予見情報の不確かさを考慮した H^∞ 推定器の構成

児 島 晃*・端 倉 弘太郎*

A Design Method of H^∞ Filtering Law with Uncertain Preview Information

Akira KOJIMA* and Kotaro HASHIKURA*

An H^∞ filtering problem for a system driven by uncertain previewable signals is discussed, and a design method of an H^∞ filtering law is presented. The problem pertains to general H^∞ control problems which enable to deal with typical controller design regarding the uncertainty of future forecast. The solvability condition of the filtering problem is characterized by the solution of algebraic Riccati equation, and some interpretations are provided on the features of the resulting filtering law.

Key Words: previewable information, uncertainty, H^∞ filtering

1. はじめに

予見制御法は、目標値信号の予見情報を利用することにより、制御系の過渡応答を改善する設計法として知られ、これまでに数多くの制御則の構成法が明らかにされてきた^{1)~10)}。文献 2), 10) では、有限時間区間の基本問題において、予見制御法の有する特徴が明らかにされ、一般化された H^2 予見制御問題の解法が、文献 1), 6), 8) において導かれている。また、 H^∞ 予見制御問題の解法は、文献 3)~5), 7), 9), 11) により明らかにされ、可解条件と制御則が一般化プラントから定めた Hamilton 行列に基づいて与えられることが示されている。

これまでの予見制御法の研究において、目標値など制御対象に印加される予見情報は、正確であることが仮定されており、その前提下でさまざまな可解条件と制御則の構成法が導かれてきた。しかしながら、人間・機械系のアシスト制御、気象・発電予測を考慮した自然エネルギーの需給制御など、広範な問題に予見制御法を適用する場合には、不確かな予見情報から、対象の有用な情報を推定する方法を確立し、さらに制御法を明らかにすることが必要になる。

本論文では、Fig. 1 のような予見情報の不確かさを考慮した H^∞ 推定問題に対して、達成可能な H^∞ 推定性能と推定器の構成法を明らかにする。Fig. 1 の一般化プラントにおいて、入手可能な情報は観測量 $y^0(t)$ と予見情報 $y^1(t, \cdot)$ であり、予見情報 $y^1(t, \cdot)$ は外乱 $v^1(t, \cdot)$ の影響を受けながら更新されてゆく。以下では、対象 Σ の観測量 $y^0(t)$ と予見情報

Fig. 1 H^∞ filtering with uncertain preview information

$y^1(t, \cdot)$ から、出力 $z(t)$ を推定する問題に着目し、 H^∞ 推定器がある行列 Riccati 方程式の解から構成できることを明らかにする。

論文の構成は、以下のようにまとめられる。2 章では、予見情報の不確かさを扱う H^∞ 推定問題を示し、システムの状態空間表現を定める。3 章では、 H^∞ 推定問題を解き、可解条件と推定則の構成法を明らかにする。そして、4 章では、 H^∞ 推定則の特徴を数値例により示し、5 章で、本論文の結果をまとめる。

2. 問題の定式化と準備

つぎの H^∞ 予見推定問題を考える (Fig. 1)。

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (1a)$$

$$z(t) = C_1x(t) \quad (1b)$$

$$y^0(t) = C_2x(t) + Dv^0(t) \quad (1c)$$

$$y^1(t, \alpha) = E(\alpha)w(t + \alpha) + F(\alpha)v^1(t, \alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq h \quad (1d)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $w(t) \in \mathbb{R}^\ell$ は予見可能な信号、 $(y^0(t), y^1(t, \cdot)) \in \mathbb{R}^{q_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{q_1})$ は観測量と予見情報、 $(v^0(t), v^1(t, \cdot)) \in \mathbb{R}^{m_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{m_1})$ は観測量と予見情報の不確かさを表わす外乱、 $z(t) \in \mathbb{R}^p$ は系 Σ の推定すべき出

* 首都大学東京システムデザイン研究科 日野市旭が丘 6-6

* Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University, 6-6 Asahigaoka, Hino

(Received October 3, 2015)

(Revised December 10, 2015)

力である．(1d) 式において，系 Σ には信号 $w(t)$ が印加され，他方観測量 $y^1(t, \cdot)$ には，外乱 $v^1(t, \cdot)$ が加わった不確かな予見情報が与えられる．よって系 Σ により，観測量 $y^0(t)$ と不確かな予見情報 $y^1(t, \cdot)$ から，内部状態 $z(t)$ を推定する問題が定められる．以下の考察では，信号 (v^0, v^1) , (y^0, y^1) を，

