能動的外乱除去制御器を用いた場合の閉ループ系の安定性解析とその応用

杉 山 開 路*・丸 田 一 郎*・杉 江 俊 治*

Closed-loop Stability Analysis of Active Disturbance Rejection Controllers and Its Application

Kaiji SUGIYAMA*, Ichiro MARUTA* and Toshiharu SUGIE*

This paper discusses the stability analysis of the closed-loop systems with Active Disturbance Rejection Controllers. A necessary and sufficient condition is derived for a class of linear systems to be stabilized by the controllers. It turns out that the relative degree, and the minimum phase property of the plants plays a crucial role for the closed-loop stability. It is suggested how to choose the design parameters through simulation results. Finally, the effectiveness of ADRC is demonstrated through experiment using a magnetic levitation system.

Key Words: active disturbance rejection controller, stability analysis, controller design

1. はじめに

PID 制御の理論が体系化されてから 50 年以上が経過し、それ以来、さまざまな制御理論が開発されてきた。しかし、産業界における主流の制御手法は未だ PID 制御である¹⁾。その理由としては、PID 制御器が

- 構造がシンプルである。
- 調整パラメータが少ない。
- 各要素の役割が明確である。

といった特長をもっており、対象システムの詳細なモデルや制御理論の理解がなくても実システムへの適用と設計が可能であることがあげられる。一方、高次の対象システムに対してはパラメータの調整が困難であることや、制御対象の特性が変化するとパラメータを再調整する必要があるといった短所も存在している。

このような PID 制御の欠点を克服するための一手法として能動的外乱除去制御器 (Active Disturbance Rejection Controller, 以下 ADRC) が 1990 年代に Z. Gao と J. Han によって提唱された^{2), 3)}。ADRC に関しては以下のような特長が報告されている。

- 構造がシンプルである。
- 制御対象の詳細な情報が必要ではない。
- 調整パラメータが少ない。
- 高次のシステムに対してパラメータの調整が簡単である。

この ADRC は、さまざまな制御対象に対して有効であるということが数値例を用いて確認されており⁴⁾、有望な制御手法の

一つであると考えられている。そのため、これまでも ADRC を適用した際の制御系の安定性やパラメータの最適化に関する解析は行なわれてきた^{3)~8)}。また、これらの数値例や解析の結果に基づいて DC サーボモータやジャイロスコープなどの制御に ADRC を適用した例も報告されている^{9)~16)}。しかし、安定性の解析は不十分であり、制御系の安定性を理論的に保証する ADRC のパラメータの調整方針が不明確であった。

この問題を解決するために、本稿では ADRC を線形システムに適用した場合の制御系の安定性解析を行ない、制御系を安定化させるパラメータや制御対象の条件を明確にする。さらに、制御入力を低減するパラメータの調整法をシミュレーションによって明らかにする。

以下ではまず 2 章で ADRC の具体的な制御手法を説明し、同時に従来行なわれていた安定性解析の問題点に関して言及する。3 章では、2 章で述べた問題点を踏まえながら ADRC を線形システムに適用した場合の安定性の条件を解析的に導出する。4 章では、実機への適用を考慮して、制御入力の大さを低減するためのパラメータ設計方針を数値シミュレーションにより明確にする。そして 5 章では磁気浮上系に対して ADRC を適用し、3 章、4 章における解析に基づいて ADRC を実機実装できることを確認する。最後に 6 章で本稿のまとめを述べる。

また、本稿では以下の記法を用いる。

[記法] $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{0+}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ実数, 非負の実数, 正の実数, 自然数, 複素数の集合を表わし, s はラプラス演算子を表わすものとする。 $\mathbf{R}[x]$ は x を変数とする実数係数の多項式の集合とし, $\mathcal{L}$ は実時間領域で記述される関数にラプラス変換を施す演算子とする。また $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して $\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| < \infty$ を満たす $g(x) \in \mathbf{R}[x]$ を

* 京都大学大学院情報学研究科 京都市左京区吉田本町

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto

(Received October 15, 2014)

(Revised April 3, 2015)

Fig. 1 Block diagram of ADRC

$g(x) = O(f(x))$ と表現する.

2. ADRC の概要と従来の安定性解析の問題点

本章ではまず、文献 3) で提案された ADRC の概要について説明し、従来研究で述べられていた安定条件とその問題点について述べる.

