高度熟練技能における空間的特性の 曲率・捩率に基づく定量的解析法の構築

馬 渡 正 道*・土 屋 健 介**

Quantitative Analysis of Spatial Properties of Highly-skilled Handwork Based on Curvature and Torsion

Tadamichi MAWATARI* and Kensuke TSUCHIYA**

This study considers highly-skilled handwork in which skilled worker's motion is transferred to certain orbital paths on workpieces, and establishes an evaluation method of the quality of the handwork. For the handwork of which the requirements and evaluation criteria are not clearly specified, a methodology is introduced to compare individual's handwork with that of skilled worker. Then, taking into consideration that all pieces of information of the handwork are contained in the orbit in the space where the result of work is reflected, a comparison method based on orbits is introduced. Furthermore, being based on the view point of differential geometry that a three-dimensional orbit can be uniquely determined by curvature and torsion, a mathematical model is developed to evaluate degrees of spatial similarity of orbits by curvatures and torsions. This mathematical model then introduces "degree of distribution similarity", an index to quantitatively evaluate similarities of actual work. Then, this evaluation method is applied to shapes of characters of Japanese calligraphy to confirm the method's validity.

Key Words: highly-skilled handwork, motion capture system, curvature, torsion, mathematical model

1. 緒 言

今日の製造業の大きな課題である生産性向上、コストダウン、品質安定などの問題に対する解決策の一つとして、高度熟練技能の自動化へのニーズが急速に高まっている¹⁾。すでに自動化されている技術も数多くあるが、それらには、まず明確な作業指示が可能であり、つぎに作業結果を定量的に評価でき、さらに同じ作業を大量にこなす必要がある、という三つの条件を満たしているものばかりである。そうでないものは、いまだ熟練者の手作業に頼っているが、技術者の高齢化が進む一方で後継技術者の育成が進んでいない^{2),3)}。なぜならば、これらの手作業の多くには、以下の問題が共通しているためである。

- ・ 熟練技能そのものに関して、言語や記号による説明が少なく、定量的な明示もない。
- ・ 作業結果の形状特性についても言語や記号で説明がなく、

仮に説明があったとしても完成した形状の特定には定量的な明示がない。

- ・ 作業結果の幾何学的形状の良否は、あくまでも熟練技能者の目視と主観に依存している。

そこで本研究では、熟練技能に共通する上記の問題解決の第一歩として、作業結果に求められる要求を、作業結果が満たしているか否かを評価するための理論体系の構築を目的とする。これが達成された後、作業動作の良否を定量的に評価できれば、技術者の技能習得の効率化につながり、また、いわゆる模範演技のような作業動作を決定できれば、機械を用いた自動化実現に寄与すると考える。

著者らは先行研究⁴⁾で、高度熟練者技能に関する数理解析モデルを有界時間区間上の7次元軌道として構成し、その動的挙動の詳細な数理解析を可能とした。さらに個人差については、時間的摂動および空間的摂動に分けて解析するとの視点を明確にし、前者については同型変換という概念を、後者については受検作業束の標準作業束への埋め込み⁵⁾という概念を導入してそれらの体系的かつ定量的解析を可能とした。この数理モデルを活用するために、本研究では、熟練作業の結果が作業対象上に一種の軌道として構成されている、という場面に注目する。たとえば彫刻や左官のように、完成したものの形に刃物や鋺の軌道が転写される作業である。

本研究では、定量的な評価法のための理論体系作りについ

* 東京大学生産技術研究所 東京都目黒区駒場 4-6-1 De303

** 東京大学生産技術研究所 東京都目黒区駒場 4-6-1 Be409

* Project lecturer, University of Tokyo, De303 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo

** Associate professor, University of Tokyo, Be409 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo

(Received April 8, 2016)

(Revised October 8, 2016)

て、以下の二つの観点から取り組む。第 1 は、上記の高度熟練技能の主要な特性が、作業結果である軌道の幾何学的形状に現れること、第 2 は、空間上の幾何学的形状の特性は、その軌道を 3 次元 Frenet-Serret 公式の枠組みで表現した場合の曲率と捩率などを指標としてとらえられることである。

具体的には、先行研究における 7 次元軌道空間のうち位置に関する軌道を Frenet-Serret 公式の枠組みで再表現し、上記の指標を構築する。そして、高度熟練技能の具体例として書道における「字形」の場面⁶⁾を取り上げ、数理解析モデルを適用して、この解析法の有効性を検証する。

2. 対象とする作業の特性とその体系的解析

本研究は、多種多様な高度熟練技能のうち、作業ツールと作業対象（ワーク）との相対運動で表わされるものを対象とする。したがって、その作業は、作業ツールの位置と姿勢の 6 成分に作業対象との相互作用を表わすパラメータを加えた 7 次元軌道として捉えられる。作業の結果として、ワークには何らかの形でツールの軌道が反映されるため、作業結果の良し悪しはツールの軌道の良し悪しによって決まる。

したがって、全体の構成や部分の形状などさまざまな要件がこの軌道に要求されているといえる。しかし、それらは言葉や記号で明示されたものではないため、数回にわたる“熟練者の模範演技”のみによって提示されているものとする。このことを本研究では、「熟練者の作業は所与である」という。この条件下では、明示されていない要件が満たされているかどうかを、その作業が熟練者の模範演技に類似しているかどうかによって判定しなければならない。

後述するように、本研究では模範演技における軌跡を数学的に記述するが、その際の模範演技数回を一組にして「標準作業束」と呼ぶ。同様に、評価対象となる非熟練者の作業を「受検作業束」と呼ぶ。後述のとおり、両作業束を比較するために、熟練者、非熟練者とも同じ回数ずつ作業を行なうものとする。作業の情報は作業束に正確に反映されているため、熟練者および非熟練者の作業の特性もそれぞれの作業束に内包されている。これらについては、先行研究⁴⁾において、すでに詳細に検討されている。したがって、模範演技と非熟練者の作業を比較するには、「標準作業束」と「受検作業束」の類似度合いを定量化すればよい。ただし、ここではつぎの作業特性には注意が必要である。すなわち、対象としている高度熟練技能を実施する場合、そこで取り扱う試験片のサイズは種々さまざまであって規格化されていない上に、同一試験片においてもその技能を適用する位置も多様である。そのため、計測された数値に何らの工夫も施さないで直接的に比較しても意味がないということである。