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= \begin{bmatrix} v^0(t) \\ v_t^1 \end{bmatrix} \in V := \mathbb{R}^{m_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{m_1}) \\ v_t^1(\alpha) &:= v^1(t, \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq h \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} y^0(t) \\ y_t^1 \end{bmatrix} \in Y := \mathbb{R}^{q_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{q_1}) \\ y_t^1(\alpha) &:= y^1(t, \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq h \end{aligned} \quad (3)$$

と表わし，つぎの予見推定問題を考える．

H^∞ 予見推定問題：観測量 $\hat{y}$ に基づき，つぎの H^∞ 性能を達成する推定則 $\hat{u}(t) = [\Phi \hat{y}](t)$ を構成せよ．

$$J := \sup_{w, \hat{v} \in L_2} \frac{\|z - u\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{R}^p)}^2}{\|\hat{v}\|_{L_2(0, \infty; V)}^2 + \|w\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{R}^\ell)}^2} < \gamma^2 \quad (4)$$

ここで， $\gamma > 0$ は推定性能を指定する定数であり，推定則 Φ は観測量 $\hat{y}$ に因果的であるとする．□

ここに定めた H^∞ 予見推定問題は，系 Σ の出力 $z(t)$ を不確かな観測量 $y^0(t)$ と予見情報 $y^1(t, \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq h$) から推定するものであり，(4) 式に定めた最悪な不確かさを考慮した推定則を得ることができる．以下では，仮定 (H1)-(H3) を設け，推定性能 $\gamma > 0$ に対する可解条件と推定則の構成法を明らかにする．

(H1) 行列 (C_2, A) は可検出である．

(H2) 行列 D は行最大階数を持ち，つぎの条件が成り立つ．

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(H3) 行列値関数 $E(\cdot)$, $F(\cdot)$ は区分的に連続であり，有界である．また， $F(\cdot)$ はつぎの条件を満たす．

$$F(\alpha)F^T(\alpha) > \epsilon \cdot I, \quad \epsilon > 0 \quad (0 \leq \alpha \leq h)$$

予見情報を定めた (1d) 式には，行列値関数 $E(\cdot)$, $F(\cdot)$ が独立に含まれており，一見冗長に見受けられる．しかしながら，行列値関数 $E(\cdot)$ には任意の構造を設けることができるため，(a) 複数チャネルの予見情報を扱う場合，(b) 異なる予見情報を融合する場合など，この定式化により応用上重要な問題を扱うことができる．3 章では，主結果を導いた後，これらの問題と対応する推定則を調べる．

系 Σ は，状態空間

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \mathbb{R}^n \times L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell), \\ \langle \psi, \phi \rangle &:= \psi^{0T} \phi^0 + \int_0^h \psi^{1T}(\alpha) \phi^1(\alpha) d\alpha \\ \psi &= (\psi^0, \psi^1) \in \mathcal{X}, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (5)$$

を導入し，対応する状態を

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w_t \end{bmatrix} \in \mathcal{X} := \mathbb{R}^n \times L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell) \\ w_t(\alpha) &:= w(t + \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq h \end{aligned} \quad (6)$$

と定めると，つぎの発展方程式により表わされる¹²⁾．

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \mathcal{A}\hat{x}(t) + \mathcal{B}w(t + h) \\ z(t) &= \mathcal{C}_1\hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) &= \mathcal{C}_2\hat{x}(t) + \mathcal{D}\hat{v}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\mathcal{A}$ は，

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi &= \begin{bmatrix} A\phi^0 + B\phi^1(0) \\ \phi^{1'} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{\phi \in \mathcal{X} : \phi^1 \in W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^\ell), \phi^1(h) = 0\} \end{aligned} \quad (8)$$

と定義した無限小生成作用素であり，定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{X}$ で稠密である^(注 1)．また共役作用素 $\mathcal{A}^*$ は，

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*\psi &= \begin{bmatrix} A^T\psi^0 \\ -\psi^{1'} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) &= \{\psi \in \mathcal{X} : \psi^1 \in W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^\ell), \\ &\quad \psi^1(0) = B^T\psi^0\} \end{aligned} \quad (9)$$

と与えられ，状態空間を $\mathcal{V} := \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)^*$ と拡張すると，作用素 $\mathcal{A}$ の定義域は $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ となる．空間 $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ は， $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ と稠密に埋め込まれており (文献 12), Remark 2.6), 入出力作用素 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{V})$, $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^p)$, $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, Y)$, $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(V, Y)$ はつぎのように与えられる．

