システムの直列分解に基づく動的量子化器設計

南 裕 樹*・加 嶋 健 司**

Dynamic Quantizer Design Based on Serial System Decomposition

Yuki MINAMI* and Kenji KASHIMA**

In this paper, a novel quantizer design method for discrete-valued input control is proposed. The key technique of the proposed method is a serial decomposition of systems whose input is discrete-valued. More specifically, we perform an inner-outer like factorization, and a dynamic quantizer is analytically derived for the outer part. The proposed method enables us to design stable dynamic quantizers for non-minimum phase systems and fixed-order dynamic quantizers.

Key Words: dynamic quantizer, serial decomposition, non-minimum phase system, fixed-order design

1. はじめに

現実の世界では、ON/OFFで駆動される離散値アクチュエータや通信容量制約のあるネットワーク通信路がシステムに組み込まれる場合など、動的システムを離散値信号で制御しなければならない状況にしばしば直面する。そのため、近年、離散値信号を含むシステムの制御に関する研究が盛んに行なわれている¹⁾。その中でも、連続値信号を離散値信号に変換する動的な量子化器を適切に設計して制御ループに組み込むというアプローチが注目されており、これまでにさまざまな量子化器の設計手法が提案されている^{2)~11)}。

先行研究^{2)~11)}の動的量子化器設計では、「量子化器を含むシステムの入出力特性を量子化器を含まない理想的なシステムの入出力特性にできるだけ近くなる」ことを目標としている。たとえば、文献2)~4)では、代数的なアプローチとして、量子化器を含むシステムと理想的なシステムの出力差を ℓ_∞ ノルムではかり、その値を最小化する量子化器を解析的に導出している。しかしながら、最適設計問題の解析解が得られる対象は限定されており、量子化器の安定性^{5),6)}の観点から非最小位相な制御対象を扱うことができない、固定次数の量子化器を設計できない、といった問題点があった。

一方、上記の問題点を解決するために、文献7)~11)などでは、線形計画法、LMI、進化型計算といった計算機を援用

した設計手法が提案されている。しかしながら、そのような数値最適化においては、緩和問題を考えること^{7)~10)}や解を発見的に探索すること¹¹⁾が必要となるため、量子化器の最適性が保証されないケースがある。また、最適な量子化器が得られたとしても、数値結果から最適な構造や性能限界を明らかにすることは難しい。これに対して、もし、文献2)~4)のような代数的なアプローチで、最適な動的量子化器が得られれば、最適解の構造を理解することができ、設計の見通しが良くなるといえる。さらに、これまでの動的量子化器の最適設計論の不完全な部分を解決することは、設計論の理論的枠組みを完成させるための足掛かりとなる。

そこで本論文では、新たな量子化器設計手法を提案する。提案する方法は、与えられた制御対象を2つの部分システムに直列分解し、片方の部分システムの情報をもとに動的量子化器を構築するというものである。これにより、非最小位相な制御対象に対しては、最小位相な部分と非最小位相な部分に分解することで、安定な動的量子化器が設計可能となる。また、システムの直列分解において、部分システムの次数を指定することにより固定次数の量子化器設計も可能になる。

本論文では、まず、量子化器の性能解析を行なう。つぎに、その結果を踏まえて、システムの直列分解に基づく量子化器の設計手法を与える。さらに、制御対象を不安定零点が1個のものに限定すれば、提案手法により最適な量子化器が設計できることを示す。これにより、非最小位相系（不安定零点が1個の場合）に対する量子化器の性能限界と最適構造が明らかになる。最後に、固定次数量子化器設計への応用を議論する。

[表記] $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{N}$ は、それぞれ、実数の集合、正の実数の集合、自然数の集合を表わす。そして、離散時間の線形時不変システム $P : (A, B, C, D)$ のインパルス応答を

* 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科
生駒市高山町 8916-5

** 京都大学大学院情報科学研究科 京都市左京区吉田本町

* Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, 8916-5 Takayama-cho, Ikoma

** Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto

(Received October 7, 2015)

(Revised November 20, 2015)

Fig. 1 Two feedforward systems

$$p(t) = \begin{cases} D & (t = 0) \\ CA^{t-1}B & (t \geq 1) \end{cases}$$

と表わし, その状態空間表現と伝達関数表現をそれぞれ,

$$P: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$P(z) = \sum_{t=0}^{\infty} p(t)z^{-t} = D + C(zI - A)^{-1}B$$

