フィードバックシステムにおける消散性能の強化

浦田 賢 吾^{*,**}・井上 正 樹^{*,**}

Dissipative Reinforcement in Feedback Systems

Kengo URATA^{*,**} and Masaki INOUE^{*,**}

We propose a class of dynamical systems that enables us to quantitatively evaluate dissipation performance in addition to expressing qualitative dissipative properties. Assuming that two subsystems belong to the proposed class, we show that the dissipation performance is strictly improved via feedback connection. We construct a larger-scale system via recursive feedback connection of the dissipate subsystems. Then, the performance of the entire network system is gradually reinforced with the increase of the number of subsystems. Ultimately, the output of the system cannot be driven by any disturbance input.

Key Words: dissipativity, passivity, feedback system

1. はじめに

近年、膨大な数のサブシステムが相互結合された大規模ネットワークシステムを扱う場面が増えてきている。たとえば、自然エネルギーを大量導入した電力系統や、多数の細胞や遺伝子からなる生体分子系がその例として挙げられる。特に電力系統では、自然エネルギーは目標とする量が一度に電力系統に導入されるわけではなく、段階的に導入されることが想定される。そのため、電力系統は、構成する要素数が段階的に増加しその規模が拡大していくことになる。また、自然エネルギーは不確実であるためそれ自身が外乱として振舞うと見なされる。そのため、従来の電力系統では考慮されない大きな外乱の影響下で、電力系統の周波数を一定の値に維持しなければならない。このことから、ネットワークが拡大するなどの段階でも、安定でかつ十分な外乱抑制性能をもったネットワークシステムの設計方針が必要となる。

大規模ネットワークシステムを安定化する方策として、各サブシステムでの観測値と各サブシステムへの入力のみからネットワークシステム全体の振舞いを制御する分散制御が古くから研究されている^{1)~3)}。たとえば、文献3)では、拡大を想定したネットワークシステム全体の安定性を保証する設計方針となっている。また、受動性を利用したネットワークシステムの設計方針も提案されている^{4),5)}。受動定理⁶⁾とし

て知られるように、受動的なサブシステム同士をネガティブフィードバック接続したとき、構成されたフィードバックシステムの安定性と受動性は保存される。この性質を利用することで、ネットワークシステム全体の安定性を保証することができる。しかしながら、文献1)~5)のどの設計方針においても、保証されるのは定性的な安定性のみで、定量的な制御性能の議論はできていない。そこで、本研究では、定量的な制御性能まで考慮した設計方針を目的とする。特に、規模が拡大することで、制御性能が“厳密に向上していく”ネットワークシステムの実現を目指す。

本論文では、まず最も基本的な問題として、二つのサブシステムから構成されるフィードバックシステムを考える。サブシステムを受動性よりも狭い特別な消散性^{7),8)}のクラスとして与える。そして、二つのサブシステムをフィードバック接続することで、消散性能が厳密に向上することを示す。消散性能は $\mathcal{H}_\infty$ ノルムで測る。つぎに、提案したサブシステムのクラスとネットワークの規模の関係を明らかにする。解析の容易さから、ネットワーク構造として、フィードバック接続が再帰的に繰り返されるという特別な構造を考える。その特別な構造を有するネットワークシステムは、規模によらず同じクラスの消散性を有すること、そして規模の拡大によってその消散性能が向上することを示す。さらに、拡大し続けることにより究極的には、システム全体は完全な消散性能を得る、すなわち、どんな外乱を印加してもそのシステムの出力に影響されないことを示す。最後に、数値例によって、ネットワークシステムの消散性能が規模の拡大によって向上していくことを確認する。

表記：記号 $A \otimes B$ は行列 A, B のクロネッカー積を表わし、記号 $\sigma\{M\}$ は行列 M の最大特異値を表わす。また、伝達関数 $\Sigma(s)$ で記述される線形時不変システム Σ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルム

* 慶應義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

** (独) 科学技術振興機構, CREST 川口市本町 4-1-8

* Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

** Japan Science and Technology Agency (JST), CREST, 4-1-8 Honcho, Kawaguchi

(Received February 25, 2016)

(Revised April 17, 2016)

Fig. 1 Feedback system Σ_{FB}

$\|\Sigma\|_{\mathcal{H}_\infty}$ は

$$\|\Sigma\|_{\mathcal{H}_\infty} := \sup_{\operatorname{Re}[s] > 0} \sigma\{\Sigma(s)\}$$

で定義される.