本研究では、“3 次元空間曲線は、曲率および捩率によって決定される”との微分幾何学における知見に基づいて、標準作業束の 3 次元軌道について曲率および捩率を抽出することで、作業に要求される特性を定量化する。

一方、受検作業束からも曲率および捩率を抽出し、標準作

業束との類似度を表わすために、「標準作業束の曲率と捩率」に対する「受検作業束の曲率と捩率」の分布距離を計算する。両者の類似度を定量化したものが、非熟練者の作業の良否を評価する指標となる。

以下では、先行研究⁴⁾で構成された数理解析モデルの中で、高度熟練技能の動的挙動を軌道として捉えたが、その表現である空間曲線における曲率および捩率に関する一般的な数理解析モデルに必要な最低限の部分を要約した後、上記の作業に要求される特性に関する情報を定量化する方法を述べ、さらに本研究で使用する分布近似度の定義式を述べる。そして、これを書道における「字形」の場面に適用し、その有効性を検証する。

3. 数学的概念および記号の準備

3.1 先行研究からの概念および記号の準備

(1) ここで理論展開上の基礎とする数理解析対象物は、先行研究⁴⁾で構成した高度熟練技能に関する数理解析モデルである。1 回の作業におけるツールの動作はモーションキャプチャーによって、位置 (X, Y, Z) 、姿勢 $(Yaw, Pitch, Roll)$ 、および相互作用のパラメータ (P_d) の 7 成分からなる 7 次元動的挙動として計測される。この時点では時系列の離散データであるが、その後、wavelet による雑音除去^{7)~9)}、時間軸に関する同型変換⁴⁾、3 次スプライン関数の当てはめなどの作業を行なうことで、(1) 式における時間を独立変数とする滑らかな一つの連続軌道 $\Omega(t)$ として構成される。それは通常は多数回試行され、結果としてそれは同一の時間区間 $[t_a, t_d]$ 上の 7 次元関数空間 $\mathbf{C}^7[t_a, t_d]$ 内の要素として表現されている。

$$\begin{aligned}\Omega(t) &\equiv \begin{bmatrix} X(t), Y(t), Z(t), Yaw(t), \\ Pitch(t), Roll(t), P_d(t) \end{bmatrix}, \\ &\in \mathbf{C}[t_a, t_d] \times \mathbf{C}[t_a, t_d] \times \cdots \times \mathbf{C}[t_a, t_d], \quad (1) \\ &\equiv \mathbf{C}^7[t_a, t_d] \quad (\text{Product Space}).\end{aligned}$$

結果として、手作業にかかわる「時間的摂動」は解消され、当該被検者の「空間的摂動」は、連続軌道 $\Omega(t)$ の関数空間 $\mathbf{C}^7[t_a, t_d]$ 内における変動（バラツキ）として、数理的に厳密に取り扱うことが可能となっている。

上記の (1) 式における 7 次元ベクトル値連続関数 $\Omega(t)$ は、各試行の計測データ（以後、テイクデータという。）の識別番号を $k: 1 \leq k \leq n$ とするとき $\Omega^k(t)$ として表わし、テイクデータ k の「手動操作軌道」と呼ぶ。以上から、各テイクデータ k の手動操作軌道 $\Omega^k(t)$ は、同一の関数空間 $\mathbf{C}^7[t_a, t_d]$ における一点として表現することが可能となり、結果として $\mathbf{C}^7[t_a, t_d]$ は、各テイクデータの手動操作軌道の数理解析モデルにおける基礎空間として構成されたことになる。そして、考察中の一連の高度熟練技能は、先行研究⁵⁾で詳述したように、たとえそれが複数の区画から構成されていようとも、一本の軌道で表現されている。

(2) 本研究における 7 次元の手動操作軌道は、単に 7 成分

を一組にした 7 次元ベクトル空間内の一点を表わすものではなく、その点が空間内を動的に動き回り、幾何学的な 7 次元曲線を描くものであるため、時々刻々の動きの解析も重要である。したがって七つの成分のほか、それぞれの速度を加えた、計 14 成分を同時に考慮する必要がある。ベクトル空間内での軌跡の距離を求めるためにノルムを用いるが、上記を考慮して、次式で定義される Sobolev 型ノルム $\|\Omega\|^S$ を使用する。

$$\|\Omega\|^S \equiv \sum_{i=1}^7 \omega_i \|\Omega_i\| + \sum_{i=1}^7 \omega_{i+7} \left\| \frac{d}{dt} \Omega_i \right\| \quad (2)$$

ここで $\omega_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 7$ は (2) 式の計算における重みである。

なお、7 次元手動操作軌道 $\Omega(t) \in \mathbf{C}^7[t_a, t_b]$ に関する今後の記述において、必要に応じて位置に関する部分軌道に着眼する。

$$\Omega[1, 3](t) = (\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t)). \quad (3)$$

さらに、以下の式で表わされる n 個の 7 次元手動操作軌道の一組を、 n -7 次元手動操作軌道束という。

$$\mathfrak{R}(n) = \{\Omega^k(t) \in \mathbf{C}^7[t_a, t_d] : 1 \leq k \leq n\} \quad (4)$$

この軌道束は、被検者が n 回試行した作業全体を一組としてソボレフ関数空間 $\mathbf{C}^7[t_a, t_d]$ 内に変換したもので、有界時間区間上の力学系 (dynamical system) である。

(3) 多数回の試行の中から作業者の意図にもっとも近い作業を抽出する必要があるが、先行研究⁴⁾で詳細に検討したように、ここで取り扱っている軌道の性質より、 n -7 次元手動操作軌道束においては“平均との差異”を基礎とする通常の統計学的な概念、たとえば標準偏差、は使用できない。しかしながら、各軌道の空間的摂動について解析するためには、描画する軌道のバラツキの度合いを定量的に表現する指標が必要である。したがって、 n -7 次元手動操作軌道束における変動の解析を行なうのに適したほかの概念の導入が不可欠であり、ここでは Sobolev center の概念⁴⁾を使用する。