と表記する (なお本論文では, 紙面の煩雑さを防ぐために, $P(z)$ を P と書くことがある). ベクトル $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ の ∞ ノルムを $\|x\|_{\infty} := \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i|$ と定義する. さらに, 離散時間信号 e の ∞ ノルムを $\|e\|_{\infty} := \sup_{t \in \mathbb{N}} \|e(t)\|_{\infty}$ とし, 安定なシステム P の ℓ_{∞} ゲインを

$$\|P\|_{i\infty} := \sup_{r \in \ell_{\infty}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Pr\|_{\infty}}{\|r\|_{\infty}} \quad (1)$$

と定義する. なおこの値は, インパルス応答を用いて

$$\|P\|_{i\infty} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^{\infty} |p_{ij}(t)| \quad (2)$$

と表現されることが知られている¹²⁾. ただし, $p_{ij}(t)$ は $p(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ の (i, j) 要素である.

2. 問題設定

制御対象 P と量子化器 Q で構成される Fig. 1 の離散値入力型システム Σ を考える. ここで, P は, SISO の離散時間線形システムである.

$$P: \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ C_P & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし, $A_P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_P \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C_P \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ は定数行列である. 行列 A_P の固有値は, 複素平面上の単位円内に存在すると仮定する.

一方, Q は, 次式で与えられる動的量子化器^{2)~11)}である.

$$Q: \begin{cases} \xi(t+1) = A\xi(t) + B(v(t) - r(t)) \\ v(t) = q[\mathcal{C}\xi(t) + r(t)] \end{cases} \quad (4)$$

ここで, $t \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ は離散時刻を表わし, $\xi \in \mathbb{R}^N$ は Q の状態 (初期状態は $\xi(0) = 0$), $r \in \mathbb{R}$ は入力, $v \in \{0, \pm d, \pm 2d, \dots\}$ は出力であり, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ は定数行列である. また, 関数 $q: \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm d, \pm 2d, \dots\}$ は静的な

Fig. 2 Error system with H

一様量子化器であり, $d \in \mathbb{R}_+$ は量子化間隔である.

本論文では, Fig. 1 のシステム Σ と制御対象 P の入力 r から出力 z までの特性を最良近似する量子化器 Q の設計を考える. そのために, Fig. 1 の誤差系の出力を e と表わし (時刻 t での値は $e(t)$), 評価関数をつぎのように定義する.

$$E(Q) := \sup_{r \in \ell_{\infty}} \|e\|_{\infty} \quad (5)$$

このとき, 量子化器 Q の設計問題はつぎのように定式化される.

[問題 1] システム Σ において, 制御対象 P , 量子化間隔 $d \in \mathbb{R}_+$ が任意に与えられるとする. このとき,

(C1) ある $M > 0$ が存在して, $\|\xi\|_{\infty} < M, \forall r \in \ell_{\infty}$

を満たし, 評価関数 $E(Q)$ の値を小さくする $Q(A, B, \mathcal{C})$ を求めよ. ■

条件 (C1) は, 量子化器の BIBO 安定性を保証するためのものである. $E(Q)$ の値を小さくする量子化器 Q を設計することにより, 離散値入力型システム Σ の入出力関係を r が入力される理想的な制御対象 P のそれに近くすることができる.

先行研究 2)~4) では, (C1) の条件を考慮しない問題を考え, $E(Q)$ を最小化する量子化器を解析的に導出している. そのため, 不安定な量子化器が得られる場合があった. 実際, 制御対象 P が非最小位相系の場合 (不安定零点をもつ場合) には, 量子化器が不安定になる^{5), 6)}. そこで本論文では, この問題を解決するために, 問題 1 の解を与える代数的な設計手法を提案する.

3. 直列分解に基づく動的量子化器の設計

3.1 量子化器の性能解析

問題 1 の解を与える前に, 量子化器 Q の性能を解析しておく. 具体的には, $E(Q)$ の値を制御対象 P と量子化器 Q のパラメータを用いて表わす.

まず, 量子化器 Q で生じる量子化誤差を

$$w(t) := q[\mathcal{C}\xi(t) + r(t)] - (\mathcal{C}\xi(t) + r(t)) \quad (6)$$

と表わす ($\|w\|_{\infty} \leq d/2$). このとき, $v - r = w + \mathcal{C}\xi$ に注意すると Q の出力は $v = Hw + r$ と書ける (Fig. 1 は Fig. 2 となる). ただし,

$$H: \left[\begin{array}{c|c} A + BC & B \\ \hline C & 1 \end{array} \right] \quad (7)$$

である.