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^*\psi &= \psi^1(h) \in \mathbb{R}^\ell, \quad \psi = (\psi^0, \psi^1) \in \mathcal{V}^*, \\ \mathcal{C}_1\phi &= \mathcal{C}_1\phi^0, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X}, \\ \mathcal{C}_2\phi &= \begin{bmatrix} (\mathcal{C}_2\phi)^0 \\ (\mathcal{C}_2\phi)^1 \end{bmatrix}, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X}, \\ (\mathcal{C}_2\phi)^0 &= \mathcal{C}_2\phi^0, \quad (\mathcal{C}_2\phi)^1(\alpha) = E(\alpha)\phi^1(\alpha), \\ \mathcal{D}v &= \begin{bmatrix} (\mathcal{D}v)^0 \\ (\mathcal{D}v)^1 \end{bmatrix}, \quad v = (v^0, v^1) \in V, \\ (\mathcal{D}v)^0 &= \mathcal{D}v^0, \quad (\mathcal{D}v)^1(\alpha) = F(\alpha)v^1(\alpha), \\ &\quad 0 \leq \alpha \leq h \end{aligned} \quad (10)$$

系 $\hat{\Sigma}$ に対して推定性能 (4) を達成する問題は，無限次元系の H^∞ 推定問題として位置づけられ^{12), 13)}，可解条件と推定則は，対応する作用素 Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{A}^*\phi + \mathcal{A}\mathcal{P}\phi + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{C}_1^*\mathcal{C}_1\mathcal{P}\phi \\ - \mathcal{P}\mathcal{C}_2^*(\mathcal{D}\mathcal{D}^*)^{-1}\mathcal{C}_2\mathcal{P}\phi + \mathcal{B}\mathcal{B}^*\phi = 0, \quad \phi \in \mathcal{V}^* \end{aligned} \quad (11)$$

(注 1) $W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^\ell)$ は Sobolev 空間を示し， $\phi^1 \in L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell)$, $\phi^{1'} \in L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell)$ を満たす関数全体を表わす．

の可解性からつぎのように表わされる¹⁴⁾.

[補題 1]¹⁴⁾ 系 Σ に対して, (4) 式を満たす H^∞ 推定則が存在する必要十分条件は, つぎの条件 (A) が成り立つことである.

(A) 作用素 Riccati 方程式 (11) に安定化解 $P \geq 0$ ($P \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$) が存在し, 作用素 $A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^*C_1 - PC_2^*(DD^*)^{-1}C_2$ は指数安定な半群を生成する^(注 2).

また (A) が成り立つとき, H^∞ 推定則 $\hat{u}(t) = [\Phi\hat{y}](t)$ は, つぎのように与えられる.

$$u(t) = C_1\hat{x}(t) \quad (12a)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + PC_2^*(DD^*)^{-1}(\hat{y}(t) - C_2\hat{x}(t)) \quad (12b)$$

ここで $\hat{x}(t)$ は, 空間 $\mathcal{X}$ で定義された推定器 Φ の状態である. $\square$

以下の章では, 作用素 Riccati 方程式 (11) の解析解を求め, 達成可能な推定性能 (4) と推定則の構成法を明らかにする.

3. H^∞ 予見推定器の構成

2 章に示した結果に基づき, 可解条件 (A) (補題 1) を検証可能な条件に展開し, 推定則 (12) を明らかにする. 作用素方程式 (11) の解析解は, 行列 Riccati 方程式の解からつぎのように構成することができる.

《定理 1》 定数 $\gamma > 0$ に対して, 条件 (A) が成り立つ必要十分条件は, つぎの条件 (a) が成り立つことである.

(a) 行列 Riccati 方程式

$$PA^T + AP + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^T C_1 P - PC_2^T (DD^T)^{-1} C_2 P + B\Pi(0)B^T = 0 \quad (13)$$

$$\Pi(\alpha) := \left[I + \int_\alpha^h E^T(\tau)(F(\tau)F^T(\tau))^{-1}E(\tau) d\tau \right]^{-1}, \quad 0 \leq \alpha \leq h \quad (14)$$

は安定化解 $P \geq 0$ をもち, 行列 $A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^T C_1 - PC_2^T (DD^T)^{-1} C_2$ は安定である.

また, 条件 (a) が成り立つとき, 作用素方程式 (11) の安定化解 $P \geq 0$ ($P \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$) はつぎのように与えられる.

$$P = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \Pi \cdot \mathcal{I} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで $\mathcal{I}$ は, 恒等作用素であり, $\Pi \cdot \mathcal{I}$ により, つぎの乗算作用素を表わしている.

$$(\Pi \cdot \mathcal{I}\phi^1)(\alpha) = \Pi(\alpha)\phi^1(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq h \\ \phi^1 \in L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell)$$

$\square$

(証明) (14) 式に示した行列値関数 $\Pi(\cdot)$ が, 微分方程式

$$\Pi'(\alpha) = \Pi(\alpha)E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1}E(\alpha)\Pi(\alpha), \quad (16a)$$

$$\Pi(h) = I \quad (16b)$$

の解であることに注意する.