制御対象のダイナミクスが $m \in \mathbb{N}$ を用いて微分方程式

$$y^{(m)}(t) = f(y^{(m-1)}, \dots, y, u^{(m-1)}, \dots, \dot{u}, u) \quad (1)$$

で表わされていたとする. ここで, $y(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれ, 時刻 $t \in \mathbb{R}_{0+}$ における制御対象の出力と制御入力である. ADRC ではまず制御対象を $l \in \mathbb{N}$ を用いて

$$y^{(l)}(t) = F(t) + cu(t) \quad (2)$$

とモデル化する. ただし, 本研究では簡単のために $l = 2$ とする. ここで, $c \in \mathbb{R}_+$ は設計者が決める定数である. $F(t) \in \mathbb{R}$ は (1) 式を (2) 式で近似したことにより生じる残差項で, 一般には $y(t)$ と $u(t)$ の高次微分の非線形関数である.

つぎに, (2) 式で表わされる微分方程式において $\dot{F}(t)$ を外乱とみなし, 状態変数 $x_i(t) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) を $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, $x_3(t) = F(t)$ とおき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{F}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

と状態方程式表現する. (3) 式で表現された状態方程式を基に拡大状態推定器 (Extended State Observer) を

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} (x_1 - z_1) \end{aligned} \quad (4)$$

と設計する³⁾. ここで $z_i(t) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) は, 拡大状態推

定器の状態とする. また $c_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, 2, 3$) は拡大状態推定器のゲインで, 設計者が指定するパラメータである. 拡大状態推定器のゲインに関しては $\omega \in \mathbb{R}_+$ を用いて $c_2 = 3\omega$, $c_1 = 3\omega^2$, $c_0 = \omega^3$ とし, 拡大状態推定器の極をすべて $-\omega$ に指定する方法が提案されている⁴⁾. このような拡大状態推定器を用いて制御入力を

$$u(t) = \frac{-z_3(t) + k_p(r(t) - z_1(t)) - k_d z_2(t)}{c} \quad (5)$$

と定めるのが ADRC の基本的な考え方である. ここで $r(t) \in \mathbb{R}$, $k_p \in \mathbb{R}_+$, $k_d \in \mathbb{R}_+$ はそれぞれ目標値, 比例ゲイン, 微分ゲインである. $z_i(t)$ が十分に $x_i(t)$ を推定できていれば, (2) 式, (5) 式より, $\ddot{y}(t) \simeq k_p(r(t) - y(t)) - k_d \dot{y}(t)$ となるため, 結果として得られる閉ループ系は 2 次の積分系を PD 制御しているとみなすことができる. 以上をまとめて ADRC の制御系をブロック線図で書くと Fig. 1 のようになる.

従来研究^{3), 4)}では ADRC を線形システムに対して適用した場合,

- $\dot{F}(t)$ が状態にかかわらず常に有界である.
- $k_p > 0$, $k_d > 0$, $\omega > 0$,

という条件を満たせば, Fig. 1 の制御系は安定になることが知られている. しかし, $y(t)$ と $u(t)$ の高次微分の関数である $\dot{F}(t)$ を有界にするようなパラメータの調整方法はわからない. したがって, この結論では安定性に関して十分な情報を得られたとはいえない. そこで次章では $\dot{F}(t)$ が有界であるという仮定を用いずに, 閉ループ系の特性多項式から ADRC の制御系が安定となる条件を求める.

3. 閉ループ系の安定性解析

本章では ADRC のパラメータの設計指針や適用できる制御対象の範囲を明確にするために, 閉ループ系の安定性解析を行なう.

3.1 特性多項式の導出

本節では一入力一出力の線形系を対象として ADRC を用いた際の制御系の特性多項式を導出する. 制御対象の伝達関数を $D(s) \in \mathbb{R}[s]$, $N(s) \in \mathbb{R}[s]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ を用いて

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6)$$

と表わす. さらに, (4) 式に (5) 式を代入し, (4) 式の両辺をラプラス変換すると

$$sZ_1(s) = Z_2(s) + c_2Y(s) - c_2Z_1(s) \quad (7)$$

$$sZ_2(s) = -(k_p + c_1)Z_1(s) - k_dZ_2(s) + k_pR(s) + c_1Y(s) \quad (8)$$

$$sZ_3(s) = c_0(Y(s) - Z_1(s)) \quad (9)$$

と表わせる. ただし, $Z_i(s) \in \mathbf{R}[s]$ は $Z_i(s) = \mathcal{L}[z_i(t)]$ ($i = 1, 2, 3$), $R(s)$ は, $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ である. (5)~(9) 式を用いると, 制御系の特性多項式 $\phi(s) \in \mathbf{R}[s]$ は

$$\begin{aligned} \phi(s) = & D(s)s\{s^2 + s(c_2 + k_d) + k_p + c_2k_d + c_1\} \\ & + \frac{N(s)}{c}\{s^2(k_pc_2 + k_dc_1 + c_0) \\ & + s(k_pc_1 + c_0k_d) + c_0k_p\} \end{aligned} \quad (10)$$

と求めることができる. したがって $\phi(s)$ がフルビッツ多項式になれば制御系は安定であると考えることができる.