Fig. 2においてすべてのブロックは線形システムであり, 信号 e における入力 r に関する項 Pr がキャンセルするため,

$$e = PHw \quad (8)$$

となる. これよりつぎの結果を得る.

《定理 1》 システム Σ に対し, 量子化幅 $d \in \mathbb{R}_+$ が任意に与えられるものとする. このとき, 与えられた Q に対して, PH が安定ならば

$$E(Q) = \|PH\|_{i\infty} \frac{d}{2} \quad (9)$$

が成り立ち, (C1) が成り立つための必要十分条件は H が安定であることである.

(証明) 前半の証明を付録 A に示す. 後半の証明は文献 6) の補題 2 の証明と同じである. $\square$

定理 1 より, 離散値入力型システム Σ と r が入力される理想的な制御対象 P の出力差が, システム PH の ℓ_∞ ゲインで与えられる. これより, 問題 1 の解が, 安定かつ (7) 式の形の H により PH の ℓ_∞ ゲインを最小化するものであることがわかる. ここで H の直達項が 1 であることに注意すると, $\|PH\|_{i\infty} \geq |C_F B_F|$ であることが容易に確かめられる. また P の直達遅れの長さを i とすると, $H = z^{-i} C_F B_F P^{-1}$ と選ぶことで, 明らかにこの値が実現でき, これが文献 3), 13), 14) の結果にはかならない. しかしながら, 制御対象 P が非最小位相系の場合, P^{-1} が不安定極をもち, 量子化器が不安定になるという問題があった^{5), 6)}. そこで本論文では, この問題を解決するために, 制御対象 P の完全なモデル情報を利用するのではなく, P の部分情報を利用して量子化器 Q を設計することを考える.

3.2 提案手法

本論文では, 与えられた制御対象 P を 2 つの部分システム F と G に直列分解し,

$$P = GF \quad (10)$$

$$F: \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & 0 \end{array} \right], \quad G: \left[\begin{array}{c|c} A_G & B_G \\ \hline C_G & D_G \end{array} \right] \quad (11)$$

と表わす. ただし, $A_F \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$, $B_F \in \mathbb{R}^{n_F \times 1}$, $C_F \in \mathbb{R}^{1 \times n_F}$, $A_G \in \mathbb{R}^{n_G \times n_G}$, $B_G \in \mathbb{R}^{n_G \times 1}$, $C_G \in \mathbb{R}^{1 \times n_G}$, $D_G \in \mathbb{R}$ である. 直列分解には自由度があるが, 部分システム F に関しては, 以下の条件が満たされているとする. まず, 行列 A_F および行列 $A_F - B_F(C_F B_F)^{-1} C_F A_F$ の固有値が複素平面上の単位円内に存在する. 前者は F が安定であるための条件, 後者は F が最小位相であるための条件である. なお後者の行列の固有値は 0 と F の零点からなることが, $zF(z)$ の状態空間表現から確かめられる. つぎに, 一般性を失わずに $C_F B_F \neq 0$ であるとすると, もし P に直達遅

Fig. 3 Error system with sub-systems F and G

れがある場合には, それが G に含まれるように分解すれば $C_F B_F \neq 0$ とできる.

このように制御対象 P を 2 つの部分システムの積で表現することで, Fig. 2 を Fig. 3 に書き換えることができる. 本論文では, Fig. 3 に基づいて問題 1 を考える.

- (i) 部分システム F の情報を利用して, F の出力差 $\sup_{r \in \ell_\infty} \|\eta\|_\infty$ を最小化する量子化器 Q^* を与える.
- (ii) 評価関数 $E(Q^*)$ の値を部分システム F , G と量子化器 Q^* のパラメータで特徴づける.

実際, (i) では, 先行研究 3) の手法で量子化器を与えるため, $G = 1$ の場合には, 先行研究と同じ結果が得られる. 一方, F に対して量子化器が設計されるため, F が最小位相系となるように P を直列分解していれば, (C1) の条件が満たされる. また, (ii) より, 量子化器設計において P の情報ではなく部分システム F の情報のみを用いることによる性能劣化をあらかじめ見積もることができる. さらに, システムをどのように直列分解すれば, 性能劣化が小さくなる傾向にあるかについての考察が可能となる.