(a) $\Rightarrow$ (A): 条件 (a) が成り立つとき, 方程式 (11) の半正定な安定化解が, (15) 式により与えられることを示す. 条件 (a) より, 作用素 (15) は半正定である. また, 任意の $\phi, \psi \in \mathcal{V}^*$ に対して, (11) 式左辺の各項はつぎのように計算される^(注 3).

$$\langle \psi, PA^* \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} = \left\langle \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \Pi \cdot \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \phi^0 \\ -\phi^{1'} \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}$$

$$= \psi^{0T} P A^T \phi^0 - \int_0^h \psi^{1T}(\alpha) \Pi(\alpha) \phi^{1'}(\alpha) d\alpha \quad (17)$$

$$\langle \psi, AP \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} = \langle PA^* \psi, \phi \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}^*}$$

$$= \psi^{0T} A P \phi^0 - \int_0^h \psi^{1T'}(\alpha) \Pi(\alpha) \phi^1(\alpha) d\alpha \quad (18)$$

$$\langle \psi, \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^* C_1 P \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \psi^{0T} P C_1^T C_1 P \phi^0 - \langle \psi, PC_2^* (DD^*)^{-1} C_2 P \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}$$

$$= -\psi^{0T} P C_2^T (DD^T)^{-1} C_2 P \phi^0 - \int_0^h \psi^{1T}(\alpha) \Pi(\alpha) \times \\ E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1}E(\alpha)\Pi(\alpha)\phi^1(\alpha) d\alpha \quad (20)$$

$$\langle \psi, PBB^* \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} = \psi^{1T}(h)\phi^1(h) \quad (21)$$

さらに (17)~(21) 式両辺の和をとり, $\phi, \psi \in \mathcal{V}^*$ から得られる関係

$$\phi^1(0) = B^T \phi^0, \quad \psi^1(0) = B^T \psi^0 \quad (22)$$

と (16a), (16b), (13) 式を用いると, つぎの等式が得られる.

$$\langle \psi, (PA^* + AP)\phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \langle \psi, PC_1^* C_1 P \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} \\ - \langle \psi, PC_2^* (DD^*)^{-1} C_2 P \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} + \langle \psi, BB^* \phi \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} \\ = -\psi^{0T} B \Pi(0) B^T \phi^0 + \psi^{1T}(h)\phi^1(h) \\ - \int_0^h \{ \psi^{1T}(\alpha) \Pi(\alpha) \phi^1(\alpha) \}' d\alpha = 0 \quad (23)$$

よって, (15) 式に定めた作用素 P は, 方程式 (11) の半正定解である.

つぎに, 作用素 $A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^* C_1 - PC_2^* (DD^*)^{-1} C_2$ が指数安定な半群を生成することを, 閉ループ系

$$\dot{\hat{x}}(t) = \{A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^* C_1 - PC_2^* (DD^*)^{-1} C_2\} \hat{x}(t), \\ \hat{x}(0) \in \mathcal{X} \quad (24)$$

が指数安定であることから示す. 系 (24) は,

(注 2) 系 $\dot{\hat{x}}(t) = \{A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^* C_1 - PC_2^* (DD^*)^{-1} C_2\} \hat{x}(t)$, $\hat{x}(0) \in \mathcal{X}$ を定めたとき, これが指数安定であることを意味する (たとえば文献 15)).

(注 3) ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}$ は, それぞれ $\mathcal{V}^*, \mathcal{V}$ に属する要素に対して, (5) 式に定めた内積 (duality pairing) を計算したことを意味する¹⁶⁾.

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) = & \{A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^T C_1 - PC_2^T (DD^T)^{-1} C_2\} x^0(t) \\ & + Bx^1(t, 0) \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x^1(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} x^1(t, \alpha) + K(\alpha) x^1(t, \alpha), \quad x^1(t, h) = 0 \quad (25b)$$

$$K(\alpha) := -\Pi(\alpha)E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1}E(\alpha) \quad (25c)$$

と表わされ, $x^0(t)$, $x^1(t, \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq h$) が (6) 式に定めた状態に対応する. ここで (25b) 式より, 時刻 $t > h$ では $x^1(t, \alpha) = 0$ ($0 \leq \alpha \leq h$) となり, また (a) より, 行列 $A + \frac{1}{\gamma^2} \cdot PC_1^T C_1 - PC_2^T (DD^T)^{-1} C_2$ は指数安定である. よって, 作用素 (15) が方程式 (11) の安定化解であることが示された.