3.2 特性多項式に基づいた安定性解析

本節では (11) 式で表現された制御対象に ADRC を適用した場合の安定条件の導出を行なう. $a_j \in \mathbb{R}$ ($j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$), $b_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$) に対して制御対象の伝達関数を

$$P(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^{m+1} + a_ms^m + \dots + a_1s + a_0} \quad (11)$$

と設定する. ただし, $m+1 \in \mathbb{N}$ は制御対象の次数である. また, 拡大状態推定器に関しては従来研究を参考にして, すべての極が $-\omega$ となるように c_2, c_1, c_0 を定める. すなわち $c_2 = 3\omega, c_1 = 3\omega^2, c_0 = \omega^3$ とあたえる.

このとき, 以下の結果が得られる.

《定理 1》 Fig. 1 のシステムで, 制御対象の相対次数が 2 以下の場合を考える. $\omega \in \mathbb{R}_+$ が十分に大きいとき, 以下の条件をすべて満たすことが, システムが安定であることの必要十分条件となる. すなわち, 以下の条件がすべて満たされているとき, 十分に大きい ω に対してシステムは安定であり, 満たされていない条件があるとき, 十分に大きい ω に対してシステムは不安定である.

条件 1 制御対象のすべての零点の実部が負

条件 2 制御対象の伝達関数の相対次数が 1, または相対次数が 2 かつ分子多項式の最高次係数について $c > \frac{b_{m-1}}{9}$

条件 3 $k_p > 0, k_d > 0$,

(証明) (6), (10), (11) 式より閉ループ系の特性多項式 $\phi(s) \in \mathbf{R}[s]$ は

$$\begin{aligned} \phi(s) = & s^{m+4} + (a_m + k_d + 3\omega)s^{m+3} \\ & + \left\{ k_p + 3k_d\omega + 3\omega^2 + a_m(3\omega + k_d) \right. \\ & \left. + a_{m-1} + \frac{b_m(3k_p\omega + 3k_d\omega^2 + \omega^3)}{c} \right\} s^{m+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left\{ a_m(k_p + 3k_d\omega + 3\omega^2) + a_{m-1}(3\omega + k_d) \right. \\ & \quad \left. + a_{m-2} + \frac{b_m(3k_p\omega^2 + k_d\omega^3)}{c} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b_{m-1}(3k_p\omega + 3k_d\omega^2 + \omega^3)}{c} \right\} s^{m+1} \\ & + \left\{ a_{m-1}(k_p + 3k_d\omega + 3\omega^2) + a_{m-2}(3\omega + k_d) \right. \\ & \quad \left. + a_{m-3} + \frac{b_mk_p\omega^3}{c} + \frac{b_{m-1}(3k_p\omega^2 + k_d\omega^3)}{c} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b_{m-2}(3k_p\omega + 3k_d\omega^2 + \omega^3)}{c} \right\} s^m \\ & + \dots \\ & + \left\{ a_1(k_p + 3k_d\omega + 3\omega^2) + a_0(3\omega + k_d) + \frac{b_2k_p\omega^3}{c} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b_1(3k_p\omega^2 + k_d\omega^3)}{c} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b_0(3k_p\omega + 3k_d\omega^2 + \omega^3)}{c} \right\} s^2 \\ & + \left\{ a_0(k_p + 3k_d\omega + 3\omega^2) + \frac{b_1k_p\omega^3}{c} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b_0(3k_p\omega^2 + k_d\omega^3)}{c} \right\} s \\ & + \frac{b_0k_p\omega^3}{c} \end{aligned} \quad (12)$$

と表わせる.

(制御対象の相対次数が 1 次の場合)

制御対象の相対次数が 1 次の場合, 閉ループ系の特性多項式は (12) 式より,

$$\begin{aligned} \phi(s) = & s^{m+4} + (3\omega + O(1))s^{m+3} \\ & + \left(\frac{b_m\omega^3}{c} + O(\omega^2) \right) s^{m+2} \\ & + \left(\frac{b_mk_d + b_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)}{c} \right) s^{m+1} \\ & + \left(\frac{b_mk_p + b_{m-1}k_d + b_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)}{c} \right) s^m \\ & + \left(\frac{b_{m-1}k_p + b_{m-2}k_d + b_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)}{c} \right) s^{m-1} \\ & + \dots + \left(\frac{b_2k_p + b_1k_d + b_0\omega^3 + O(\omega^2)}{c} \right) s^2 \\ & + \left(\frac{b_1k_p + b_0k_d}{c} \omega^3 + O(\omega^2) \right) s + \frac{b_0k_p}{c} \omega^3 \end{aligned} \quad (13)$$