2. フィードバックシステムの表現と消散性の定義

フィードバックシステムを構成する各サブシステム $\Sigma_i, i \in \{1, 2\}$ を

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i^\top x_i + D_i u_i \end{cases} \quad (1)$$

の状態方程式で記述する. ただし, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}, y_i \in \mathbb{R}$ はそれぞれ各サブシステムの状態, 入力, 出力を表わす. また, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, B_i \in \mathbb{R}^{n_i}, C_i \in \mathbb{R}^{n_i}, D_i \in \mathbb{R}$ はそれぞれ定係数行列, 定係数を表わす. さらに, A_i は安定行列, (A_i, B_i) は可制御, (A_i, C_i) は可観測とする. 各サブシステムについて, u_i から y_i までの伝達関数を

$$\Sigma_i(s) := C_i^\top (sI_{n_i} - A_i)^{-1} B_i + D_i$$

で記述する. 本論文では, 記述を簡単にするため単入出力システムを考えるが, 入出力数が等しい多入出力システムでの議論に容易に拡張できる.

Fig. 1(a) のように二つのサブシステムをネガティブフィードバックで接続させる. このことは,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Ew - L_{FB} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

のように記述できる. ここで, $w \in \mathbb{R}$ はフィードバックシステムへの外部入力, $E \in \mathbb{R}^2$ は w からフィードバックシステムへの影響を表わす定数行列, $L_{FB} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は

$$L_{FB} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

である. 以下では特に,

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

として, w はサブシステム Σ_1 にのみに印加されるものとする. また, 二つのサブシステム Σ_i と接続 (2) から構成されるフィードバックシステムにおいて,

$$z = E^\top \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

として制御出力 $z \in \mathbb{R}$ を定義する. このとき, w から z までのフィードバックシステムを Σ_{FB} と記述する. この Σ_{FB} は Fig. 1(b) のブロック線図としても記述される. また, Σ_{FB} が Well-posed である, すなわち, 状態空間表現やプロパー伝達関数表現が可能であるとき, その伝達関数を $\Sigma_{FB}(s)$ とする.

つぎに, 消散性^{7), 8)}の定義を行なう. そのために行列 $\Pi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ として, スカラ関数

$$s(\Pi, u_i, y_i) := \begin{bmatrix} u_i \\ y_i \end{bmatrix}^\top \Pi \begin{bmatrix} u_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

を導入する.

【定義】 連続微分可能な正定値関数 $V_i(x_i) : \mathbb{R}^{n_i} \mapsto \mathbb{R}_+$ が存在して,

$$\dot{V}_i(x_i) := \frac{\partial V_i(x_i)}{\partial x_i} (A_i x_i + B_i u_i) \leq s(\Pi, u_i, y_i) \quad (4)$$

がすべての $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}$ と Σ_i に従う y_i に対して成り立つとき, Σ_i は Π に関して消散的であるという.

文献 7), 8) の消散性の定義では, s として二次形式に限らない一般的な関数を考えている. 本論文では, Σ_i は線形なクラスを考えているため, (3) の形に限定して議論を行なう. ここで, Π として

$$\Pi := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考えよう. この Π に対して消散的なシステムは, 受動的であるともいう^{7), 8)}. 受動定理として知られるように, 受動的なシステム同士をネガティブフィードバック接続したシステムも受動的である. ただし, 受動定理はフィードバックシステムの受動性という定性的な性質に言及するのみである. 本論文では, システムの定性的な性質だけでなく, 定量的な性能まで考える. そのために, Π の中にパラメータ a, b を導入し,

$$\Pi(a, b) := \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & -b \end{bmatrix} \quad (5)$$

の行列に対する消散性を考える. 特に, 本論文で目的としているフィードバック接続によって性能を向上させるクラスの候補として, a, b を正数とした $\Pi(a, b)$ を考える. この制限によって受動性よりも狭めたクラスを考えることになる. 以下では, つぎの表記を用いる.

表記: 記号 $\mathcal{D}(a, b)$ は $\Pi(a, b)$ に関して消散的なシステムの集合を表わす.