以下では, 提案手法の (i), (ii) の詳細を説明する.

- (i) 量子化器設計 F の情報のみを用いて,

$$FH = \frac{C_F B_F}{z} \quad (12)$$

となる量子化器の 1 つをつぎのように選ぶ.

$$Q^*: \begin{cases} \xi(t+1) = A_F \xi(t) + B_F(v(t) - r(t)) \\ v(t) = q[-(C_F B_F)^{-1} C_F A_F \xi(t) + r(t)] \end{cases} \quad (13)$$

これは, $H = z^{-1} C_F B_F F^{-1}$ となるものであり, F が最小位相系であれば, この量子化器は安定である. このとき, $\sup_{r \in \ell_\infty} \|\eta\|_\infty = \|FH\|_{i\infty} d/2 = |C_F B_F| d/2$ となる.

- (ii) 性能評価

(13) 式の Q^* を用いたときの $E(Q^*)$ を計算する. まず, 定理 1 より,

$$E(Q) = \|GFH\|_{i\infty} \frac{d}{2} \quad (14)$$

である. したがって, Q^* の性能は, (12) 式より,

$$E(Q^*) = \|G\|_{i\infty} |C_F B_F| \frac{d}{2} \quad (15)$$

となる.

Fig. 4 Simulation result with Q^* designed for (17)

これより、以下のことがわかる。

- 直列分解 (10) の選び方が量子化器の性能に影響する。
- Q^* の性能が、 F のインパルス応答の 1 ステップ目 $C_F B_F$ と G のインパルス応答 $D_G, C_G B_G, C_G A_G B_G, \dots$ で決まる。
- $G(z) = 1$ (P が最小位相系) の場合や $G(z) = z^{-i}$ ($i > 0$) (P がむだ時間系) の場合^{13), 14)} には、 G の乗算がノルムの値を変えないので、(13) 式の Q^* が問題 1 の最適解であり、 $E(Q^*) = |C_F B_F|d/2$ となる。

3.3 数値例

Fig. 1 に対して量子化器 Q を設計する。制御対象 P は、非最小位相系

$$P(z) = \frac{0.01(z+1.2)}{(z-0.95)(z-0.9)} \quad (16)$$

とする。 P は不安定零点 ($z = -1.2$) をもつので、文献 3) の手法を直接的に用いる量子化器は不安定になる。そこで、 P を

$$F(z) = \frac{0.01z}{(z-0.95)(z-0.9)}, \quad G(z) = \frac{z+1.2}{z} \quad (17)$$

のように分解し、部分システム F に対して (13) 式の量子化器 $Q^*(F)$ を構築する。

このとき、 P の初期状態を $[0 \ 0]^T$ 、量子化間隔を $d := 2$ 、入力を $r(t) = 0.5 \sin(0.1\pi t) + 0.5 \cos(0.03\pi t)$ とし、シミュレーションを行なった。その結果を Fig. 4 に示す。上段が P の出力、下段が P の入力を表わしており、上段のグラフには、細線で r を入力としたときの P の出力を示している (2 つの線が重なっていることに注意する)。これより、良好な性能の量子化器が得られていることが確認できる。また、 $E(Q^*) = \|G\|_{i\infty} |C_F B_F| d/2 = (1+1.2) \times 0.01 \times 1 = 0.022$ に対して、 $\max_{t \in \{0,1,\dots,100\}} |e(t)|$ の値は 0.01814 であり、量子化器の性能を見積もることができている。

4. 直列分解に関する考察

提案手法では、 Q^* の性能 $E(Q^*)$ が P の直列分解 (10) に

左右される。しかし、制御対象が不安定零点を 1 個もつ場合に限定すれば、 Q^* が最適量子化器となる P の分解方法を与えることができる。以下では、その結果を述べ、さらに、固定次数量子化器設計について議論する。

4.1 不安定零点が 1 個の場合の最適解

定理 1 より、問題 1 の解は、 $\|PH\|_{i\infty}$ を最小化する安定な H を求めることで得られる。そこで、まず、与えられた P を (10) 式のように直列分解した際、 PH がどのような関数を取りうるのかを明確にする。