と表わすことができる. ここで, $f_j \in \mathbb{R}$ ($j \in \{0, 1, \dots, m+2\}$) を **Table 1** のように定義すると, (13) 式は

$$\begin{aligned} \phi(s) = & s^{m+4} + (3\omega + O(1))s^{m+3} \\ & + (f_{m+2}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m+2} \\ & + \dots + (f_1\omega^3 + O(\omega^2))s + f_0\omega^3 \end{aligned} \quad (14)$$

と表わせる. (14) 式より, m の偶奇で場合わけしてラウス表

Table 2 Routh table of polynomial (14) for odd m

s^{m+4}	1	$f_{m+2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_3\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_1\omega^3 + O(\omega^2)$
s^{m+3}	$3\omega + O(1)$	$f_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_2\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_0\omega^3$
s^{m+2}	$f_{m+2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-4}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_1\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^{m+1}	$f_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-5}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_0\omega^3 + O(\omega^2)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Table 3 Routh table of polynomial (14) for even m

s^{m+4}	1	$f_{m+2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_2\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_0\omega^3$
s^{m+3}	$3\omega + O(1)$	$f_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_1\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^{m+2}	$f_{m+2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-4}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f_0\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^{m+1}	$f_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f_{m-5}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Table 1 Definition of f_j and f'_j

j	f_j	f'_j
$m+2$	$\frac{b_m}{c}$	
$m+1$	$\frac{b_mk_d+b_{m-1}}{c}$	$\frac{b_{m-1}}{c}$
m	$\frac{b_mk_p+b_{m-1}k_d+b_{m-2}}{c}$	$\frac{b_{m-1}k_d+b_{m-2}}{c}$
$m-1$	$\frac{b_{m-1}k_p+b_{m-2}k_d+b_{m-3}}{c}$	$\frac{b_{m-1}k_p+b_{m-2}k_d+b_{m-3}}{c}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\frac{b_2k_p+b_1k_d+b_0}{c}$	$\frac{b_2k_p+b_1k_d+b_0}{c}$
1	$\frac{b_1k_p+b_0k_d}{c}$	$\frac{b_1k_p+b_0k_d}{c}$
0	$\frac{b_0k_p}{c}$	$\frac{b_0k_p}{c}$

を作成すると **Table 2**, **Table 3** のようになる. m が奇数の場合, Table 2 中の s^{m+2} , s^{m+1} の行に注目すると s^{m+2} , s^{m+1} , ..., s^0 の行の左端の値がすべて正となる, すなわち制御系が安定となることは, 補助特性多項式

$$\begin{aligned} \phi_1(s) = & (f_{m+2}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m+2} \\ & + (f_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m+1} \\ & + (f_m\omega^3 + O(\omega^2))s^m \\ & + (f_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m-1} \\ & + (f_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m-2} + \dots \\ & + (f_2\omega^3 + O(\omega^2))s^2 + (f_1\omega^3 + O(\omega^2))s^1 \\ & + f_0\omega^3 + O(\omega^2) \end{aligned} \quad (15)$$

に対して補助特性方程式 $\phi_1(s) = 0$ の解の実部が負となることと同値であることがわかる. また, m が偶数の場合も Table 3 の s^{m+2} , s^{m+1} の行より (15) 式と同様の補助特性多項式が導出される. したがって m の偶奇にかかわらず, $\phi_1(s) = 0$ の解の実部が負となることと, Table 2, Table 3 の s^{m+2} ,

s^{m+1} , ..., s^0 の行の左端の値がすべて正となることは同値である. Table 1 より補助特性方程式は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b_m\omega^3}{c} + O(\omega^2) \right) s^{m+2} \\ & + \left(\frac{b_mk_d+b_{m-1}}{c}\omega^3 + O(\omega^2) \right) s^{m+1} \\ & + \left(\frac{b_mk_p+b_{m-1}k_d+b_{m-2}}{c}\omega^3 + O(\omega^2) \right) s^m \\ & + \left(\frac{b_{m-1}k_p+b_{m-2}k_d+b_{m-3}}{c}\omega^3 + O(\omega^2) \right) s^{m-1} \\ & + \dots + \left(\frac{b_2k_p+b_1k_d+b_0}{c}\omega^3 + O(\omega^2) \right) s^2 \\ & + \left(\frac{b_1k_p+b_0k_d}{c}\omega^3 + O(\omega^2) \right) s + \frac{b_0k_p}{c}\omega^3 + O(\omega^2) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