$\mathcal{D}(a, b)$ と従来の受動性の比較は後で与える. 以下では, サブシステムのクラスとして, $\mathcal{D}(a, b)$ を考える. このとき,

Fig. 2 Nyquist plot of the subsystem $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ Fig. 3 Nyquist plots of passive systems. The gray and oblique lined regions show the existence domain of the Nyquist plots of $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, 0)$ and $\Sigma_i \in \mathcal{D}(0, b)$, respectively

$\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ についてつぎの補題が成り立つ.

[補題 1] $ab \leq 1$ を満たす正数 a, b について, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ であるならば, $\Sigma_i(s)$ に対して,

$$b\Sigma_i^*(j\omega)\Sigma_i(j\omega) - (\Sigma_i^*(j\omega) + \Sigma_i(j\omega)) + a \leq 0 \quad (6)$$

がすべての $\omega \in \mathbb{R}$ で成り立つ.

補題 1 は消散性の定義で与えられた (4) にパーセバルの定理⁸⁾を適用することで得られる.

補題 1 は $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ の周波数領域での意味付けを与えている. (6) より $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ のナイキスト軌跡は, Fig. 2 に示すように中心 $(\alpha(a, b), 0)$, 半径 $r(a, b)$ の円内に存在する. ただし,

$$\alpha(a, b) := \frac{1}{b}$$

$$r(a, b) := \frac{\sqrt{1-ab}}{b}$$

である. この事実から, さらに, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを見積もることができる.

[補題 2] $ab \leq 1$ を満たす正数 a, b について, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは

$$\|\Sigma_i\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma(a, b) \quad (7)$$

を満たす. ただし,

$$\gamma(a, b) := \frac{1 + \sqrt{1-ab}}{b} \quad (8)$$

である.

補題 2 では, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの上界を与えている. 本論文では, この上界の意味でシステムの消散性能を測ることにする.

もう少し $\mathcal{D}(a, b)$ のクラスについて考えよう. そのために, つぎの注意で受動性⁸⁾との比較を与える.

(注意 1) 正数 a, b とする. このとき, $\mathcal{D}(a, 0)$ は入力強受動性⁸⁾のクラスとなる. また, $\mathcal{D}(0, b)$ は出力強受動性⁸⁾のクラスとなる. $\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{D}(a, 0)$ かつ $\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{D}(0, b)$ であることから, 本論文で扱う消散性のクラス $\mathcal{D}(a, b)$ は二つの受動性のサブクラスであるといえる. ここで, 入力強受動や出力強受動であるシステムのナイキスト軌跡の存在領域を Fig. 3 に示す. 図では, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, 0)$ と $\Sigma_i \in \mathcal{D}(0, b)$ のナイキスト軌跡がそれぞれ灰色で示された領域と斜線で示された領域内に存在することを意味している. Fig. 2 で示した $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ の存在する領域と比較することで, 周波数領域でも $\mathcal{D}(a, b)$ は二つの受動性のサブクラスであると解釈できる.

(注意 2) 受動性にパラメータを導入し, 定量的な評価まで可能とする定義はこれまでにされてきた^{9), 10)}. たとえば, 文献 9) では, 一つのパラメータ γ を導入した γ -受動性が定義されている. 文献 9) の γ に対して, 本論文で $a = b = (1 - \gamma^2)/(1 + \gamma^2)$ と選ぶことで, $\mathcal{D}(a, b)$ は γ -受動性と等価となる. また, 文献 10) では, 入力フィードフォワード出力フィードバック受動性 (input feed-forward output-feedback passive: IF-OFP) が定義されている. 文献 10) の定義によると, 本論文で $\mathcal{D}(a, b)$ に属するシステムは, $\nu = a/2, \rho = b/2$ に対して, IF-OFP となる.

1 章で述べたように, 受動的な二つのサブシステムをネガティブフィードバック接続したとき, そのフィードバックシステムの安定性や受動性が保存されることが受動定理⁶⁾として知られている. また, 本論文で提案するクラス $\mathcal{D}(a, b)$ は, 受動性のさらに特別なサブクラスであることを注意 1 で示した. そして, 補題 2 から, $\mathcal{D}(a, b)$ は定量的な性能評価を行なえることを示した. 先に述べたように, さらに, $\mathcal{D}(a, b)$ に属する二つのサブシステムから構成されるフィードバックシステムは安定性を保証するだけでなく, 何らかの意味で制御性能が向上されると期待できる. そのため, つぎの 3 章でフィードバックシステムの制御性能がどのように変化するか調べることにする.

