は局所半凹実用制御 Lyapunov 関数の設計法として利用可能であることを明らかにした。

有効性の確認は、平面上を走行する円盤型単数障害物回避問題(6.1 節)ならびに複数障害物回避問題(6.2 節)に対するシミュレーション実験により行なった。

結果より、多層最小射影法は、層空間の多層構造を利用することで複雑な問題に対して局所半凹実用制御 Lyapunov 関数を設計可能とする利点、簡単な問題に対する設計結果を複雑な問題に対する設計に活用可能とする利点があることを示した。これらの利点は、制御則設計資産の再利用可能性を向上させている意味ももっており、不連続制御の設計結果をほかの問題にも自由に活用可能とする意義ももっている。

今後の課題は、分解微分とすでに提案されている一般化微分との関係をよりクリアにし、ほかの不連続制御設計法との

接続性を良くすること, 得られるシステムの軌道 $x(t)$ をある程度設計可能にすることである. 本論文では定理1を活用することで, 局所半凹実用制御 Lyapunov 関数を Fréchet 微分と分解微分の2つの流儀で表現することには成功したが, 可到達微分に関する定理は得られなかった. また, 多層最小射影法ならびに Sontag 型制御則によるフィードバック系の設計では, 制御 Lyapunov 関数の分解微分(全微分)のみを参照するため, 得られるシステムの軌道 $x(t)$ が不自然になる場合がある. 6.1節で述べた例は文献9)で挙げた設計例を改良し, 不自然さを軽減させたものだが, 抜本的な改善には至っていない. 何を以って不自然な軌道とよぶかの定義を含め, これらの解決は将来の課題としたい.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 26870711 の助成を受けたものです. 立命館大学情報理工学部知能情報学科和田隆広先生ならびに高野敏明先生より, 本論文を執筆する上での有用なアドバイスを頂戴しました.

参考文献

- 1) J.M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition, Springer (2012)
- 2) A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
- 3) D.E. Koditschek and E. Rimon: Robot navigation functions on manifolds with boundary, *Advances in Applied Mathematics*, **11**-4, 412/442 (1990)
- 4) S.P. Bhat and D.S. Bernstein: A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon, *Systems & Control Letters*, **39**-1, 63/70 (2000)
- 5) N.A. Chaturvedi, A.K. Sanyal and N.H. McClamroch: Rigid-body attitude control, *IEEE Control Systems*, **31**-3, 30/51 (2011)
- 6) P. Cannarsa and C. Sinestrari: *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control*, Springer (2004)
- 7) F.H. Clarke: Lyapunov functions and discontinuous stabilizing feedback, *Annual Reviews in Control*, **35**-1, 13/33 (2011)
- 8) L. Rifford: Existence of lipschitz and semiconcave control-lyapunov functions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **39**-4, 1043/1064 (2000)
- 9) H. Nakamura, T. Tsuzuki, Y. Fukui and N. Nakamura: Asymptotic stabilization with locally semiconcave control Lyapunov functions on general manifolds, *Systems & Control Letters*, **62**-10, 902/909 (2013)
- 10) H. Nakamura, Y. Yamashita and H. Nishitani: Minimum projection method for nonsmooth control Lyapunov function design on general manifolds, *Systems & Control Letters*, **58**-10, 716/723 (2009)
- 11) H. Nakamura, Y. Fukui, N. Nakamura and H. Nishitani: Multilayer minimum projection method for nonsmooth strict control Lyapunov function design, *Systems & Control Letters*, **59**-9, 563/570 (2010)
- 12) H. Nakamura and N. Nakamura: Multilayer minimum projection method with singular point assignment for nonsmooth control Lyapunov function design, *Asian Journal of Control*, **15**-2, 340/349 (2013)
- 13) Yu. S. Ledyaev and Q. Zhu: Nonsmooth analysis on smooth manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**-8, 3687/3732 (2007)

mathematical Society, **359**-8, 3687/3732 (2007)

[著者紹介]

福井 善朗 (正会員)

1985年8月生. 2010年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程修了, 2013年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了, 博士(工学)取得, 同年立命館大学グローバル・イノベーション研究機構専門研究員に着任, 2014年立命館大学情報理工学部知能情報学科助教, 現在に至る. ロボット制御・スマートグリッドなどの研究に従事. IEEEの会員.

中村 文一 (正会員)

2000年東京工業大学理工学部研究科修士課程修了. 2003年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士課程修了. 同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手, 2007年助教, 2011年東京理科大学理工学部電気電子情報工学科講師, 現在に至る. 博士(工学). 非線形制御, ロボット制御などの研究に従事. システム制御情報学会, 日本ロボット学会, IEEEなどの会員.