と表わすことができる. ω が十分大きいとき, 補助特性方程式 (16) の根は

$$\begin{aligned} & \frac{b_m}{c}s^{m+2} + \left(\frac{b_mk_d+b_{m-1}}{c} \right) s^{m+1} \\ & + \left(\frac{b_mk_p+b_{m-1}k_d+b_{m-2}}{c} \right) s^m \\ & + \left(\frac{b_{m-1}k_p+b_{m-2}k_d+b_{m-3}}{c} \right) s^{m-1} + \dots \\ & + \left(\frac{b_2k_p+b_1k_d+b_0}{c} \right) s^2 \\ & + \left(\frac{b_1k_p+b_0k_d}{c} \right) s + \frac{b_0k_p}{c} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

の根に収束していく. さらに (17) 式左辺は

$$\frac{(s^2 + k_ds + k_p)(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)}{c} \quad (18)$$

と因数分解できる. したがって (17) 式の根の実部は

Table 4 Routh table of polynomial (20) for odd m

s^{m+4}	1	$3\omega^2 + O(\omega)$	$f'_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_3\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_1\omega^3 + O(\omega^2)$
s^{m+3}	$3\omega + O(1)$	$f'_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_2\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_0\omega^3$
s^{m+2}	$\frac{9-f'_{m+1}}{3}\omega^2 + O(\omega)$	$f'_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-4}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_1\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^{m+1}	$f'_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-5}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_0\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^m	$f'_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-4}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-6}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Table 5 Routh table of polynomial (20) for even m

s^{m+4}	1	$3\omega^2 + O(\omega)$	$f'_m\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_4\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_2\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_0\omega^3 + O(\omega^2)$
s^{m+3}	$3\omega + O(1)$	$f'_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_3\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_1\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^{m+2}	$\frac{9-f'_{m+1}}{3}\omega^2 + O(\omega)$	$f'_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_2\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_0\omega^3 + O(\omega^2)$	0
s^{m+1}	$f'_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_1\omega^3 + O(\omega^2)$	0	0
s^m	$f'_m\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2)$	$f'_{m-4}\omega^3 + O(\omega^2)$	...	$f'_0\omega^3 + O(\omega^2)$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

• $k_p > 0$, $k_d > 0$,

• $P(s)$ のすべての零点の実部が負

のときすべて負であり, ω が十分大きいとき, この条件が Fig. 1

で表わされる制御系が安定であるための条件に一致する.

(制御対象の相対次数が 2 次の場合)

制御対象の相対次数が 2 次の場合, 閉ループ系の特性多項式は (12) 式より,

$$\begin{aligned}
 \phi(s) = & s^{m+4} + (3\omega + O(1))s^{m+3} \\
 & + (3\omega^2 + O(\omega))s^{m+2} \\
 & + \left(\frac{b_{m-1}}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s^{m+1} \\
 & + \left(\frac{b_{m-1}k_d + b_{m-2}}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s^m \\
 & + \left(\frac{b_{m-1}k_p + b_{m-2}k_d + b_{m-3}}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s^{m-1} \\
 & + \dots \\
 & + \left(\frac{b_2k_p + b_1k_d + b_0}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s^2 \\
 & + \left(\frac{b_1k_p + b_0k_d}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s + \frac{b_0k_p\omega^3}{c} \quad (19)
 \end{aligned}$$

と表わすことができる. ここで, $f'_j \in \mathbb{R}$ ($j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$) を Table 1 のように定義すると, (19) 式は

$$\begin{aligned}
 \phi(s) = & s^{m+4} + (3\omega + O(1))s^{m+3} \\
 & + (3\omega^2 + O(\omega))s^{m+2} \\
 & + (f'_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m+1} \\
 & + (f'_m\omega^3 + O(\omega^2))s^m \\
 & + (f'_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m-1} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (f'_2\omega^3 + O(\omega^2))s^2 \\
 & + (f'_1\omega^3 + O(\omega^2))s + f'_0\omega^3 \quad (20)
 \end{aligned}$$