(A) $\Rightarrow$ (a): 定数 $\gamma > 0$ に対して, 条件 (A) が成り立つとき, 条件 (a) が導かれることを示す. ここで $\gamma > 0$ に対して条件 (A) が成り立つならば, 作用素 Riccati 方程式 (11) は, $\lambda \in [\gamma, \infty)$ に対して常に有界な安定化解 $P \geq 0$ を有することに注意する¹⁴⁾.

いま, 条件 (a) が $\lambda \in (\gamma_1, \infty)$ と与えたときに限り成り立つとする. このとき $\gamma_1 \geq \gamma$ とすると, 文献 17) の結果から $\|P\| \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow \gamma_1 + 0$) となり, 安定化解 (15) が有界であることに矛盾する. よって, 条件 (A) が成り立つとき, 条件 (a) もまた成り立つ. $\square$

定理 1 により, (4) 式に定めた H^∞ 推定性能は, 行列 Riccati 方程式 (13) の可解性から調べられることが示された. さらに, 作用素 Riccati 方程式 (11) の解析解が, (15) 式のように与えられることから, H^∞ 予見推定問題 Σ の解法は, つぎのように与えられる.

《定理 2》(主な結果) $\gamma > 0$ に対して, H^∞ 予見推定問題 (4) が可解である必要十分条件は, 定理 1 に示した条件 (a) が成り立つことである. また問題が可解なとき, H^∞ 予見推定則はつぎのように与えられる.

$$u(t) = C_1 \underline{x}(t) \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) = & A\underline{x}(t) + G(y^0(t) - C_2 \underline{x}(t)) \\ & + \int_0^h H(\alpha) y^1(t - \alpha, \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (26b)$$

$$G := PC_2^T (DD^T)^{-1} \quad (26c)$$

$$H(\alpha) := B\Pi(0)E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1} \quad (26d)$$

ここで $\Pi(\alpha) > 0$ ($0 \leq \alpha \leq h$) は (14) 式で定めた行列値関数であり, $P \geq 0$ は行列 Riccati 方程式 (13) の安定化解である. $\square$

(証明) 定理 1 により, 可解条件は (a) のように与えられる. 以下では, はじめに (12) 式が, (26a) 式と

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{w}(t, 0) + G(y^0(t) - C_2 \underline{x}(t)) \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underline{w}(t, \alpha) = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{w}(t, \alpha) + \tilde{H}(\alpha)(y^1(t, \alpha) - E(\alpha)\underline{w}(t, \alpha)), \\ \underline{w}(t, h) = & 0 \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\tilde{H}(\alpha) := \Pi(\alpha)E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1} \quad (27c)$$

により表わされることを示し, さらに偏微分方程式 (27b) を解くことにより, (26b)~(26d) 式を導く.

推定則 (12b) を,

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \mathcal{A}\hat{\underline{x}}(t) + f(t) \quad (28a)$$

$$f(t) = \mathcal{P}C_2^*(\mathcal{D}\mathcal{D}^*)^{-1}(\hat{y}(t) - C_2\hat{\underline{x}}(t)) \quad (28b)$$

と書き直し, はじめに (27a)~(27c) 式を導く. 等式 $\langle \psi, \dot{\hat{\underline{x}}}(t) \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} = \langle \psi, \mathcal{A}\hat{\underline{x}}(t) + f(t) \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}, \forall \psi \in \mathcal{V}^*$ が成り立つことを用い, $\hat{\underline{x}}(t) := (\underline{x}(t), \underline{w}(t, \cdot)) \in \mathcal{X}$, $f(t) := (f^0(t), f^1(t, \cdot)) \in \mathcal{X}$ と定めると, (28a) 式から,

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{w}(t, 0) + f^0(t) \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{w}(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{w}(t, \alpha) + f^1(t, \alpha) \quad (30)$$

$$\underline{w}(t, h) = 0 \quad (31)$$

が導かれる. また, (10), (15) 式に定めた作用素から, (28b) 式は,

$$f^0(t) = G(y^0(t) - C_2 \underline{x}(t)) \quad (32)$$

$$f^1(t, \alpha) = \tilde{H}(\alpha)(y^1(t, \alpha) - E(\alpha)\underline{w}(t, \alpha)) \quad (33)$$

のように表わされる. よって (29)~(33) 式から (27a)~(27c) 式が示された. また, (26a) 式は (12a) 式から直接導かれる.