3. 主結果: フィードバック接続による消散性の強化

本章では, サブシステム $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ と接続 (2) によってフィードバックシステム Σ_{FB} を構成する. このとき, Σ_{FB} の消散性能が接続前の Σ_1 よりも厳密に向上することを示す.

Σ_{FB} の消散性についてつぎの定理が成り立つ.

《定理 1》 $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b), i \in \{1, 2\}$ であるならば, $\Sigma_{FB} \in \mathcal{D}(a_{FB}, b_{FB})$ である. ただし, a_{FB}, b_{FB} について,

$$a_{\text{FB}} = \frac{ab}{a+b} \quad (9)$$

$$b_{\text{FB}} = a+b \quad (10)$$

と $a_{\text{FB}}b_{\text{FB}} = ab$ が成り立つ。

(証明) まず, 注意 1 で述べたように $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ は入力強受動的である。そのため, Σ_{FB} は Well-posed であることがいえる。

つぎに, $\Sigma_{\text{FB}} \in \mathcal{D}(a_{\text{FB}}, b_{\text{FB}})$ であることを示す。 $x := [x_1^\top, x_2^\top]^\top$ として, 関数 $V_i(x_i), i \in \{1, 2\}$ から関数 $V(x)$ を

$$V(x) := \sum_{i=1}^2 V_i(x_i)$$

として構成する。この関数は微分可能かつ正定値関数であることがいえる。 Σ_i が満たす消散性 (4) と接続 (2) より, 関数 $V(x)$ に関して

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \begin{bmatrix} w - y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}^\top \Pi(a, b) \begin{bmatrix} w - y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^\top \Pi(a, b) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w \\ z \\ y_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -a & 1 & a \\ 1 & -a-b & 0 \\ a & 0 & -a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

の不等式を得る。さらに, (11) の右辺に対し, y_2 について平方完成を行なうことで,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}^\top \Pi(a_{\text{FB}}, b_{\text{FB}}) \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

の不等式が得られる。これは $\Sigma_{\text{FB}} \in \mathcal{D}(a_{\text{FB}}, b_{\text{FB}})$ であることを意味する。 $\square$

定理 1 では, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ であるとき, 構成されたフィードバックシステムも消散的であることを保証している。さらに, Σ_i は可観測であると仮定している。このとき, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b), i \in \{1, 2\}$ ならば出力強受動^{7), 8)}でもあるため, Σ_i の零入力系は原点が漸近安定である。したがって, 受動定理と同じように, Σ_{FB} についても, 零入力系の原点は漸近安定であるといえる。

また, 補題 2 で与えたように, フィードバックシステムの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは

$$\|\Sigma_{\text{FB}}\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma(a_{\text{FB}}, b_{\text{FB}}) \quad (12)$$

を満たす。この不等式から Σ_{FB} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの値を見積もることができる。さらに, Σ_{FB} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの上界は接続前の Σ_1 のものよりも小さくなることが保証される。これを以下の系 1 にまとめる。

[系 1] 定理 1 の条件のもとでは,

$$\gamma(a_{\text{FB}}, b_{\text{FB}}) < \gamma(a, b) \quad (13)$$

が成り立つ。

(証明) まず, (10) から $b_{\text{FB}} > b$ が成り立つ。さらに, $a_{\text{FB}}b_{\text{FB}} = ab$ が成り立つため, (8) を $(a_{\text{FB}}, b_{\text{FB}})$ と (a, b) の組にそれぞれ適用することで系 1 を示すことができる。 $\square$

系 1 では, Σ_{FB} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが Σ_1 のものよりも上界の意味で厳密に小さいことを示している。さらに, いくつかの場合においては実際の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが小さくなることも証明できる。たとえば, 定常ゲインが $\mathcal{H}_\infty$ ノルムと一致するような $\Sigma_i, i \in \{1, 2\}$ を考えると, (12) の不等式が等式になることがわかっている。系 1 では, このようなシステムに対しては接続により性能が厳密に向上することがいえる。

本章の最後に, ネットワークシステムの分散設計への展開を述べる。ところで, 受動定理では, 受動的な二つのサブシステムから構成されるフィードバックシステムにおいて, 受動性と安定性が保証される。文献 4), 5) では, この事実を利用して全体での安定性を保証するネットワークシステムの分散設計を考えている。それに比べて, 定理 1 と系 1 では, $\mathcal{D}(a, b)$ に属する二つのサブシステムから構成されるフィードバックシステムにおいて, その安定性を保証するだけでなく制御性能を厳密に向上することも保証している。そのため, 本章での理論をネットワークシステムに展開することで, 制御性能まで考慮した分散設計方針が期待できる。