3.2 微分幾何学からの概念および記号の準備

本節の目的は三つある。第 1 は、本研究においては微分幾何学における曲線に関する多数の概念を使用するが、それらを本研究において使用する記号の下で、統一的に述べることである。これらは、一見、教科書的に見えるが、1 個ではなく記法の異なる数個の文献を参照する必要があるため、それらを本研究における記号の下で統一的に組み立てることは、本研究にとっては不可欠である。第 2 は、本研究において使用する数理モデルは、先行研究によって (1) 式の形態で構成され、かつそこで議論された性質をもつが、ここで使用する数学的諸概念がこの数理モデルにおいて安定的に定義できるかどうかについては、少なくとも 1 回は確認する必要がある、ここではそれも行う。第 3 は、本研究で対象としている複数個の概念については具体的な数値を実際に計算する必要がある。

ある。そのためにはしばしば相応の算法が必要となる。たとえば、数学における極限值によって定義された概念は、通常の市販のコンピュータを用いて、その定義どおりに計算しても精確な結果が出ないことは、数値解析の世界ではよく知られている。そのような場合には、別途、数値計算に適した表現もしくは算法を提示しなければならないが、本研究ではそれも確認する。

本節では 3.1 節 (2) で述べた位置に関する部分軌道 $\Omega[1, 3](t)$ を主たる対象とする。便宜上、今後この 3 次元軌道をつぎのような記号で表わす。

$$\mathbf{P}(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) \quad (5)$$

この軌道は $\mathbf{P}(t) \in C^3[t_a, t_d]$ であり、関数値の状態空間は 3 次元である空間曲線として、また、各成分関数は 3 次スプライン関数として、微分幾何における諸演算や概念を形式上、自由に適用できる。この空間曲線は時間 t を媒介変数としているが、理論展開を簡潔にするために、弧長を媒介変数とする空間曲線に関して議論を展開すると便利なことも多い。そのほか、たとえば空間曲線が直線であるなど、特殊な形状の場合、相応の取り扱いが必要となることがある。これらも含めて、文献 10)~12) に従い、必要事項を要約して以下に示す。

$t = t_0$ において対応する点 $\mathbf{P}_0$ から $t = t$ に対応する点 $\mathbf{P}$ までの弧の長さは次式で与えられる。

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt}} dt \quad (6)$$

このとき次式が成り立つ。

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{ds} = 1 \quad (7)$$

空間曲線の理論展開においては、(7) 式の好都合な関係のゆえに、これまで時間 t を媒介変数とする空間曲線 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ を、その出発時刻 $t = t_0$ における弧長を 0 とし、(6) 式より定まる弧長 s を媒介変数としてこの空間曲線を $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ 表記できる。(7) 式より、点 $\mathbf{P}(s)$ における微分 $d\mathbf{P}(s)/ds$ の長さは 1 である。以後、点 $\mathbf{P}(s)$ を通り、この微分を含む空間直線をこの点における接線という。

点 $\mathbf{P}(s)$ とそれに近い点 2 点 $\mathbf{P}(s+\delta)$, $\mathbf{P}(s+\varepsilon)$ をとり、これら 3 点を通る平面 $\Pi_{\delta, \varepsilon}$ を定め、この平面において $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの極限の平面 Π_0 をこの空間曲線の接触平面という。さらに、空間曲線 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ の上に点 $\mathbf{P}(s)$ とそれに近い点 $\mathbf{P}(s+ds)$ をとり、ベクトル $(d\mathbf{P}/ds)(s)$ とベクトル $(d\mathbf{P}/ds)(s+ds)$ のなす角を $d\theta$ とするとき、この方向の変化率：

$$\kappa(s) = \lim_{|ds| \rightarrow 0} \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (8)$$

を曲率、その逆数を曲率半径という。

(7) 式より次式が成り立つ。

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2} = 0 \quad (9)$$

Fig. 1 Directional relation between unit tangent vector, unit normal vector and unit binormal vector

したがって、接線方向 $\frac{d\mathbf{P}}{ds}$ と方向 $\frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2}$ とは直交する。接線方向と垂直な方向は法線方向と呼ぶが、さらに方向 $\frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2}$ は接触平面に含まれているので、 $\frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2}$ の示す方向を主法線方向と呼ぶ。この方向に関して次式が成り立つ。

$$\kappa(s) = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2}} \quad (10)$$

したがって、接線方向の単位ベクトル（これを単位接線ベクトルという。）を ξ_1 、主法線方向の単位ベクトル（これを単位主法線ベクトルという。）を ξ_2 とすると次式が成り立つ。

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \xi_1, \quad \frac{d^2\mathbf{P}}{ds^2} = \kappa \xi_2 \quad (11)$$

空間曲線 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ 上の 1 点 $\mathbf{P}(s)$ において、単位接線ベクトル ξ_1 、単位主法線ベクトル ξ_2 を定めた後、つぎのベクトル ξ_3 を定める。

$$\xi_3 = \xi_1 \times \xi_2 \quad (\xi_1 \text{ と } \xi_2 \text{ の外積}) \quad (12)$$

このとき、 ξ_3 は Fig. 1 に示すように、 ξ_1 および ξ_2 と直交し、その長さは 1 である。そして、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 の向きは X 、 Y 、 Z の正の向きと一致するように定める¹⁰⁾。ここで強調したいことは、座標系の向きであって、座標系そのものではないことである。したがって ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 は互いに直交する三つの単位ベクトルであり、その作る図形は X 軸、 Y 軸、 Z 軸の正の向きに作った図形と合同である。ベクトル ξ_3 の方向を従法線方向という。

さて、空間曲線 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ の上の 2 点 $\mathbf{P}(s)$ 、 $\mathbf{P}(s+ds)$ において、従法線を取り $\xi_3(s)$ 、 $\xi_3(s+ds)$ とし、これら二つの従法線のなす角を $d\varphi$ とする。この方向の変化率は次式で与えられる。

$$\tau(s) = \lim_{|ds| \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{ds} = \left| \xi_1, \xi_2, \frac{d\xi_2}{ds} \right| \quad (13)$$