つぎに偏微分方程式 (27b) を解き, (27a)~(27c) 式が (26b)~(26d) 式のようにまとめられることを示す. ここで (27b) 式は移送系のダイナミクスを表わすものであり, 特性曲線 $t + \alpha = c$ (c : 定数) に沿って,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \underline{w}(c - \alpha, \alpha) = & -\tilde{H}(\alpha)(y^1(c - \alpha, \alpha) - E(\alpha)\underline{w}(c - \alpha, \alpha)), \\ & 0 \leq \alpha \leq h \end{aligned} \quad (34)$$

と表わされる. そして (16a) 式が成り立つことに注意すると, (34) 式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \{ \Pi^{-1}(\alpha) \underline{w}(c - \alpha, \alpha) \} \\ = -E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1} y^1(c - \alpha, \alpha) \end{aligned} \quad (35)$$

が導かれる. よって (35) 式両辺を $[0, h]$ で積分し, また $c = t$ と置き換えて (27b) 式を代入すると, 等式

$$\underline{w}(t, 0) = \int_0^h \Pi(0)E^T(\alpha)(F(\alpha)F^T(\alpha))^{-1} y^1(t - \alpha, \alpha) d\alpha \quad (36)$$

が得られる. したがって, (27a), (36) 式から, (26b)~(26d) 式が導かれる. $\square$

定理 1, 2 により, H^∞ 推定問題の可解条件は, 行列 Riccati 方程式 (13) の解により与えられ, また, H^∞ 予見推定則は, 予見情報の積分項を含んだオブザーバ (26b) により構成されることが示された.

最後に、定理 2 から導かれるいくつかの設計例を示す。予見情報を定めた (1d) 式において、 $E(\cdot)$ は情報構造を定める分布関数であり、つぎのような問題を扱うことができる。

(a) 複数チャネルの予見情報を扱う場合

系 Σ において、予見可能な信号と対応する入力行列を

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

と表わし、 w_1 の予見情報は h_1 単位時間、 w_2 の予見情報は h_2 単位時間利用可能とする ($0 \leq h_1 \leq h_2 = h$)。このような推定問題は、(1d) 式をつぎのように定めることにより、扱うことができる。

$$y^1(t, \alpha) = \begin{bmatrix} y_1^1(t, \alpha) \\ y_2^1(t, \alpha) \end{bmatrix}, \quad v^1(t, \alpha) = \begin{bmatrix} v_1^1(t, \alpha) \\ v_2^1(t, \alpha) \end{bmatrix},$$

$$E(\alpha) = \begin{bmatrix} \chi_{[0, h_1]}(\alpha) \cdot I & 0 \\ 0 & \chi_{[0, h_2]}(\alpha) \cdot I \end{bmatrix},$$

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha) & 0 \\ 0 & F_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq h$$

ここで χ は、 $\chi_S(\alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha \in S) \\ 0 & (\alpha \notin S) \end{cases}$ と定めた特徴関数である。また、定理 2 より推定則は、(26a) 式と、

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + G(y^0(t) - C_2\hat{x}(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_0^{h_i} H_i(\alpha) y_i^1(t - \alpha, \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (38)$$

$$H_i(\alpha) := B_i \Pi_i(0) (F_i(\alpha) F_i^T(\alpha))^{-1}$$

$$\Pi_i(0) = \left[I + \int_0^{h_i} (F_i(\tau) F_i^T(\tau))^{-1} d\tau \right]^{-1} \quad (i = 1, 2)$$

により構成される。

(b) 異なる予見情報を融合する場合

つぎのように、異なる不確かさが含まれた複数の観測量から、予見推定則を構成する問題を考える。

$$y^1(t, \alpha) = \begin{bmatrix} y_1^1(t, \alpha) \\ y_2^1(t, \alpha) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$y_1^1(t, \alpha) = E_1(\alpha) w(t + \alpha) + F_1(\alpha) v_1^1(t, \alpha) \quad (40)$$

$$y_2^1(t, \alpha) = E_2(\alpha) w(t + \alpha) + F_2(\alpha) v_2^1(t, \alpha) \quad (41)$$

これは、系 (1d) において、

$$E(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1(\alpha) \\ E_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad F(\alpha) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha) & 0 \\ 0 & F_2(\alpha) \end{bmatrix} \quad (42)$$