4. 再帰フィードバック接続による消散性の強化

前章では, 二つの $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ をフィードバック接続することで, Σ_{FB} の消散性能が向上されることがわかった。本章では, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a, b)$ のサブシステムの個数をさらに増やし, ネットワークシステムへと拡張する。このとき, 特に, ネットワークシステム全体の消散性能と規模の関係を明らかにすることを目的とする。解析を容易にするため, 以下では, ある特別なネットワーク構造のみを考えることにする。

$\Sigma_{\text{FB}} \in \mathcal{D}(a_{K-1}, b_{K-1})$ を二つ用意して, これらをさらにフィードバック接続することを考えよう。ただし, a_{K-1}, b_{K-1} は $a_{K-1}b_{K-1} \leq 1$ である正数である。添字の K の意味は後ほど述べる。このとき, 構成したフィードバックシステム Σ_{FB}' は定理 1 の証明と同様の計算を繰り返すことで $\mathcal{D}(a_K, b_K)$ に属することが示される。ただし,

$$a_K = \frac{a_{K-1}b_{K-1}}{a_{K-1} + b_{K-1}} \quad (14)$$

$$b_K = a_{K-1} + b_{K-1} \quad (15)$$

Fig. 4 Expansion of the network system via a recursive negative feedback connection

である。(14), (15) の形を見ると, (9), (10) とまったく同じ形となっている。そのため, フィードバック接続を繰り返すことにより構成したネットワークシステムの消散性の変化は(14), (15)の漸化式で特徴付けられる。そして, それらの漸化式から, サブシステムの数に依存したネットワークシステムの消散性能の見積もりが可能となる。本章では, ネットワーク構造として再帰的なフィードバック接続構造を考える。そして, 構成したネットワークシステムにおいて, 規模を表わす接続回数と消散性能の関係を明らかにする。

はじめに, Fig. 4 に示すように再帰的にフィードバック接続したネットワークシステムの定義を行なう。Fig. 4 のように, まず, Σ_1, Σ_2 をネガティブフィードバック接続し, フィードバックシステム Σ_{12} を構成する。つぎに, Σ_{12} とは別に, Σ_3, Σ_4 からなるフィードバックシステム Σ_{34} を構成する。さらに, Σ_{12} と Σ_{34} のフィードバックシステム Σ_{1234} を構成する。このようにして, $\Sigma_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ を K 回繰り返しフィードバック接続を行ないネットワークシステムを構成する。このとき, サブシステムの個数 N とフィードバック接続回数 K には, $N = 2^K$ の関係が成り立つ。

$u := [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \in \mathbb{R}^N, y := [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \in \mathbb{R}^N$ とする。このとき, 上記の規則でネットワークシステムを構成することは,

$$u = Fw - L_K y \quad (16)$$

のように記述することができる。ただし, $F \in \mathbb{R}^N$ は w から各サブシステムへの影響を表わす行列, $L_K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ はサブシステム間の接続を表わす行列で,

$$L_K := \begin{cases} L_{FB}, & K = 1 \\ L_{K-1} \otimes I_2 + L_{FB} \otimes FF^T, & K \geq 2 \end{cases}$$

である。以下では特に,

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

として, 2 章同様に w はサブシステム Σ_1 のみに印加されるものとする。さらに, N 個のサブシステム Σ_i と接続 (16) から構成したネットワークシステムにおいて,

$$z = F^T y$$

として制御出力 $z \in \mathbb{R}^m$ を定義する。このとき, ネットワークシステム全体を Σ_{NW} で, そして, その w から z までの伝達関数を $\Sigma_{NW}(s)$ で記述する。また, Σ_{NW} は, Fig. 1(b) において $E = F, L_{FB} = L_K, \Sigma_1, \Sigma_2$ を $\Sigma_1 \dots \Sigma_N$ で置き換えたことに相当する。