[補題 1] 与えられた P を (10) 式のように直列分解するとき、 S を安定かつ直達項が $C_F B_F$ で与えられるパイプロパな伝達関数の集合と定義する。このとき、(C1) を満たす任意の量子化器 $Q(A, B, C)$ および (7) 式の H に対して、ある $S \in \mathcal{S}$ が存在して、

$$PH = \frac{GS}{z} \quad (18)$$

が成り立つ。また、(13) 式の量子化器に対しては、 $S = C_F B_F \in \mathcal{S}$ が成り立つ。

(証明) 付録 B に示す。□

これを踏まえ、 $S \in \mathcal{S}$ により $\|z^{-1}GS\|_{i\infty} = \|GS\|_{i\infty}$ を最小化する問題を考える。補題 1 のパラメトリゼーションは直列分解の選び方によらないが、つぎに示すように、特別な G に対しては、この問題の最適解が定数関数 $S = C_F B_F$ で与えられる。

《定理 2》与えられた P は 1 個の不安定零点 a ($|a| > 1$) を有する相対次数 $i \geq 1$ の安定な伝達関数とする。このとき、問題 1 の意味での最適量子化器は、

$$G(z) = \frac{z-a}{z^i} \quad (19)$$

および (10) 式の直列分解に基づく (13) 式の Q^* により与えられ、その性能は

$$E(Q^*) = (1+|a|)|C_F B_F| \frac{d}{2} \quad (20)$$

となる。

(証明) 付録 C に示す。□

ここで、量子化器の性能は、制御対象 P の不安定零点の大きさ $|a|$ でアファインに特徴付けられることを強調したい。つまり、この結果により、非最小位相系に対する安定な量子化器 Q の性能限界が不安定零点に依存するということを明らかにすることができた。これは、数値最適化手法では把握できない結果である。

(注意) 不安定零点が 2 個以上の場合には、 G を

$$G(z) = \frac{(z-a_1)(z-a_2)}{z^2} \quad (21)$$

のように選べば良いように考えられるが、実際は、最適解が得られない場合がある。たとえば、

$$P(z) = \frac{(z+1.2)(z+1.5)}{(z-0.95)(z-0.9)(z-0.85)} \quad (22)$$

を考える。このとき、

Fig. 5 Simulation result with Q^* designed for (24)

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{(z+1.2)(z+1.5)}{z^2}, \\ G_2(z) &= \frac{(z+1.2)(z+1.5)}{(z-0.1)(z+0.5)} \end{aligned} \quad (23)$$

とし、 $P = G_1 F_1 = G_2 F_2$ と直列分解する。この場合、 $C_{F_1} B_{F_1} = C_{F_2} B_{F_2} = 1$ であるので、 $d = 2$ とすれば、(15) 式より $E(Q_1^*) = \|G_1\|_{i_\infty} = 5.5$ 、 $E(Q_2^*) = \|G_2\|_{i_\infty} = 4.7818$ を得る。つまり、 G_2 の選び方のほうが良いことになる。このことから、不安定零点が 2 個以上の場合については、さらなる議論が必要であることがわかる。 ■

4.2 固定次数の量子化器設計への応用

直列分解に基づくアプローチは、固定次数の量子化器設計にも有用である。たとえば、(16) 式の P に対して、

$$F(z) = \frac{0.01}{z-0.95}, \quad G(z) = \frac{z+1.2}{z-0.9} \quad (24)$$

のように分解すれば、次数が $N = 1$ の量子化器を設計することができる。いま、 P の初期状態を $[0 \ 0]^T$ 、量子化間隔を $d := 2$ とする。また、入力として、 $r(t) = 0.5 \sin(0.1\pi t) + 0.5 \cos(0.03\pi t)$ を用いる。その場合のシミュレーション結果を Fig. 5 に示す。 $E(Q^*) = 0.21999$ であり、 $\max_{t \in \{0,1,\dots,100\}} |e(t)|$ の値は 0.09441 であった。次数が 1 になったことによる性能劣化はあるものの、満足な性能の量子化器が得られていることがわかる。

一方、 P の直列分解として、

$$F(z) = \frac{0.01}{z-0.9}, \quad G(z) = \frac{z+1.2}{z-0.95} \quad (25)$$

を考えることもできる。この場合は $E(Q^*) = 0.43745$ となる。(24) 式の場合と比較すると性能が悪くなる。これは、(24) 式のほうが G のインパルス応答が速く零に収束するためである。このことから、低次数の量子化器を設計する場合、 P の極を絶対値の値が小さいほうから順に減らしたい次数分だけ選び、それらを G の極に設定すれば良さそうであると考えられる。なお、このことの理論的な検証は、今後の課題である。