と表わされるため、

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha) &= \\ &\left[I + \int_\alpha^h \left(\sum_{i=1}^2 E_i^T(\tau) (F_i(\tau) F_i^T(\tau))^{-1} E_i(\tau) \right) d\tau \right]^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

Fig. 2 H^∞ estimation problem for a preview system

と定めると推定則が (26) 式により与えられる。また (a) で示したように、分布関数 $E_i(\cdot)$ を適当に定めることにより予見時間の異なる不確かな情報を融合することも可能である。

4. 数値例

つぎの H^∞ 予見推定問題に着目し、達成可能な H^∞ 予見推定性能 ((4) 式) と予見時間の関係を調べる (Fig. 2)。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & -0.25 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (44a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (44b)$$

$$y^0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \end{bmatrix} x(t) + 0.1 \cdot v^0(t) \quad (44c)$$

$$y^1(t, \alpha) = w(t + \alpha) + F(\alpha) v^1(t, \alpha) \quad (44d)$$

($0 \leq \alpha \leq h$)

ここで、 $F(\cdot)$ は、予見情報 $y^1(t, \cdot)$ の不確かさを表わす重み行列であり、はじめに

$$F(\alpha) := 1/\sqrt{h} \cdot F_0 \quad (0 < h \leq 5) \quad (45a)$$

と与えた場合を考える。これは、予見区間全体の信号 $w(t + \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq h$) に対して、 L_2 ノルムの意味で一定のエネルギーを有する外乱を想定したものであり、予見時間が長くなる程、推定器の信号処理上の自由度が増える。観測量 (44d) に (45a) の重みを定めたとき、予見時間と達成される推定性能との関係は、Fig. 3 のように求められる。これらの結果から、(45a) の重みを $F_0 = 0.1 \sim 5.0$ と定めた場合、予見時間を長く定めるほど推定性能が改善される傾向が確認される。しかしながら、予見情報に大きな不確かさが想定された場合 (たとえば $F_0 = 5.0$)、推定性能は予見時間を長くしてもそれほど改善されない。これらの傾向は、対象の動特性と予見不確かさの関係に依存しており、本手法により、推定器に望む性能と、予見情報に必要な精度を調べることができる。

(27) 式に示した予見推定則を、 $\gamma = 1.05 \times \gamma_{\text{opt}}$, $h = 1.0$ として設計した場合、 $(\hat{v}, w)$ から $z - u$ までの σ プロットは Fig. 4 のように求められた^(注 4)。ここで γ_{opt} は Fig. 3 で得られた推定性能の最適値を意味する。これらの結果から、 γ

(注 4) 本数値例では、 $(\hat{v}, w) \in V \times \mathbb{R}^\ell$ から $z - u$ の σ プロットを求めるために、(1d) 式の分布外乱 $v^1(t, \alpha)$ は $\Delta\alpha = 0.002$ により離散化し、対応するノルムの計算には平均近似を用いた。

Fig. 3 H^∞ performance vs. preview time Fig. 4 σ -plots of the filtering system

インの最大値は、予見情報の不確かさが減少するほど抑制され、高周波数帯から推定性能が改善されてゆくようすが観察される。

つぎに、(44d) の重みを

$$F(\alpha) := \sqrt{h} \cdot F_0 \quad (0 < h \leq 5) \quad (45b)$$

と定めた場合を考える。これは、予見信号 $w(t+\alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq h$) に対して、予見時間に比例するように外乱のエネルギーを定めた場合であり、予見信号に含まれる外乱のパワーを指定したものに相当する。このとき、達成可能な H^∞ 推定性能は予見時間 $h > 0$ に対して常に一定であり、Table 1 のように求められる^(注 5)。これは、(45b), (14) 式より $\Pi(0)$ が、

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= \left[I + \int_0^h \frac{1}{h} \cdot (F_0 F_0^T)^{-1} d\tau \right]^{-1} \\ &= [I + (F_0 F_0^T)^{-1}]^{-1} \end{aligned}$$

と計算され、行列 Riccati 方程式 (13) が予見時間 h と無関係になるためである。これらの性質は、予見不確かさのパワーが性能改善の鍵となることを示唆しており、本結果を一般の

(注 5) これらの値は、Fig. 3 において $h = 1$ とした場合に対応する。これは、(45a), (45b) 式が一致するためである。

Table 1 Uncertainty in power and optimal performance

F_0 in (45b)	Optimal Performance for $h > 0$
0.1	0.0637865
0.2	0.1008368
0.5	0.1691294
1.0	0.2222013
2.0	0.2547121
5.0	0.2685308