ここに右辺は各ベクトルの成分を該当列の成分とする行列式である。(13) 式を点 $\mathbf{P}(s)$ における捩率という。

以上の概念に関して、つぎの定理 3.1～定理 3.3 が成り立つ。
定理 3.1：

三つのベクトル ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 および (8)、(13) 式の曲率 $\kappa(s)$ 、捩率 $\tau(s)$ に関してつぎの関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{ds} = & \kappa(s)\xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{ds} = & -\kappa(s)\xi_1 + \tau(s)\xi_3 \\ \frac{d\xi_3}{ds} = & -\tau(s)\xi_2 \end{cases} \quad (14)$$

証明 略

上記の関係式を Frenet-Serret の公式、座標系： $[\mathbf{P}, \xi_1, \xi_2, \xi_3]$ を Frenet-Serret の標構、2 ベクトルの組： (ξ_1, ξ_2) 、 (ξ_2, ξ_3) 、 (ξ_1, ξ_3) がそれぞれ定める三つの平面を、接触平面、法平面、展直平面という。さらに、曲線の主法線方向の、弧長に対する変化率を全曲率という。これはつぎの関係式で表わされる。

$$\text{全曲率} = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}. \quad (15)$$

定理 3.2：

曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ が弧長 s に関して同じ関数であるような二つの曲線は合同である。

証明 略

定理 3.3：

初期点 $\mathbf{P}(0)$ 、 $\xi_1(0)$ 、 $\xi_2(0)$ 、 $\xi_3(0)$ 、任意の弧長 s について曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ が与えられているとき、(14) 式の 3 元連立常微分方程式を解き、

$$\mathbf{P}(s) = \int_0^s \xi_1(s) ds + \mathbf{P}(0) \quad (16)$$

とおく。このとき空間曲線 $\mathbf{P}(s)$ は曲率を $\kappa(s)$ 、捩率を $\tau(s)$ とする空間曲線である。

証明 略

以上は、空間曲線論の理論展開において必要な概念や関係式の準備や確認であった。しかし、曲率や捩率の数値計算においては、上記の定義式は必ずしも有効とはいえず、それに適した別の表現式を提示する必要がある。目的とする数値情報の存在位置、算出式、および有効精度の解明についてはつぎの定理 3.4 が有用である。

定理 3.4：

(5) 式の空間曲線は時間 t を媒介変数とし、この定理では右辺のベクトルは縦ベクトルで考えるものとする。このとき、(10) 式の曲率 $\kappa(s)$ および (13) 式の捩率 $\tau(s)$ を時間 t を媒介変数とするものに変換して記号 $\kappa(t)$ および $\tau(t)$ で表わすとつぎの関係式が成り立つ。

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) \times \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{P}(t) \right\|}{\left\| \frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) \right\|^3}, \quad (17)$$

$$\tau(t) = \frac{\left| \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \quad \frac{d^2\mathbf{P}(t)}{dt^2} \quad \frac{d^3\mathbf{P}(t)}{dt^3} \right|}{\left\| \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{P}(t)}{dt^2} \right\|^2}. \quad (18)$$

ここで $\|\mathbf{P}\|$ はベクトル $\mathbf{P}$ の 2 次ノルム、 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ はベクトル $\mathbf{P}^1$ 、 $\mathbf{P}^2$ の外積、 $|\mathbf{P}^1 \mathbf{P}^2 \mathbf{P}^3|$ は三つの 1 次元縦ベクトル

ル $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$ を列ベクトルとする行列式である.

証明 略

曲率, 振率の数値計算においては, 確かに, (8), (13) 式よりは (17), (18) 式のほうが簡便である. しかし, ここでつぎの3点には注意が必要である. 第1は, (18) 式の分子において3階導関数が使われているが, この値は本研究の数値モデルが3次スプライン関数として構成されていたことを想起すると, 振率の値は節点上では不連続になるという不都合があることである. しかし, その不都合は (18) 式の分子における3階導関数を計算する点を節点以外にするという工夫で回避することができる. 第2は, (17), (18) 式の計算においては, 1階~3階導関数の計算が必要であるが, これらを当初からその定義に従って数値微分により計算するのは, 数値解析の知見から明らかなように, 高度の桁落ちの発生を避けられず, きわめて低精度となる可能性が高いことである. この不都合は, その算法ではなく, まずは各階について数式微分を, つぎに得られた各導関数の値を計算するという2段階の算法を適用することにより回避することができる. 第3は, 本節で述べた概念および数式は, その理論展開の過程で明らかなように, 関数値の状態空間が3次元である場合に限定されているということである. したがって4次元以上の状態空間の場合については, 新たに理論を構築しなおす必要があるが, それは今後の研究に委ねることとする.

4. 空間軌道における局所特性の体系的解析法と数理モデルの構築

4.1 曲率および振率による3次元軌道の特性表現

本節では, 前節で提示および確認した数学的概念および記号を用いて, 緒言で述べた諸問題への解決方法を提示する. すなわち, 高度熟練技能の作業結果を (1) 式の形式の7次元軌道として把握した場合, その局所的な特性を定量化して表現する. ただし, 上記の軌道は本来7次元で評価すべきだが, 実際上は解析が煩雑になって本質が見えづらくなるので, 相応の工夫が必要である. すなわち, 以下の二つの方法による工夫が必要である.

[方法-1]: 4次元以上の高次元ユークリッド空間における軌道を, 数式ではなく, 幾何学的対象物として考察する場合, その軌道を当該研究の目的に応じた複数個の3次元以下の低次元ユークリッド空間に“射影した空間”一式を総合して考察するのが常道である. 7次元の中から3次元を選ぶ選択法は, 全体で35通りあるが, 以後では, 視覚的に理解しやすい位置部分軌道の空間への射影に限定して, 曲率・振率による評価法を示す. 本研究では, 作業結果の幾何学形状の類似度の定量的評価を対象としているので, これで十分である.

[方法-2]: 3.2節の理論展開は3次元空間におけるものであったが, 方法-2は, これを7次元空間におけるものに変更すると同時に, (1) 式の数理モデルもそれと整合性をもつように再構成するものである. しかし, これに関する研究段階は, 現時点では, 実際の数値計算を実行できるまでに到達していない.