となる. (20) 式より, m の偶奇で場合わけしてラウス表を作成すると **Table 4**, **Table 5** のようになる. m が奇数の場合, Table 4 中の s^{m+1} , s^m の行に注目すると s^{m+1} , s^m , $\dots$, s^0 の行の左端の値がすべて正となることは, 補助特性多項式

$$\begin{aligned}
 \phi_2(s) = & (f'_{m+1}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m+1} \\
 & + (f'_m\omega^3 + O(\omega^2))s^m \\
 & + (f'_{m-1}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m-1} \\
 & + (f'_{m-2}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m-2} \\
 & + (f'_{m-3}\omega^3 + O(\omega^2))s^{m-3} + \dots \\
 & + (f'_2\omega^3 + O(\omega^2))s^2 \\
 & + (f'_1\omega^3 + O(\omega^2))s + f'_0\omega^3 + O(\omega^2) \quad (21)
 \end{aligned}$$

に対して補助特性方程式 $\phi_2(s) = 0$ の解の実部が負となることと同値であることがわかる. また, m が偶数の場合も Table 5 の s^{m+1} , s^m の行より (21) 式と同様の補助特性多項式が導出される. したがって m の偶奇にかかわらず, $\phi_2(s) = 0$ の解の実部が負となることと, Table 4, Table 5 の s^{m+1} , s^m , $\dots$, s^0 の行の左端の値がすべて正となることは同値である. Table 1 より補助特性方程式は

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{b_{m-1}}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s^{m+1} \\
 & + \left(\frac{b_{m-1}k_d + b_{m-2}}{c}\omega^3 + O(\omega^2)\right)s^m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{b_{m-1}k_p + b_{m-2}k_d + b_{m-3}}{c} \omega^3 + O(\omega^2) \right) s^{m-1} \\
& + \cdots + \left(\frac{b_2k_p + b_1k_d + b_0}{c} \omega^3 + O(\omega^2) \right) s^2 \\
& + \left(\frac{b_1k_p + b_0k_d}{c} \omega^3 + O(\omega^2) \right) s + \frac{b_0k_p}{c} \omega^3 + O(\omega^2) \\
& = 0
\end{aligned} \quad (22)$$

と表わすことができる． ω が十分大きいとき，方程式 (22) の根は

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{b_{m-1}}{c} \right) s^{m+1} + \left(\frac{b_{m-1}k_d + b_{m-2}}{c} \right) s^m \\
& + \left(\frac{b_{m-1}k_p + b_{m-2}k_d + b_{m-3}}{c} \right) s^{m-1} \\
& + \cdots + \left(\frac{b_2k_p + b_1k_d + b_0}{c} \right) s^2 \\
& + \left(\frac{b_1k_p + b_0k_d}{c} \right) s + \frac{b_0k_p}{c} = 0
\end{aligned} \quad (23)$$

の根に収束していく．さらに (23) 式の左辺は

$$\frac{(s^2 + k_d s + k_p)(b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}{c} \quad (24)$$

と因数分解できる．したがって (23) 式の根の実部は

- $k_p > 0, k_d > 0$,

- $P(s)$ のすべての零点の実部が負

のときすべて負となる．さらに $9 - \frac{b_{m-1}}{c} > 0$ を満たせば Table 4, Table 5 のすべての左端の値は十分大きい ω に対して正となる．したがって $k_p > 0, k_d > 0, c > \frac{b_{m-1}}{9}$ かつ $P(s)$ のすべての零点の実部が負であれば，十分大きい ω に対して Fig. 1 で表わされる制御系は安定となる．また何れかの条件が満たされていなければ十分に大きい ω に対して制御系は不安定となる．□

この結果から，制御対象の相対次数，分子多項式の安定性，分子多項式の最高次の係数が定理 1 の条件を満たす場合， ω を十分大きく選ぶことで Fig. 1 で示される制御系を安定化できることがわかる．したがって制御系を安定化する ADRC を設計する上で制御対象の詳細な情報，たとえば (11) 式における a_i ($i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$) の値は不要であるといえる．

4. 数値例による設計方針の確認

本章では，あるシステムを例に数値シミュレーションを行ない，定理 1 に基づいた制御系設計について確認する．まず 4.1 節では， ω, c と制御系の安定性の関係をグラフで示し，定理 1 の有用性を確認する．4.2 節では ω, c を変えることで制御入力がどのように変化するかを確かめ，制御系設計を行なう上での知見を得る．

4.1 ω, c と制御系の安定性の関係

本節では， ω に対して制御系の安定性が保証される c の範囲を数値シミュレーションで明らかにする．まず，制御対象のダイナミクス Σ を

Fig. 2 Stability region above ω - c plane

$$\Sigma : P(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s-1)(s-7)(s-3)(s-6)} \quad (25)$$