5. おわりに

本論文では、制御対象を 2 つの部分システムに直列分解し、それらの情報を用いて量子化器を設計する方法を提案した。これにより、非最小位相系に対して、安定な量子化器を設計でき、さらにその性能をあらかじめ知ることができる。さらに、不安定零点が 1 個の場合においては、最適な量子化器を設計するための直列分解の方法が得られた。また、提案手法を用いれば、固定次数の量子化器の設計も可能である。

本論文の成果は、動的量子化器の設計理論を完成させるための足掛かりとなる重要なものである。今後、フィードバック系や MIMO 系への拡張、固定次数量子化器の最適設計、また、不安定零点を 2 個以上もつシステムに対して最適な量子化器を与える直列分解方法の確立、などの課題を解決していくことで、量子化器設計論が完成する。

謝辞 研究を進めるにあたり、京都大学 太田快人教授からご助言を頂いた。記して感謝を表したい。また、本研究の一部は、文部科学省科学研究費補助金挑戦的萌芽研究 15K12292 による支援を受けて行なわれた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 杉江, 東, 石井, J. Lunze, 藤岡, 津村, 南: 特集 量子化制御: 物理と情報をつなぐ新技術, 計測と制御, **49**-11, 776/813 (2010)
- 2) 南, 東, 杉江: 離散値入力型フィードバック制御における最適動的量子化器, 計測自動制御学会論文集, **43**-3, 227/233 (2007)
- 3) S. Azuma and T. Sugie: Optimal dynamic quantizers for discrete-valued input control, *Automatica*, **44**-2, 396/406 (2008)
- 4) S. Azuma, Y. Minami and T. Sugie: Optimal dynamic quantizers for feedback control with discrete-level actuators: Unified solution and experimental evaluation, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **133**-2, Article 021005 (2011)
- 5) 東, 杉江: 離散値入力型制御のための最適動的量子化器の安定性, 計測自動制御学会論文集, **43**-12, 1136/1143 (2007)
- 6) S. Azuma and T. Sugie: Stability analysis of optimally quantized LFT-feedback systems, *International Journal of Control*, **83**-6, 1125/1135 (2010)
- 7) S. Azuma and T. Sugie: Synthesis of optimal dynamic quantizers for discrete-valued input control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**-9, 2064/2075 (2008)
- 8) R. Morita, S. Azuma, Y. Minami and T. Sugie: Graphical design software for dynamic quantizers in control systems, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, **4**-9, 372/379 (2011)
- 9) K. Sawada and S. Shin: Dynamic quantizer synthesis based on invariant set analysis for SISO systems with discrete-valued input, *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 1385/1390 (2010)
- 10) K. Sawada and S. Shin: Synthesis of dynamic quantizers for quantized feedback systems within invariant set analysis framework, *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 1662/1667 (2011)
- 11) 南, 室巻: 進化型計算を用いた固定構造動的量子化器の設計, システム制御情報学会論文誌, **27**-1, 20/27 (2014)
- 12) M.A. Dahleh and I.J. Diaz-Bobillo: *Control of Uncertain*

Systems: A linear programming approach, Prentice-Hall (1995)

- 13) 岡島, 梅本, 松永, 川路: むだ時間を有する 2 自由度 IMC における動的量子化器の構成, 計測自動制御学会論文集, **46-3**, 149/156 (2010)
- 14) H. Okajima, N. Matsunaga and S. Kawaji: Design of dynamic quantizers for 2-DOF IMC and its application to the temperature control of a heat plate, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, **4-1**, 77/82 (2011)

《付 録》

A. 定理 1 の証明

$e = PHw$ なので,

$$\sup_{r \in \ell_\infty} \|PHw\|_\infty = \|PH\|_{i\infty} \frac{d}{2} \quad (\text{A.1})$$

を示せば良い.

まず, 任意の $r \in \ell_\infty$ に対して, $\|w\|_\infty \leq d/2$ より,

$$\|PHw\|_\infty \leq \|PH\|_{i\infty} \frac{d}{2} \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ.