制御問題に展開する上で、有用な指標になると考えられる。

5. おわりに

本稿では、予見情報の不確かさを考慮した H^∞ 推定問題に着目し、達成される推定性能と推定器の構成法を明らかにした。そして、系の記述に対応する観測 Riccati 作用素方程式の解析解を導くことにより、1) 推定問題の可解条件が、ある行列 Riccati 方程式の可解条件により与えられること、2) 推定器が予見情報の積分項を含むオブザーバにより構成されることを示した。また数値例により、推定性能と予見情報の不確かさの関係を調べ、予見情報の不確かさに含まれるパワーが性能改善の重要な指標になることを明らかにした。

ここに導かれた結果は、系の記述に対応する作用素 Riccati 方程式の解析解により与えたものであり、さらにさまざまな予見不確かさを想定した制御法を導くことができる。これらの結果から、予見不確かさの存在を前提とした制御系の構成法を導き、実際的な設計問題により手法の特徴を明らかにすることが、今後の課題である。

謝辞 本研究の一部は、JST CREST および科学研究費補助金 (C) 26420423 により行なわれた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) K. Hashikura: H^2/H^∞ controller design for input-delay and preview systems based on state decomposition approach, Doctoral dissertation, Tokyo Metropolitan University (2014)
- 2) 早勢, 市川: 目標値の未来値を最適に利用する追値制御, 計測自動制御学会論文集, **5-1**, 86/94 (1969)
- 3) A. Kojima and S. Ishijima: H^∞ performance of preview control systems, Automatica, **39-4**, 693/701 (2003)
- 4) A. Kojima and S. Ishijima: H^∞ preview tracking in output feedback setting, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **14-7**, 627/641 (2004)
- 5) A. Kojima and S. Ishijima: Formulas on preview and delayed H^∞ control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-51-12**, 1920/1937 (2006)
- 6) A. Kojima and K. Yokoyama: H^2 performance on multiple preview compensation and initial state setting, 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 1687/1693 (2010)
- 7) L. Mirkin: On the H^∞ fixed-lag smoothing: How to exploit the information preview, Automatica, **39-8**, 1495/1504 (2003)
- 8) A.A. Moelja and G. Meinsma: H^2 control of preview systems, Automatica, **42-4**, 945/952 (2006)
- 9) G. Tadmor and L. Mirkin: H^∞ control and estimation with preview—Part I: Matrix ARE solutions in continu-

- ous time, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-50-1**, 19/28 (2005)
- 10) M. Tomizuka: Optimal continuous finite preview problem, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20-3**, 362/365 (1975)
 - 11) A. Kojima: H^∞ controller design for preview and delayed systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-60-2**, 404/419 (2015)
 - 12) A.J. Pritchard and D. Salamon: The linear-quadratic control problem for retarded systems with delays in control and observation, IMA J. Math. Contr. Inform., 2, 335/361 (1985)
 - 13) A.J. Pritchard and D. Salamon: The linear quadratic control problem for infinite dimensional systems with unbounded input and output operators, SIAM J. Control and Optimization, **25-1**, 121/144 (1987)
 - 14) B. van Keulen: H^∞ -control for distributed parameter systems: A state-space approach, Birkhäuser (1993)
 - 15) R.F. Curtain and H. Zwart: An introduction to infinite-dimensional linear systems theory, Chapter 2, Springer (1995)
 - 16) 日本数学会 (編): 数学辞典第 4 版, 項目 230.E, 685, 岩波書店 (2007)
 - 17) P. Gahinet: On the game Riccati equations arising in H_∞ control problems, SIAM J. Control and Optimization, **32-3**, 635/647 (1994)

=====

[著 者 紹 介]

児 島 晃 (正会員)

1991 年早稲田大学大学院理工学研究科博士後期課程修了。同年、東京都立科学技術大学講師。97 年同助教授。2004 年首都大学東京教授となり、現在に至る。2000~2001 年、スイス連邦工科大学 (ETH) 自動制御研究所客員研究員。予見制御・モデル予測制御とその応用、ロバスト制御、むだ時間系・分布系の制御法に関する研究に従事。工学博士。Automatica, IET J. Control Theory and Applications の Associate Editor。IEEE, システム制御情報学会, 日本鉄鋼協会, 電気学会の会員。

端 倉 弘太郎 (正会員)

2006 年九州工業大学工学部機械知能工学科卒業。2010 年京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻修士課程修了。2014 年首都大学東京大学院システムデザイン研究科博士後期課程修了。同年、首都大学東京システムデザイン研究科特任助教。予見・予測制御理論とその応用に関する研究に従事。IEEE, システム制御情報学会の会員。

=====