つぎに, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a_0, b_0)$ と接続 (16) よりネットワークシステム Σ_{NW} を構成する。ただし, 正数 a_0, b_0 は $a_0 b_0 \leq 1$ を満たす。このとき, Σ_{NW} の消散性は (14), (15) で特徴付けられていることに注意すると, ナイキスト軌跡は, たとえば, つぎの中心 α_K , 半径 r_K に包含される。

$$\alpha_K = \frac{1}{b_K} = \frac{1}{a_{K-1} + b_{K-1}} \quad (17)$$

$$r_K = \frac{\sqrt{1 - a_K b_K}}{b_K} = \frac{\sqrt{1 - a_{K-1} b_{K-1}}}{a_{K-1} + b_{K-1}} \quad (18)$$

この漸化式を解くことで, 接続回数 K の増加に伴って円の中心と半径がどのように遷移していくか示すことができる。さらに, その遷移を利用して消散性能が規模の拡大に伴ってどのように変化していくか見積もることができる。その準備として, まず Σ_{NW} の消散性を特徴付ける a_K, b_K についてつぎの補題を与えよう。

[補題 3] $a_0 b_0 \leq 1$ を満たす正数 a_0, b_0 に対して, $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a_0, b_0), i \in \{1, 2, \dots, N\}$ であるとする。このとき, 任意の $K \geq 1$ について, $\Sigma_{NW} \in \mathcal{D}(a_K, b_K)$ である。ただし, a_K, b_K は

$$0 < a_K \leq \frac{\sqrt{a_0 b_0}}{\sqrt{2(K+1)}} \quad (19)$$

$$b_K \geq \sqrt{2(K+1)a_0 b_0} \quad (20)$$

と $a_K b_K = a_0 b_0$ を満たす。

(証明) まず, Σ_i は入力強受動的であり, Σ_{NW} が再帰的にフィードバック接続される構造であることから, 定理 1 と同様に, Σ_{NW} は Well-posed であることがいえる。

つぎに, $\Sigma_{NW} \in \mathcal{D}(a_K, b_K)$ を示す。まず, 本章のはじめに述べたように, a_K, b_K は (14), (15) の漸化式を満たす。さらに, $a_K b_K = a_0 b_0 \leq 1$ が成り立つ。そのため, $\varepsilon := a_0 b_0, 0 < \varepsilon \leq 1$ とおくと, (14), (15) は

$$a_K = \frac{\varepsilon}{a_{K-1} + b_{K-1}} \quad (21)$$

$$b_K = b_{K-1} + \frac{\varepsilon}{b_{K-1}} \quad (22)$$

となる。ここで, 関数 $g(x)$ を

$$g(x) := x + \frac{\varepsilon}{x}$$

として定義する。関数 $g(x)$ の導関数は $g'(x) = 1 - \varepsilon/x^2$ となることから, $x > \sqrt{\varepsilon}$ の範囲では $g(x)$ は狭義単調増加であることがわかる。関数 $g(x)$ を用いて (22) は

$$b_K = g(b_{K-1})$$

と記述することができる。

以上の準備のもとで、任意の $K \geq 1$ について (19), (20) が成り立つことを示す。

はじめに、(22) から (20) の導出を行なう。まず、 $K = 1$ の場合を考える。 $K = 1$ のとき、相加・相乗平均より

$$b_1 = a_0 + b_0 \geq 2\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{2(1+1)\varepsilon}$$

が成り立つ。そのため、 $K = 1$ で (20) が示される。

つぎに、ある $K \geq 1$ で $b_K \geq \sqrt{2(K+1)\varepsilon}$ が成り立つと仮定して、 $b_{K+1} \geq \sqrt{2(K+2)\varepsilon}$ を示す。仮定のもとでは、 $g(x)$ の単調性から $b_{K+1} = g(b_K) \geq g(\sqrt{2(K+1)\varepsilon})$ が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned} & g(\sqrt{2(K+1)\varepsilon}) - \sqrt{2(K+2)\varepsilon} \\ &= \frac{\sqrt{(2(K+1)\varepsilon + \varepsilon)^2} - \sqrt{4\varepsilon^2(K+1)(K+2)}}{\sqrt{2(K+1)\varepsilon}} > 0 \end{aligned}$$

が成り立つことを確認できるため、 $b_{K+1} > \sqrt{2(K+2)\varepsilon}$ である。したがって、(20) が導かれた。

最後に、(19) の導出を行なう。 b_K が (20) と $a_K b_K = \varepsilon$ を満たすことから、 $a_K > 0$ が成り立つ。さらに、(20) から、

$$a_K = \frac{\varepsilon}{a_{K-1} + b_{K-1}} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2(K+1)}}$$