Fig. 2 Shape of character 'FU' 14)

今回の研究は上記の〔方法-1〕に基づく. その際の基本的着想は, 定理 3.2 に基づき, 対象としている軌道の曲率および振率の性質を局所特性の決定情報としてとらえ, それを有効利用することであり, また以下の (α)~(ε) にしたがう.

(α) (5) 式による軌道曲線について, 当初の表現形式は時間 t を媒介変数とする空間曲線 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ である. これは, (6) 式をはじめとして 3.2 節で述べた理論により, 弧長 s を媒介変数とした空間曲線の表記 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ に変換できる. 本研究では, 主として弧長を変数とする表現形式を使用する.

(β) 3次元位置軌道 (5) は, 定理 3.2 より, 曲率および振率によって決定される. したがって当該軌道に関する定性的特性および定量的特性は, まず, ①それらの内容も, ②それらの相違の度合いも, とともに軌道上の特定区間における曲率および振率によって表現できる.

(γ) 弧長を媒介変数とする曲率関数 $\kappa(s)$ および振率関数 $\tau(s)$ を求めると, 空間曲線の幾何学的形状はそれらの二つの関数によって決定される.

(δ) 軌道の単一局所部分よりなる部分 (たとえば, 後出の Fig. 7 における第1画) の特性は, その出発点 $(\kappa(s_a), \tau(s_a))$, およびその部分に応じて定まる弧長区間 $[s_a, s_b]$ 上の関数値の組 $(\kappa(s), \tau(s))$ の集合:

$$\mathbf{G}[s_a, s_b] = \{(\kappa(s), \tau(s)) : s_a \leq s \leq s_b\} \quad (19)$$

の幾何学的形状 (数値情報も含む) に関する特性として把握できる. (19) 式の対象物を, 「区間 $[s_a, s_b]$ 上の関数 $(\kappa(s), \tau(s))$ のグラフ」という. たとえば, Fig. 2 にあるように, 平仮名の“ふ”の第2画の特性は, その出発点から終了点に至る弧長区間 $[s_a, s_b]$ 上グラフの $\mathbf{G}[s_a, s_b]$ の幾何学的特性であると言ひ換えられる. 軌跡が多数に分割されている場合は, 部分軌跡ごとにこの考え方を適用する.

(ε) 複数の部分軌跡の配置によって全体の外形特性が定まる場合も, 軌跡全体として, 出発点 s_o から終了点 s_e までの弧長区間上の $\mathbf{G}[s_o, s_e]$ に対して上記 (δ) の考えを適用する. この場合, 描画される軌道の幾何学的形状の特性がどのようなものであっても, たとえば Fig. 2 にあるように, 「立ちすぎないように」, 「やや右上がりになる」, 「大体正三角形に書

く」など、定性的には指定されているが定量情報には何一つ与えられず、模範に対する類似性が判定し難い場合であっても、その特性は $\mathbf{G}[s_o, s_e]$ に含まれているので、「上記 (δ) の考えを $\mathbf{G}[s_o, s_e]$ 内の各区画に適用する」ことで類似性は十分に判定可能であり、それ以外に追加の操作は不要である。

4.2 軌道の類似度に関する評価指標

二つの軌道 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ があって、それらの軌道の類似度について議論するときは、両軌道の全体または対象としている軌道部分に対して、曲率および振率の分布距離を用いて考察する。そのために、二つの軌道 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ の曲率および振率をそれぞれ $\kappa(\mathbf{P}; s)$, $\tau(\mathbf{P}; s)$ $\kappa(\mathbf{Q}; s)$, $\tau(\mathbf{Q}; s)$ とするとき、「軌道 $\mathbf{P}$ の軌道 $\mathbf{Q}$ に対する類似度 $Sim(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ 」を次式によって定義する。

$$Sim(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{100}{N} \times \left\{ \left(1 - \frac{\|\kappa(\mathbf{P}, s) - \kappa(\mathbf{Q}, s)\|}{\|\kappa(\mathbf{Q}, s)\|} \right) + \left(1 - \frac{\|\tau(\mathbf{P}, s) - \tau(\mathbf{Q}, s)\|}{\|\tau(\mathbf{Q}, s)\|} \right) \right\}. \quad (20)$$

ただし、(20) 式の右辺における N は右辺の $\{\cdot\}$ 内の項数であり、 $\|\cdot\|$ は通常の 2 次ノルムを意味する。

ここで以下の点に注意する。

(1) $Sim(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ の値は 100 以下であり、値が 100 になるのは両軌道が合同になる場合に限られる。しかし、通常はそれらの軌道には必ず多少の差異があるため「類似度」として開区間 $(0, 100)$ 内の値をとることが期待される。もちろん一般には開区間 $(-\infty, 0)$ 内の値をとる場合も考えられるが、その場合には両軌道の類似度は極小であるといえる。

(2) 一組の関数値 $\kappa(\mathbf{P}; s)$, $\kappa(\mathbf{Q}; s)$ において両者の関数が複雑に振動している場合もしくは最大値と最小値の差が比較的大きい場合には、(20) 式による結果が直観に合わないものとなる場合がある。ほかの組の関数 $\tau(\mathbf{P}; s)$, $\tau(\mathbf{Q}; s)$ についても同様である。これは現在使われているほとんどのコンピュータが一定の有限桁計算を行なうという事情に起因している。すなわち、(17) 式および (18) 式の中にある各階の微分の計算を有限一定桁の数値微分で行なう場合、その際に多数桁の桁落ちを生じてしまうことがしばしばあり、その発生ごとに精度が激減することがあるからである。この現象は数値解析の世界では良く知られており、問題に応じて相応の対策が必要である。この悪影響を回避するために、本研究では p パーセンタイル (100pth percentile)¹³⁾ の概念を用いて上記の定義 (20) 式を次式 (21) のように部分変更して、類似度の定義式の感度を適度なものに調整する。

$$D_Sim(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{100}{N} \times \left\{ \left(1 - \frac{\|\kappa_rev(\mathbf{P}, s) - \kappa_rev(\mathbf{Q}, s)\|}{\|\kappa_rev(\mathbf{Q}, s)\|} \right) + \left(1 - \frac{\|\tau_rev(\mathbf{P}, s) - \tau_rev(\mathbf{Q}, s)\|}{\|\tau_rev(\mathbf{Q}, s)\|} \right) \right\}. \quad (21)$$

