不確かな予見情報に基づく H^∞ 制御則の構成

児 島 晃*・端 倉 弘太郎*

A Design Method of H^∞ Control Law for Uncertain Preview Information

Akira KOJIMA* and Kotaro HASHIKURA*

An H^∞ preview control problem is discussed for a system driven by uncertain preview information and a design method of control law is derived. Based on a state-space approach, a simplified solvability condition is derived by directly solving the coupled filtering/control operator Riccati equation. The features of the control law which overcome the uncertain future information are investigated and, in the numerical examples, the relation between the preview uncertainty and the resulting control performance is illustrated.

Key Words: previewable information, uncertainty, H^∞ control

1. はじめに

予見制御法は、目標値の一定時間未来までの情報を利用することにより、制御系の追従性能を改善する手法であり、文献 1), 2) をはじめ数多くの研究が行われてきた。そして近年では、 H^∞ 制御性能の視点から予見制御系を構成する方法が明らかにされ、予見情報を用いることにより追従性能を確保し、さらにはほかの外乱の影響を抑制する一般的な制御法を導くことも可能になった^{3)~12)}。しかしながら、これらの研究においては、正確な予見情報が一定時間未来まで利用できることが仮定されているため、1) 遠い将来ほど予見情報が不確かなる場合、あるいは 2) 時々刻々と予見可能な情報が更新される場合には、入手可能な予見情報を的確に処理し、性能改善に反映させる制御系の構成法は明らかでなかった。このような情報の更新を想定した予見制御問題は、予見情報の質と制御性能の関係を明らかにし、今後、人間・機械系のアシスト制御、気象・発電予測を考慮した自然エネルギーの需給制御など、広範な問題を扱うことを可能にすると期待される。文献 13) において、著者らは、不確かな予見情報に基づく推定問題に対して H^∞ 推定器の構成法を導き、さらに文献 14) において結果を制御問題に展開している。しかしながら、文献 14) で得たこれまでの結果では、可解条件の判定に時変系の状態遷移行列を繰り返し計算する必要があるため多大な計算を要し、また制御則に輸送型の偏微分方程式が含まれるなど実装の観点からも課題が残されていた。

本論文では、Fig. 1 のような予見情報の不確かさを考慮し

Fig. 1 H^∞ uncertain preview control ($E(\cdot) = I$, $F(\cdot) = I$)

た H^∞ 制御問題を定め、問題の可解条件を検証可能な形に展開し、さらに制御則の構成法とその性質を明らかにする。Fig. 1 の一般化プラントでは、予見可能な情報 $y^1(t, \cdot)$ に関数型の外乱が含まれることを想定しており、予見時間と外乱の影響度の関係を定めれば、予見情報に内在する不確かさを考慮した上で、制御性能を調べることが可能になる。そこで、文献 13) に示された観測問題の結果を援用し、さらに制御則を適当な状態空間で定めた作用素 Riccati 方程式の解から構成することにより、予見情報の不確かさを処理する予見制御系の構成法を明らかにする。

論文の構成は、以下のようにまとめられる。2 章では、予見情報の不確かさを扱う H^∞ 制御問題を定め、システムの状態空間表現と既報 13) で得た基本的な結果を示す。3 章では、 H^∞ 制御問題を解き、可解条件と設計法を導く。そして、従来の作用素 Riccati 方程式と解のスペクトル半径の条件からは有用な解法は得られないものの、等価な条件を反映させた結合型作用素 Riccati 方程式から簡明な可解条件が得られることを明らかにする。4 章では、数値例により、予見情報に含まれる不確かさの性質と制御性能の関係を考察し、5 章で、本論文の結果をまとめる。

* 首都大学東京システムデザイン研究科 日野市旭が丘 6-6

* Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University, 6-6 Asahigaoka, Hino

(Received November 21, 2016)

(Revised May 15, 2017)

2. 問題設定と準備

つぎの H^∞ 予見制御問題を考える (Fig. 1).

$$\Sigma_c: \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \quad (1a)$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{12} u(t) \quad (1b)$$

$$y^0(t) = C_2 x(t) + D_{21} v^0(t) \quad (1c)$$

$$y^1(t, \alpha) = E(\alpha) w(t + \alpha) + F(\alpha) v^1(t, \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq h \quad (1d)$$

ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態, $w(t) \in \mathbb{R}^\ell$ は予見可能な外生信号, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ は被制御量である. また, $(y^0(t), y^1(t, \cdot)) \in \mathbb{R}^{q_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{q_1})$ は観測量と予見情報であり, $(v^0(t), v^1(t, \cdot)) \in \mathbb{R}^{r_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{r_1})$ はそれらに印加される外乱である. すなわち系 Σ_c において, 状態 $x(t)$ は予見可能な外生信号 $w(t)$ により駆動されるが, 予見情報 $y^1(t, \cdot)$ には, その h 単位時間先までの情報 $w(t + \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq h$) が外乱 $v^1(t, \alpha)$ と共に与えられる. よって, 系 Σ_c により, 不確かな予見情報を扱う予見制御問題が定められる. 以下では, 信号 $(v^0(t), v^1(t, \cdot)), (y^0(t), y^1(t, \cdot))$ を

$$\hat{v}(t) = \begin{bmatrix} v^0(t) \\ v_t^1 \end{bmatrix} \in V := \mathbb{R}^{r_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{r_1}), \quad v_t^1(\alpha) := v^1(t, \alpha) \quad (2)$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} y^0(t) \\ y_t^1 \end{bmatrix} \in Y := \mathbb{R}^{q_0} \times L_2(0, h; \mathbb{R}^{q_1}), \quad y_t^1(\alpha) := y^1(t, \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq h) \quad (3)$$

と表わし, つぎの予見制御問題を考える.

H^∞ 予見制御問題 (P_c): 観測量と予見情報からなる信号 $\hat{y}(t)$ に基づき, つぎの H^∞ 性能を達成する安定化制御則 $u(t) = [\Psi \hat{y}](t)$ を構成せよ.

$$\sup_{(\hat{v}, w) \neq 0, (\hat{v}, w) \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{R}^p)}^2}{\|\hat{v}\|_{L_2(0, \infty; V)}^2 + \|w\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{R}^\ell)}^2} < \gamma^2 \quad (4)$$

ここで, $\gamma > 0$ は制御性能を指定する定数であり, 制御則 Ψ は $\hat{y}(t)$ に因果的であるとする. $\square$

以下では, 仮定 (H1)-(H4) を設け, 制御性能 $\gamma > 0$ に対する可解条件と制御則の構成法を明らかにする.

(H1) (A, B_2) は可安定, (C_2, A) は可検出である.

(H2) D_{12} は列最大階数を持ち, 条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.

(H3) D_{21} は行最大階数を持ち, 条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.

(H4) 行列値関数 $E(\cdot), F(\cdot)$ は区分的に連続であり, 有界である. また $F(\cdot)$ は条件

$$F(\alpha)F^T(\alpha) > \epsilon \cdot I, \quad \epsilon > 0 \quad (0 \leq \alpha \leq h) \quad (5)$$

を満たす.

予見情報を定めた (1d) 式は, 行列値関数 $E(\cdot)$ を適切に定めることにより, 文献 13) 3 章 (a), (b) のように, 1) 複数チャネルの予見情報を扱う場合, 2) 異なる不確かさをもつ予見情報を融合する場合など, 広範な問題を扱うことができる. また, $F(\cdot)$ は予見情報の不確かさを表現する重みであり, たとえば $F(\alpha)$ の各要素の絶対値を α と共に増加させれば, 遠い将来ほど $y^1(t, \alpha)$ の情報が不確かになり, 時間の経過とともに精度が改善される状況が表現できる. 3 章では, このような特徴をもつ H^∞ 予見制御問題の解法を与え, 4 章で数値例によりその特徴を調べる.

系 Σ_c は, 状態空間

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \mathbb{R}^n \times L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell), \\ \langle \psi, \phi \rangle &:= \psi^{0T} \phi^0 + \int_0^h \psi^{1T}(\alpha) \phi^1(\alpha) d\alpha \\ \psi &= (\psi^0, \psi^1) \in \mathcal{X}, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (6)$$

を導入し, 状態を

$$\hat{x}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ w_t \end{bmatrix} \in \mathcal{X}, \quad w_t(\alpha) := w(t + \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq h) \quad (7)$$

と定めると, つぎの発展方程式により表わされる^{15), 16)}.