が成り立つ。以上のことから、(19) が示された。 $\square$

この補題では、接続回数 K にらず Σ_{NW} の消散性能が保存されることを保証している。また、(19), (20) から、 a_K, b_K の上界や下界の見積もりを与えている。これによって、(17), (18) で記述される円の中心と半径はそれぞれ接続回数 K の増加に対して上界の意味で単調減少することがわかる。このことから、 Σ_{NW} の消散性能が規模の拡大に伴ってどのように変化するか見積もることができる。さらに、この補題から、 Σ_{NW} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムに関する性質を導ける。これを以下の定理にまとめる。

《定理 2》 $\Sigma_i \in \mathcal{D}(a_0, b_0), i \in \{1, 2, \dots, N\}$ と接続 (16) を考える。このとき、任意の $K \leq 1$ に対して

$$\|\Sigma_{NW}\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - a_0 b_0}}{\sqrt{2(K+1)a_0 b_0}} \quad (23)$$

が成り立つ。さらに、 $K \rightarrow \infty$ で $\|\Sigma_{NW}\|_{\mathcal{H}_\infty} \rightarrow 0$ が成り立つ。

(証明) まず、補題 2 で与えた (7) で与えられる $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの上界の見積もりを $\Sigma_{NW} \in \mathcal{D}(a_K, b_K)$ に適用することで、

$$\gamma(a_K, b_K) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - a_0 b_0}}{b_K} \quad (24)$$

が任意の $K \geq 1$ に対して成り立つ。さらに、(24) に (20) を適用することで (23) が導かれる。また、(23) から、 $\|\Sigma_{NW}\|_{\mathcal{H}_\infty} \rightarrow 0, K \rightarrow \infty$ が成り立つ。

(注意 3) 定理 2 では、 Σ_{NW} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが不等式 (23) で

Fig. 5 Nyquist plots of the subsystem $\Sigma_1(s)$ and the network system $\Sigma_{NW}(s)$. The dashed line and other solid lines show the Nyquist plots of Σ_1 and Σ_{NW} , respectively. The size of the plots is gradually decreasing and converges to the origin via network expansion, i.e., the increase of K

示すように接続回数 K に依存した上界で抑えられている。この不等式の上界は K に関して狭義単調減少する関数である。そのため不等式 (23) は、接続回数 K を増やし、ネットワークシステム Σ_{NW} の規模を拡大することによって、そのシステムの消散性能が向上することを表わしている。さらに、 $K \rightarrow \infty$ で Σ_{NW} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは 0 に収束することがいえる。これは、規模を拡大し続けた極限状態において、ネットワークシステムは完全な消散性能を得る、すなわち、どんな外乱でもその出力に伝播されないことを意味している。

本論文では、再帰フィードバック接続という非常に特別なネットワーク構造のみを考えている。この特別なネットワークに対して、サブシステムの個数と消散性能の関係を明らかにしている。より実用的なネットワーク構造に理論を拡張し、ネットワーク構築により自由度をもたせることは今後の課題である。この拡張の中で、本章の解析方法や考え方が参考になると期待している。

5. 数 値 例

本章では、 $\mathcal{D}(a_0, b_0)$ のクラスに属するシステムのみから構成されるネットワークシステムを考え、その規模を拡大することによって消散性能が向上していくことを例示する。

サブシステム Σ_i の伝達関数 $\Sigma_i(s)$ は

$$\Sigma_i(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

であるとする。このサブシステムは $\mathcal{D}(4/3, 2/3)$ に属することが確かめられる。そして、 Σ_i を $K = 1, 2, \dots$ 回と繰り返し、フィードバック接続することでネットワークシステム Σ_{NW} を構成する。このとき、Fig. 5 に $\Sigma_i(s)$ のナイキスト軌跡と $\Sigma_{NW}(s)$ のナイキスト軌跡をそれぞれ示す。ただし、Fig. 5 では、 $K = 1 \sim 5$ としたときのナイキスト軌跡を示している。図から、接続回数を増やす度に、ナイキスト軌跡の半径は減少し、中心は原点に近づいている。すなわち、 Σ_{NW} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが小さくなっていることが確認できる。これは、接続回数を増やすことによって、ネットワークシステム Σ_{NW}