ただし、 $\kappa_rev(\mathbf{P}, s)$ は、つぎのように定める。

$$\kappa_rev(\mathbf{P}, s) = prctile(\kappa(\mathbf{P}, s), [0 : 1 : 100]). \quad (22)$$

ここで右辺は、 $p = 0, 1, \dots, 100$ としたときの $\kappa(\mathbf{P}, s)$ の p パーセンタイル全体の集合である。 $\tau_rev(\mathbf{P}, s)$ についても同様である。必要がある場合には、この 1 パーセント刻みをさらに細かくすることもできる。

本研究の対象場面における類似度の定義は、(21) 式に基づく。この妥当性については次章において検証する。なお、(21) 式の類似度を (20) 式のものと区別する必要がある場合には、これを「軌道 $\mathbf{P}$ の軌道 $\mathbf{Q}$ に対する分布類似度 $D_Sim(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ 」と呼ぶ。

5. 本研究の書道における「字形」への適用

5.1 書道における「字形」の概念と問題点

以上に述べた位置軌道に関する局所特性の解析法を書道の運筆活動における「字形」へ適用し、その有効性について検証する。字形とは、個々の文字の具体的な形の総称である。字形は、文字の外形（アウトライン）だけではなく、線の細太、字の大小、運筆活動のリズムからくるものなどがあり、それぞれに原則がある。しかし、字形に対する要求事項は、たとえば平仮名の「ふ」について Fig. 2 のように示されるが、この説明を書道の心得がない人が単純に目視しただけでは、自分が正確に実行できるほど理解することは困難である。しかし、先行研究⁴⁾でも詳述したように、書道における運筆活動の軌跡は、一見したところ 2 次元平面上のものに見えるけれども、実は緩急の動きのある 7 次元軌道であり、書家が Fig. 2 の説明を見ると、そのように解釈するのである。ここにおいて、高度熟練技能者としての書家と、非熟練技能者としての初心者との間に大きな相違がある。本研究では、書家の運筆活動を 7 次元軌道として捉えたものを 3 次元位置軌道空間に射影して、その幾何学的形状について検討する。そして、上記に述べた方法により、その軌道の曲率および振率によってその特性を定量的に評価することを試みる。ここでは、その結果をもって本研究における解析法の有効性を立証する。

5.2 字形の計測

本研究では、第 2 章の注意でも述べたように、高度熟練技能を適用する場合の試験片のサイズおよび適用位置は多様である状態を対象としている。本研究の実験用の設定場面は、一方は高度熟練者、他方は非熟練者とするそれぞれ 10 人ずつの 2 群の書道愛好者を被検者に選び、両方とも平仮名の「ふ」の文字を半紙上に書くものとし、これを各自が多数回（今回は 13 回ずつ）繰り返す。第 1 群の書家はその 13 回を半紙 (342 × 250) の右上 4 分の 1 の範囲に「ふ」の文字を描き、これを「標準作業束」とする。第 2 群の被験者は最初の書家の描画を手本としつつ、その 13 回を半紙の中央に大きく「ふ」の字を描き、「受検作業束」とする。本研究では、筆を剛体ツールとして扱い、さらに、筆は双鉤法でもつものとする。「標準作業束」の文字群は所与のものとし、本研究で対象とするすべての事項について、本研究の出発点として異議なく受け取られる事実や原理とする。したがって「受検作業束」の「標準作業束」に対する習熟度は、詳細は後述するが、前者の後

Fig. 3 (a) Motion capture markers attached to the brush, (b) coordinate system for motion data

者に対する類似度によって計測されることになる。

座標軸は、**Fig. 3(b)**に示すように、紙面に対して横方向をX軸、鉛直上方をY軸、縦方向をZ軸とする。上記の筆の動作は、3D モーションキャプチャシステムを用いて計測される。計測のために、筆には**Fig. 3(a)**のように、筆管のやや上部に6個、筆管の最下部に1個、計7個のマーカーを取り付け、それらを5台のハイスピードカメラ（OptiTrack社製、Flex13）で多方向から撮影し、3次元計測ソフトウェア（（株）ノビテック製、Venus 3D）で筆の位置および姿勢を高精度〔本研究では10進14桁〕に算出する。これらの計測値は、以降においてスプライン関数を構成する際に、節点上の関数値となる。これにより結果として構成された数理解析モデルは14桁の精度をもつことになる。計測のサンプリング周波数は120 Hz、本実験での計測範囲における空間分解能は0.5 mm程度である。そして、筆管が剛体であることを利用して、それらの実測値を筆管最下部のマーカー位置における測定値となるように移動する。

なお、筆圧は直接計測も可能だが、筆の位置の関数によっても表わすこともできる。ほかの6次元と時間的整合性を確保するために、ここでは次式により推定した値を使用する。

$$P_d(t) = \omega[\min\{Y\} + \max\{Y\} - Y(t)]. \quad (23)$$

ここで、 ω は変位から筆圧への変換係数である。

6. 本研究における妥当性の検証

まず、標準作業束および受検作業束のそれぞれについて、(1) 式形式の7次元軌道束を構成し、その軌道束を中心としてSobolev center⁴⁾を決定した後、(5)式により定められた位置軌道の動的挙動に注目する。ただし、本研究で解析した軌道数は、20束×13テイク×3位置軌道×4画の合計3120軌道におよぶ。これら全体を詳細に検討すると、本研究で着目している動的挙動については、個人内摂動および個人間摂動の範囲を超えた大きな変動は見られないことが確認できる。ここでは紙面の制約上、結果はごく一部のみ提示する。ここ

Fig. 4 Positional orbits of x-coordinates of standard bundle of the second stroke of character 'FU.' The red line indicates a sobolev center of the bundle

ではその中から、以下に述べる説明上の便宜を考慮して、標準作業束のX軌道のためのグラフを**Fig. 4**に示す。グラフ中の細線は各試行における個々の軌道を、太線はSobolev centerをそれぞれ示す。