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_c: \dot{\hat{x}}(t) &= \mathcal{A} \hat{x}(t) + \mathcal{B}_1 w(t + h) + \mathcal{B}_2 u(t) \\ z(t) &= \mathcal{C}_1 \hat{x}(t) + D_{12} u(t) \\ \hat{y}(t) &= \mathcal{C}_2 \hat{x}(t) + D_{21} \hat{v}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\mathcal{A}$ は,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \phi &= \begin{bmatrix} A \phi^0 + B_1 \phi^1(0) \\ \phi^{1'} \end{bmatrix}, \\ D(\mathcal{A}) &= \{\phi \in \mathcal{X} : \phi^1 \in W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^\ell), \phi^1(h) = 0\} \end{aligned} \quad (9)$$

と定めた無限小生成作用素であり, 定義域 $D(\mathcal{A})$ は, $\mathcal{X}$ で稠密である^(注 1). また $\mathcal{A}$ の共役作用素は,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* \psi &= \begin{bmatrix} A^T \psi^0 \\ -\psi^{1'} \end{bmatrix}, \quad D(\mathcal{A}^*) = \{\psi \in \mathcal{X} : \\ \psi^1 &\in W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^\ell), \psi^1(0) = B_1^T \psi^0\} \end{aligned} \quad (10)$$

と与えられ, 状態空間を $\mathcal{V} := D(\mathcal{A}^*)^*$ と拡張すると, 作用素 $\mathcal{A}$ の定義域は $D_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ となる. 空間 $\mathcal{X}, \mathcal{V}$ は, $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ と稠密に埋め込まれており (文献 15), Remark 2.6),

(注 1) $W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^\ell)$ は Sobolev 空間であり, $\phi^1, \phi^{1'} \in L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell)$ を満たす関数全体を表わす. ここで $\phi^{1'}$ は ϕ^1 の導関数である.

作用素 $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{V})$, $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{X})$, $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^p)$, $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, Y)$, $\mathcal{D}_{21} \in \mathcal{L}(V, Y)$ は, 以下のように定められる.

$$\mathcal{B}_1^* \psi = \psi^1(h) \in \mathbb{R}^\ell, \quad \psi = (\psi^0, \psi^1) \in \mathcal{V}^* \quad (11)$$

$$\mathcal{B}_2 u = \begin{bmatrix} B_2 u \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{X}, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (12)$$

$$\mathcal{C}_1 \phi = C_1 \phi^0 \in \mathbb{R}^p, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 \phi &= \begin{bmatrix} (C_2 \phi)^0 \\ (C_2 \phi)^1 \end{bmatrix} \in Y, \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X}, \\ (\mathcal{C}_2 \phi)^0 &= C_2 \phi^0, \\ (\mathcal{C}_2 \phi)^1(\alpha) &= E(\alpha) \phi^1(\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq h) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{21} \eta &= \begin{bmatrix} (D_{21} \eta)^0 \\ (D_{21} \eta)^1 \end{bmatrix} \in Y, \quad \eta = (\eta^0, \eta^1) \in V, \\ (\mathcal{D}_{21} \eta)^0 &= D_{21} \eta^0, \\ (\mathcal{D}_{21} \eta)^1(\alpha) &= F(\alpha) \eta^1(\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq h) \end{aligned} \quad (15)$$

そして, 系 $\hat{\Sigma}_c$ に対応させて作用素 Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathcal{P} \phi + \mathcal{P} \mathcal{A}^* \phi + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P} \mathcal{C}_1^* \mathcal{C}_1 \mathcal{P} \phi \\ - \mathcal{P} \mathcal{C}_2^* (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^*)^{-1} \mathcal{C}_2 \mathcal{P} \phi + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^* \phi = 0, \quad \phi \in \mathcal{V}^* \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \mathcal{A}_c \phi + \mathcal{A}_c^* \mathcal{S} \phi + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{S} \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^* \mathcal{S} \phi \\ - \mathcal{S} \mathcal{B}_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} \mathcal{B}_2^* \mathcal{S} \phi + \mathcal{C}_1^* N_c \mathcal{C}_1 \phi = 0, \quad \phi \in \mathcal{X}, \\ \mathcal{A}_c := \mathcal{A} - \mathcal{B}_2 D_{12}^+ \mathcal{C}_1, \quad N_c := I - D_{12} D_{12}^+, \\ D_{12}^+ := (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T \end{aligned} \quad (17)$$

を導入すると, 制御問題 $\mathbf{P}_c$ の可解条件と制御則は, 形式的に つぎのように表わされる¹⁷⁾.

[補題 1] (文献 17)) 系 Σ_c に対して, H^∞ 予見制御問題 $\mathbf{P}_c$ が可解であるための必要十分条件は, つぎの (A), (B), (C) が成り立つことである.

(A) 作用素 Riccati 方程式 (16) に安定化解 $\mathcal{P} \geq 0$ ($\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$) が存在し, 作用素 $\mathcal{A} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P} \mathcal{C}_1^* \mathcal{C}_1 - \mathcal{P} \mathcal{C}_2^* (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^*)^{-1} \mathcal{C}_2$ は指数安定な半群を生成する.