とし， $k_p = 8, k_d = 4$ とあたえる．そして制御系が安定，不安定となる領域を ω - c 平面上に描くと Fig. 2 のようになる．Fig. 2 の横軸が ω ，縦軸が c に対応しており，不安定な (ω, c) の組を×印で，安定な (ω, c) の組を点で表わしている．Fig. 2 より， c は $\frac{1}{9}$ を下回ると ω をいくら大きくしても，Fig. 1 の制御系は安定化できないことがわかる．また， ω を大きくするに当たって，制御系を安定化できる c の範囲が広がっており，定理 1 で示されているように $c > \frac{1}{9}$ の範囲に近づいていることがわかる．

4.2 ω, c の設計方針

実機では一般に制御入力大きさに制限があり，実現可能な大きさの制御入力で安定性を確保することが要求される．定理 1 によると， c と ω の選択にはある程度の自由度があり，設計においては制御入力大きさを考慮してこれらの値を定める方針が考えられる．

まず， ω は外乱オブザーバが収束する速さに対応するパラメータであるので， ω を小さくすれば制御入力は小さくなると考えられる．つぎに c については，Fig. 1 のように外乱オブザーバによる推定値に基づく信号に $1/c$ をかけたものが制御入力となるので， c を大きくすると制御入力は小さくなると考えられる．したがって実際の設計においては， c を大きく， ω を小さくすることで制御入力大きさを低減することができると考えられる．

本節では， c と ω を変化させ，制御入力がどのように変化するかを数値シミュレーションで確認する．制御対象には Σ を使い， $k_p = 8, k_d = 4$ とする．また，観測ノイズとして平均 0，分散 10^{-4} の正規白色ノイズを加える．これに対して $\omega = 600$ と設定し， c の値を変えたときの制御入力の変化を Fig. 3 に示す．Fig. 3 から， c を大きくすると制御入力が小

Fig. 3 Control input ($c = 0.13$, $c = 5$, $c = 10$)

Fig. 4 Control input ($\omega = 600$, $\omega = 100$, $\omega = 60$)

さくることがわかる。これらの結果から、 c を大きくすることで制御入力を低減できることが確認できた。つぎに、 $c = 1$ と設定し、 ω の値を変えたときの制御入力の変化をFig. 4に示す。Fig. 4より ω を小さく設定すると制御入力がより小さくなっていることが確認できる。以上のことから、 ω を小さく、 c を大きくすれば制御入力は低減されることが数値例においても確認できた。ただし、定理1が成立するのは ω が c を含むほかのパラメータと比べて十分に大きい場合であるので、 ω を小さく、 c を大きくすることによって安定性が損なわれる可能性が高くなる。したがって、実システムへの適用においては、制御入力の大きさとロバスト安定性のトレードオフを考慮して設計を行なう必要がある。

5. 実機実験

本章では、3章および4章で得られた知見をもとにADRCが設計できることを確認するために、Fig. 5, Fig. 6に示すような磁気浮上系への適用を試みる。このシステムの入力は磁力を発生するコイルに印加する電流 $i \in \mathbb{R}$ 、観測出力はレーザ変位センサで計測される球の位置 $x \in \mathbb{R}$ であり、制御目標は $x_e \in \mathbb{R}$ の位置に球を安定化することである。なお、本実験

Fig. 5 Schematic diagram of magnetic levitation system

ではセンサとしてパナソニック社のレーザ変位センサ HL-G1を用い、制御器の実装はMATLABとXPC Targetを用いて行なった。制御周期は1msとした。

まず、ADRCの設計方針を確認するために、対象システムの線形化モデルを考える。球の位置が $x_e \in \mathbb{R}$ であるときの平衡電流を $i_e \in \mathbb{R}_+$ 、平衡電流からの変位を $\Delta i \in \mathbb{R}$ とおき、球の位置の x_e からの変位を Δx とおくと、 Δi から Δx まで

Fig. 6 Actual magnetic levitation system

Fig. 7 Trajectory of Δx in actual magnetic levitation system

の伝達関数は

$$P(s) = \frac{-i_e \frac{Q}{x_l^2}}{\left(s^2 - i_e^2 \frac{Q}{M x_l^3}\right)} \quad (26)$$

となる．ここで， $M \in \mathbb{R}_+$ は球の質量， $Q \in \mathbb{R}_+$ ， $x_l \in \mathbb{R}_+$ はコイルおよび球によって決まる物理定数であり，分子の $-i_e \frac{Q}{x_l^2}$ の値は -20 程度になることがわかっている．3 章での議論において分子の符号は正でなければならないので，符号を反転した制御入力を加えるものとして $\tilde{P}(s) = -P(s)$ を制御対象とみなすと，3 章の結果から c の値はおおむね $\frac{20}{9}$ よりも大きくなければならないことがわかる．そして，3 章，4 章の安定性解析と数値シミュレーションの結果に基づいて調整を行った結果，パラメータ $k_p = 8$ ， $k_d = 20$ ， $c = 5$ ， $\omega = 50$ を得た．