の消散性能が向上できていることを表わしている。

6. おわりに

特別な消散性をもつ二つのサブシステムからフィードバックシステムを構成した。そのフィードバックシステムは接続により“厳密に消散性能が向上する”ことを示した。また、提案したサブシステムのクラスを利用して、ネットワークの規模によらず消散性を保証しつつ、規模の拡大によって消散性能を向上させていくネットワークシステムを考えた。そして、拡大し続けることによる極限状態では、完全な消散性能をもつことを証明し、また、数値例によってその現象を確認した。

本論文では、ネットワーク構造として、フィードバック接続という基本的な構造と、その再帰的な接続という非常に特別な構造のみしか考えられていない。それでも提案したサブシステムのクラスやネットワークの解析方法は、広く展開と応用が可能であると筆者らは考えている。

今後の課題は、より実用的なネットワーク接続規則のもとで、どのような消散性が得られるのか解析することである。そして、本論文と同じように、拡大によって制御性能が厳密に向上するネットワークの設計方策を提案したい。本論文で考えたクラス $\mathcal{D}(a, b)$ に属するシステムは直達項を有するシステムであり、これを満足する物理システムは少ないものと考えられる。補題 1, 2 で意味するように、 $\mathcal{D}(a, b)$ は全周波数帯域でシステムへの要求があるクラスであった。そこで、 $\mathcal{D}(a, b)$ の要求を有限周波数帯域のみに限定し本論文と同じ議論を行なうことを考える。これにより、実用的な有限周波数での性能評価や性能向上を実現しつつ、直達項をもたない現実的なシステムに対しても理論が適用できるようになる。このような理論の拡張は今後の課題である。最後に、研究の動機として例に挙げた電力系統への自然エネルギー大量導入の問題へ応用することも重要な課題である。

謝辞 本研究の一部は JST CREST, JSPS 科研費若手研究 (B) 26820163 の助成を受けたものです。

本論文での補題 3 で与えた消散性能の収束性は、慶應義塾大学の川口貴弘氏と吉田享平氏との議論の中で証明することができた。ここで、両氏に感謝致します。また、今後の課題で述べた有限周波数帯域への拡張は、東京工業大学の井村順一教授と石崎孝幸助教との議論の中で得た。ここで、両者に感謝致します。最後に、普段よりご指導いただいている慶應義塾大学の足立修一教授に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) S.-H. Wang and E. Davison: On the stabilization of decentralized control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **18**-5, 473/478 (1973)
- 2) T. Sadamoto, T. Ishizaki and J. Imura: Hierarchical distributed design of stabilizing controllers for an evolving network system, *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 928/934 (2014)
- 3) X.-L. Tan and M. Ikeda: Decentralized stabilization for expanding construction of large-scale systems, *IEEE Trans-*

actions on Automatic Control, **35**-6, 644/651 (1990)

- 4) M. Arcak and E. Sontag: A passivity-based stability criterion for a class of biochemical reaction networks, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **5**-1, 1/22 (2008)
- 5) H. Bai, M. Arcak and J. Wen: *Cooperative Control Design: A Systematic, Passivity-Based Approach*, Springer (2011)
- 6) G. Zames: On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **11**-2, 228/238 (1966)
- 7) J.C. Willems: Dissipative dynamical systems part I: General theory, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **45**-5, 321/351 (1972)
- 8) B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke and O. Egeland: *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*, Springer (2006)
- 9) N. Sakamoto and M. Suzuki: γ -passive system and its phase property and synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**-6, 859/865 (1996)
- 10) F. Zhu, M. Xia and P.J. Antsaklis: Passivity analysis and passivation of feedback systems using passivity indices, *Proceedings of the 2014 American Control Conference*, 1833/1838 (2014)

[著 者 紹 介]

浦 田 賢 吾 (学生会員)

2015 年慶應義塾大学理工学部物理情報工学科卒業。同年慶應義塾大学理工学研究科修士課程進学となり現在に至る。動的システムの安定論に関する研究に興味。

井 上 正 樹 (正会員)

2012 年大阪大学大学院工学研究科博士後期課程修了。同年科学技術振興機構 FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト研究員、東京工業大学大学院情報理工学研究科特別研究員。2014 年慶應義塾大学理工学部物理情報工学科助教となり現在に至る。2010~2011 年日本学術振興会特別研究員 (DC2)。博士 (工学)。動的システムの安定論に関する研究に従事。システム制御情報学会、IEEE の会員。