つぎに、Sobolev centerの3次元軌道を位置軌道に関して、文字“ふ”の3次元軌道を(Y,Z), (Z,X), (X,Y)の各平面に射影し、その動的挙動を観測する。ここでは標準作業束および受検作業束のそれぞれの第2画の軌道について、(X,Z)平面に射影したグラフのみを**Fig. 5**および**Fig. 6**に示す。ただし、**Fig. 3(b)**で定めた座標系を用いている都合上、通常第2画の軌道が**Fig. 4**では上下反転している。

続いて、標準作業束および受検作業束のそれぞれにおける位置軌道のSobolev centerについて、Furennet-Serret標構を構成する。結果群のうち、文字“ふ”の第2画に関する3次元軌道のFurennet-Serret標構における接線方向のみを**Fig. 7**および**Fig. 8**に示す。

上記のFurennet-Serret標構について、曲率および振率を計算し、横軸をpパーセントイル¹³⁾のパーセントとする曲線を出力する。ここでも文字“ふ”の第2画に関する結果を**Fig. 9**～**Fig. 12**に示す。

ここで**Fig. 9**と**Fig. 11**の組〔標準作業束の組〕、さらに**Fig. 10**と**Fig. 12**の組〔受検作業束の組〕を見ると、大体の傾向は類似していることが目視でもわかる。

上記の曲率および振率から、(21)式に基づいて‘受検作業束の標準作業束に対する類似度’を精密に計算する。熟練者と非熟練者の組み合わせは100通りあり、その個々について類似度を計算した。どの組み合わせにおいても、多少の相違はあるものの、一方の類似度が他方の類似度より高いという傾向は同じであった。ここでは、その中での任意の一つの組み合わせを示す。計算結果を**Table 1**に示す。ただし、この表における‘分布類似度素点’は、(21)式における{・}内の値であり、‘分布類似度’は左側のセル内の値に12.5 (= 100/8)をかけたものである。ここで8は、{・}内の評価の個数×画

Fig. 5 Projection to z-x plane of the sobolev center of positional orbits of standard bundle of the second stroke of character 'FU'

Fig. 6 Projection to z-x plane of the sobolev center of positional orbits of examinee bundle of the second stroke of character 'FU'

数 4 を意味する。

Table 1 において、画順 2 の類似度はほかの画順のものと大きく異なるが、これは Fig. 2 よりわかるように、第 2 画はほかの区画より弧長が長く、より高度の技能を要するからである。

7. 考 察

(1) 前章では、弧長の関数である軌道の曲率 $\kappa(\mathbf{P}; s)$, $\kappa(\mathbf{Q}; s)$ および振率 $\tau(\mathbf{P}; s)$, $\tau(\mathbf{Q}; s)$ によって、作業束間の類似度を評価したが、比較検討のため、時間の関数である位置軌道 $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ について、(21) 式の $\{\cdot\}$ 内を次式：

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\|X_{\mathbf{P}}(t) - X_{\mathbf{Q}}(t)\|}{\|X_{\mathbf{Q}}(t)\|}, & X_{\mathbf{P}}(t) \text{ は軌道 } \mathbf{P} \text{ の } X \text{ 軸}, \\ 1 - \frac{\|Y_{\mathbf{P}}(t) - Y_{\mathbf{Q}}(t)\|}{\|Y_{\mathbf{Q}}(t)\|}, & Y_{\mathbf{P}}(t) \text{ は軌道 } \mathbf{P} \text{ の } Y \text{ 軸}, \\ 1 - \frac{\|Z_{\mathbf{P}}(t) - Z_{\mathbf{Q}}(t)\|}{\|Z_{\mathbf{Q}}(t)\|}, & Z_{\mathbf{P}}(t) \text{ は軌道 } \mathbf{P} \text{ の } Z \text{ 軸}. \end{aligned} \quad (24)$$

に置き換えてできる式に基づいて類似度を計算した。ここで、

Fig. 7 Tangential directions at various points on a sobolev center of positional orbits of standard bundle of the second stroke of character 'FU'

Fig. 8 Tangential directions at various points on a sobolev center of positional orbits of examinee bundle of the second stroke of character 'FU'

計算に利用したサンプルは Table 1 の場合と同じである。つまり、本研究のような緻密な手続きを経た測定値ではなく、そのような手続きを経由しない当初の位置軌道の測定値に基づく類似度を計算するものである。そして、両者の比較をしようという意図である。

結果は Table 2 のとおりである。ただし、この表における‘軌道類似度素点’は、(24) 式による $\{\cdot\}$ 内の値であり、‘軌道類似度’は左側のセル内の値に $33.3 (= 100/3)$ [3 は座標軸数] をかけたものである。Table 2 において Y 軸の類似度がほかより高くなったが、これは、Fig. 3(b) で示したように、本研究における座標軸設定では、筆管の高低方向に要求される技能はほかの方向の技能より少ないものであるということを表す。

Table 1 の結果 (約 86.36) と Table 2 の結果 (約 63.54) とを比較すると、本研究で述べた方法で評価したほうが、より類似度を高く、すなわちより敏感に評価したことがわかる。以上の結果から、本研究の有効性が検証できたといえる。ほかのサンプルの場合も計算したが、傾向は同じであった。

Fig. 9 p -percentile curve of the position orbit in the curvature of standard bundle of the second stroke of character 'FU'

Fig. 12 p -percentile curve of the positional orbit in the torsion of examinee bundle of the second stroke of character 'FU'

Fig. 10 p -percentile curve of the position orbit in the torsion of standard bundle of the second stroke of character 'FU'

Fig. 11 p -percentile curve of the positional orbit in the curvature of examinee bundle of the second stroke of character 'FU'

以上により、書道の字形の場面における本研究の有用性が示された。

(2) 本研究は、単一剛体ツールを用いて、作業開始から終了

Table 1 Degrees of distribution similarity in each stroke of character 'FU'

Stroke order	T1a	T1b
1	1.8886477	23.608095
2	1.1250235	14.062794
3	2.0000000	25.000000
4	1.8950410	23.688013
All	6.9087122	86.358902

T1a: Raw score of degrees of distribution similarity

T1b: Degrees of distribution similarity

Table 2 Degrees of spatial similarity in character 'FU'

Coordinates	T2a	T2b
X	0.63138835	21.046278
Y	0.93249832	31.083277
Z	0.34243195	11.414398
All	1.9063180	63.543954