一方, 任意の $\delta \in (0, d/2)$ と $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\|\bar{w}\|_\infty = \frac{d}{2} - \delta \quad (\text{A.3})$$

$$\|PH\bar{w}\|_\infty = \|PH\|_{i\infty} \|\bar{w}\|_\infty - \epsilon \quad (\text{A.4})$$

となる $\bar{w} \in \ell_\infty$ が存在する. また, $\|\bar{w}\|_\infty < d/2$ より, $\bar{r} = -\bar{w} - \mathcal{C}\xi + \mathbf{q}[\mathcal{C}\xi] \in \ell_\infty$ と選べば, $\bar{w} = \mathbf{q}[\mathcal{C}\xi + \bar{r}] - (\mathcal{C}\xi + \bar{r})$ とできる. これより,

$$\sup_{r \in \ell_\infty} \|PHw\|_\infty \geq \|PH\|_{i\infty} \left(\frac{d}{2} - \delta \right) - \epsilon \quad (\text{A.5})$$

が成り立つ. さらに, $\delta \in (0, d/2)$ と $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ の任意性より,

$$\sup_{r \in \ell_\infty} \|PHw\|_\infty \geq \|PH\|_{i\infty} \frac{d}{2} \quad (\text{A.6})$$

となる. したがって, (A.2) 式と (A.6) 式より, (A.1) 式が示された.

B. 補題 1 の証明

まず, $S(z) = zF(z)H(z)$ を考えると, (18) 式が成り立つ. そして, $H(\infty) = 1$ と $zF(z)|_{z=\infty} = C_FB_F$ より, $S(\infty) = C_FB_F$ を満たす. さらに, F と H が安定なので, S は安定である. したがって, $S \in \mathbb{S}$ が存在して, (18) 式が成り立つ. また, (13) 式の量子化器に対しては, (12) 式が成り立つので, $S(z) = zFH = C_FB_F$ が得られる.

C. 定理 2 の証明

まず, $F := PG^{-1}$ が (10) 式における仮定を満たす実現をもつことは容易に確認できる. また, (15) 式および $\|G\|_{i\infty} = 1 + |a|$ より, (20) 式はただちに示される.

つぎに, $S(z) = C_FB_F + \sum_{t=1}^{\infty} s(t)z^{-t} \in \mathbb{S}$, $(\sum_{t=1}^{\infty} |s(t)| < \infty)$ とすると,

$$\|GS\|_{i\infty} = |C_FB_F| + |-aC_FB_F + s(1)|$$

$$+ \sum_{t=1}^{\infty} |-as(t) + s(t+1)| \quad (\text{C.1})$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned} & |C_FB_F| + |-aC_FB_F + s(1)| \\ & + \sum_{t=1}^{\infty} |-as(t) + s(t+1)| - (1 + |a|)|C_FB_F| \\ & \geq |C_FB_F| + |a||C_FB_F| - |s(1)| \\ & + \sum_{t=1}^{\infty} (|a||s(t)| - |s(t+1)|) - (1 + |a|)|C_FB_F| \\ & = (|a| - 1) \sum_{t=1}^{\infty} |s(t)| \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

となる. したがって, $1 < |a|$ より, 任意の $S \in \mathbb{S}$ に対して, $\|GS\|_{i\infty} \geq (1 + |a|)|C_FB_F|$ が成り立つ. よって, 定理 1 および補題 1 から, $E(Q^*)$ が最小値である.

[著 者 紹 介]

南 裕 樹 (正会員)

2009 年京都大学大学院情報学研究科博士後期課程修了. 2008~2009 年日本学術振興会特別研究員 (DC2). 2009 年舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科助教, 2013 年京都大学大学院情報学研究科特定研究員, 同年同研究科特定助教, 2014 年より奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教となり現在に至る. 量子化制御理論およびその応用に関する研究に従事. 博士 (情報学). 2006 年度計測自動制御学会学術奨励賞などを受賞. IEEE, システム制御情報学会などの会員.

加 嶋 健 司 (正会員)

2005 年京都大学大学院情報学研究科博士課程修了. 同年同研究科特任助手. 同年東京工業大学情報理工学研究科助手 (2007 年より助教), 2011 年より大阪大学大学院基礎工学研究科准教授, 2013 年より京都大学大学院情報学研究科准教授となり現在に至る. 2010 年より 1 年間, Alexander von Humboldt Foundation の支援のもと Stuttgart Universität に滞在. 大規模系・確率系のシステム制御理論およびその応用に関する研究に従事. 2012 年計測自動制御学会制御部門バイオニア賞などを受賞. 博士 (情報学). システム制御情報学会, IEEE の会員.