得られたパラメータに基づいた制御実験における Δx は Fig. 7 のようになった．Fig. 7 より，3 章，4 章の解析結果に基づき ADRC のパラメータを適切に調整することで，磁気浮上系を安定化できたことが確認できる．

6. おわりに

本稿では ADRC を線形システムに適用した場合の制御系の安定条件を導出した．その結果，あるクラスの制御対象についてはオブザーバの極を大きくとることで制御対象の詳細な情報を利用することなく安定化が可能であることがわかった．また，数値シミュレーションの結果から，制御系の安定性を確保しつつ制御入力を小さくするパラメータの選択方法を明らかにした．さらに，これらの解析結果に基づいて磁気浮上系に対して ADRC を設計し，実機で実現可能な大きさの制御入力で安定化を達成する ADRC が得られることを示した．

謝辞 本研究の一部は，科学研究費補助金 #25249058（基盤 A），#25820179（若手 B）の助成を受けた．記して，謝意を表したい．

参考文献

- 1) K.J. Åström and T. Hagglund: The future of PID control, *Control Engineering Practice*, **9**-11, 1163/1175 (2001)
- 2) J. Han: Auto-disturbance rejection controller and its applications, *Control Decision*, **13**-1, 19/23 (1998, in Chinese)
- 3) Z. Gao, Y. Huang and J. Han: An alternative paradigm for control system design, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, **5**, 4578/4585 (2001)
- 4) Z. Gao: Scaling and bandwidth-parametrization based controller tuning, *Proceedings of the American Control Conference 2003*, **6**, 4989/4996 (2003)
- 5) Z. Gao and S. Hu: On properties and application of a new form of discrete time optimal control law, *Conference Record of the 2004 Industry Applications Conference/39th IEEE IAS Annual Meeting*, **3**, 1511/1518 (2004)
- 6) Z. Gao: Active disturbance rejection control: A paradigm shift in feedback control system design, *Proceedings of the American Control Conference*, 2399/2405 (2006)
- 7) G. Tian and Z. Gao: Frequency response analysis of active disturbance rejection based control system, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, 1595/1599 (2007)
- 8) X. Yang and Y. Huang: Capabilities of extended state observer for estimating uncertainties, *Proceedings of the American Control Conference*, 3700/3705 (2009)
- 9) R. Miklosovich and Z. Gao: A robust two-degree-of-freedom control design technique and its practical application, *Conference Record of the 2004 IEEE Industry Applications Conference/39th IAS Annual Meeting*, **3**, 1495/1502 (2004)
- 10) Y. Xia, Z. Zhu, M. Fu and S. Wang: Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **58**-2, 647/659 (2011)
- 11) Q. Zheng, L. Dong, D.H. Lee and Z. Gao: Active disturbance rejection control for MEMS gyroscopes, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **17**-6, 1432/1438 (2009)
- 12) L. Dong, Q. Zhenq and Z. Gao: On control system design for the conventional mode of operation of vibration gyroscopes, *IEEE Sensors Journal*, **8**-11, 1871/1878 (2008)
- 13) L. Liu, Z. Xu and Q. Mei: Induction motor drive system based on the flux observer LESO and LADRC, *Proceedings of Global Congress on Intelligent Systems*, **2**, 248/252 (2009)

- 14) S.E. Talole, J.P. Kolhe and S.B. Phadke: Extended-state-observer-based control of flexible-joint system with experimental validation, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **57**-4, 1411/1419 (2010)
- 15) D. Wu and K. Chen: Design and analysis of precision active disturbance rejection control for noncircular turning process, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **56**-7, 2746/2753 (2012)
- 16) R. Li, T. Li, Q. Zheng and Q. Li: Ship tracking control based on linear active disturbance rejection control, *Proceedings of 3rd International Conference on Intelligent Control and Information Processing*, 201/205 (2012)

杉 山 開 路

丸 田 一 郎 (正会員)

杉 江 俊 治 (正会員・フェロー)

1978 年京都大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了。84 年同博士課程研究指導認定退学。78~80 年日本電信電話公社勤務。84 年大阪府立大学工学部助手、88 年京都大学工学部助教授、97 年同教授を経て、現在京都大学大学院情報学研究科教授。ロボスタ制御理論とその応用に関する研究などに従事。工学博士。システム制御情報学会、日本ロボット学会の会員、IEEE のフェロー。