T2a: Raw score of degrees of spatial similarity

T2b: Degrees of spatial similarity

まで一定時間連続して作業を行なう高度熟練時技能を対象としている。たとえば文献 15) に列挙されている技能である。この場合も、作業の計測はそのツールの 7 次元要素からなる動的挙動に関して高精度（本研究では 10 進数で 14 桁）に行なう。上記の技能の 11 職種に対して本研究を適用したところ、同じ傾向の結論を得た。結果として、3 次元位置空間による幾何学的形状に関する本研究法の有効性が示された。

(3) 7 次元ベクトル連続軌道として構成された数理モデルにおける 3 次元空間への射影法は 35 通りある。理論およびプログラムの二つの観点からこれらの全体の作業が可能であるかどうかを検討したが、問題点は何も見つからなかった。したがって意味のある組み合わせに対する必要性に応じた解析は、問題なく実行できるが、今回はそれを行なう必要性がな

かった。結果として本研究で採用した射影法は、高次元の数理解析モデルに対しても有意義に実行できることがわかった。

(4) その一方で、現時点では上記の対象に対して行なったほかの研究報告は見当たらない。たとえば熟練者・非熟練者の特徴づけ解析を行なう手法の一つにデータマイニングがあるが、これは、連続軌道ではなく、単一瞬間における計測値の集団に対する広義の統計解析であり、研究対象も研究目的も本研究とは全く異なるものである。

(5) 以上により、高次元（本研究の場合は7次元）数理解析モデルとして構成された数理解析モデルに対する、受験作業束の標準作業束に対する、幾何学的形状の類似性に関する本研究の研究法の有効性が立証された。

8. 結 言

本研究では、単一剛体ツールを用いて行なう高度熟練技能を7次元連続軌道として数理解析モデル化^(4),5)し、これを基礎として緒言で述べた諸問題の解決を目的とする数理解析手法を提案した。このモデルは、当該技能の実測値に基づき各要素関数を3次スプライン関数として数値解析の知見を用いて構成されたため、本研究で意図する精密な数理解析手法を提案する一方で、それが理論上も数値計算上も安全に行なえるかどうかとも確認する必要があった。その結果、つぎのことがわかった。

(1) 7次元軌道を幾何学的直感が有効な3次元空間に射影して解析する方法は、本研究においても有効であることを確認した。

(2) 3次元空間において、微分幾何学における曲線論の諸概念が有効に利用できるかどうかを、一見して教科書的にも見えるような叙述法で丁寧に点検し、その有効性を確認した。

(3) しかし、3次スプライン関数の3階導関数値を計算するにあたっては、それらを各節点以外の箇所で行なう必要があること、そのほかの導関数においては数式微分したものを数値計算する必要があることを明らかにした。そのほかの数値計算においても桁落ちが発生する箇所が散見されるので、本研究における高精度計測は不可欠である。

(4) 単一剛体ツールを用いた高度熟練技能の作業結果に基づく軌道の幾何学的形状は、その軌道が描く3次元空間曲線の曲率および振率の一組と置換可能であることを示し、この理論に基づく有効な定量的解析法を示し、その有効性を確認した。

(5) 非熟練者が高度熟練技能における幾何学的形状を学習する際には、単なる位置情報のみでは不適切であるので、その軌道の曲率および振率の一組を基幹情報として利用すると共に、それらの比較においてはパーセントイルを用いる有効な数理解析法を示した。

以上により、緒言で述べた本研究の目的は達成されたといえることができる。

参 考 文 献

- 1) 上田洋一郎：産業用ロボット業界の現状と展望～業界構造変化を踏まえた日系ロボットメーカーの戦略方向性～, Mizuho Industry Focus, **150-6**, 1/22 (2014)
- 2) 古川, 植野, 尾崎, 神里, 川本, 渋谷, 白鳥, 諏訪, 曾我, 瀧, 藤波, 堀, 本村, 森田：身体知研究の潮流—身体知の解明に向けて—, 人工知能学会論文, **20-2**, SP-A, 117/128 (2005)
- 3) 中村, 高野：高度熟練技能継承政策に関する一考察, 社会技術研究論文集, **11**, 82/95 (2014)
- 4) 馬渡, 土屋：高度熟練技能における数理解析モデルおよび制御解析法の構築ならびに書道の運筆活動における潤滑への適用, 計測自動制御学会論文集, **52-6**, 317/329 (2016)
- 5) 馬渡, 土屋：Sobolev center と埋め込み写像を利用した高度熟練技能における空間的個人間個人差の解析法の構築, 日本計算工学会論文集, 20160009 (2016)
- 6) 全国大学書道学会：書の古典と理論, 光村図書出版 (2013)
- 7) D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkycharian and D. Picard: Wavelet Shrinkage: Asymptopia, J. Roy. Statist. Soc. B, **57-2**, 301/369 (1995)
- 8) S. Mallat: *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd ed., Academic Press (1999)
- 9) M. Misiti, Y. Misiti and P. Oppenheim: *Wavelets and Their Applications*, 63/87, ISTE (2007)
- 10) 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何（改訂版）, 裳華房 (1995)
- 11) 田崎博之：曲線・曲面の微分幾何, 共立出版 (2015)
- 12) 矢野健太郎：微分幾何学, 朝倉書店 (1949)
- 13) S.S. Wilks: *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons (1962)
- 14) 阿保, 相川：図解毛筆・ペンに役立つひらがなの書き方, 木耳社 (2012)
- 15) 中央職業能力開発協会 (JAVADA)：高度熟練技能者認定者情報, <http://www.javada.or.jp/kodo/>

[著 者 紹 介]

馬 渡 正 道 (正会員)

2007年スタンフォード大学大学院博士課程修了（機械工学専攻）。2013年東京大学生産技術研究所特任研究員、2016年同研究所特任講師、現在に至る。数値解析、機械設計の研究に従事（博士（工学））。

土 屋 健 介

2002年東京大学大学院工学系研究科修了。同年東京大学工学部助手、2005年同大学生産技術研究所助教授、現在に至る。微細加工・組立技術、機械設計の研究に従事（博士（工学））。