(B) 作用素 Riccati 方程式 (17) に安定化解 $\mathcal{S} \geq 0$ ($\mathcal{S} \in \mathcal{L}(V, \mathcal{V}^*)$) が存在し, 作用素 $\mathcal{A}_c + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^* \mathcal{S} - \mathcal{B}_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} \mathcal{B}_2^* \mathcal{S}$ は指数安定な半群を生成する.

(C) 安定化解 $\mathcal{S} \geq 0$, $\mathcal{P} \geq 0$ は, 条件 $\lambda_{\max}(\mathcal{P} \mathcal{S}) < \gamma^2$ を満足する.

また, 条件 (A), (B), (C) が成り立つとき, 予見制御則 $u = \Psi \hat{y}$ はつぎのように与えられる.

$$\begin{aligned} u(t) &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} \times \\ &\quad \left(\mathcal{B}_2^* \mathcal{S} + D_{12}^T \mathcal{C}_1 \right) \left(\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P} \mathcal{S} \right)^{-1} \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \mathcal{A} \hat{x}(t) + \mathcal{B}_2 u(t) + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P} \mathcal{C}_1^* (\mathcal{C}_1 \hat{x}(t) + D_{12} u(t))$$

$$+ \mathcal{P} \mathcal{C}_2^* (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^*)^{-1} (y(t) - \mathcal{C}_2 \hat{x}(t)) \quad (18b)$$

$$\hat{x}(t) := \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{w}_t \end{bmatrix} \in \mathcal{X}, \quad \underline{w}_t(\alpha) := \underline{w}(t, \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 0) \quad (18c)$$

□

文献 13) では, 本論文の基礎となる H^∞ 予見推定問題が扱われ, 条件 (A) を具体的に検証する方法が導かれている. [補題 2] (文献 13)) 定数 $\gamma > 0$ に対して, 条件 (A) が成り立つ必要十分条件は, つぎの (a) が成り立つことである.

(a) 行列 Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \mathcal{A} P_0 + P_0 \mathcal{A}^T + \frac{1}{\gamma^2} \cdot P_0 \mathcal{C}_1^T \mathcal{C}_1 P_0 \\ - P_0 \mathcal{C}_2^T (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^T)^{-1} \mathcal{C}_2 P_0 + B_1 P_1(0) B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P_1(\alpha) &:= \left[I + \int_\alpha^h E^T(\tau) (F(\tau) F^T(\tau))^{-1} E(\tau) d\tau \right]^{-1} \\ &\quad (0 \leq \alpha \leq h) \end{aligned} \quad (20)$$

は安定化解 $P_0 \geq 0$ をもち, 行列 $\mathcal{A} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot P_0 \mathcal{C}_1^T \mathcal{C}_1 - P_0 \mathcal{C}_2^T (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^T)^{-1} \mathcal{C}_2$ は安定である.

また条件 (a) が成り立つとき, 作用素方程式 (16) の安定化解 $\mathcal{P} \geq 0$ は, つぎのように与えられる.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_1 \cdot \mathcal{I} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで $\mathcal{I}$ は恒等作用素であり, $P_1 \cdot \mathcal{I}$ により, つぎの乗算作用素を表わしている.

$$\begin{aligned} (P_1 \cdot \mathcal{I})(\alpha) &= P_1(\alpha) \phi^1(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq h, \\ \phi^1 &\in L_2(0, h; \mathbb{R}^\ell) \end{aligned} \quad (22)$$

□

以下の章では, 条件 (B), (C) を調べる方法を新たに導き, 制御則 (18) の構成法とその特徴を明らかにする.

3. H^∞ 予見制御則の構成

2 章の結果から, H^∞ 予見制御問題 $\mathbf{P}_c$ は, 条件 (A), (B), (C) を検証する方法を示し, また制御則 (18) の実際の表現を求めれば解くことができる. 本章では, 補題 2 に加えて, 条件 (B), (C) が成り立つ条件を明らかにし, 制御則の構成法を導く.

条件 (B) は, 予見情報に不確かさを想定しない場合と同一であり, 文献 5), 7) により作用素 Riccati 方程式の解法が明らかにされてきた. しかしながら, 制御問題 $\mathbf{P}_c$ においては, 条件 (B) と (C) を容易に検証する方法はこれまでに得られていない. これは, 観測 Riccati 方程式の解 $\mathcal{P}$ が, (21) 式のように空間変数 α を含む乗算作用素により表わされ, 条件 (C) が定める最大固有値 $\lambda_{\max}(\mathcal{P} \mathcal{S})$ の実用的な計算法が得られないためである. 実際, 文献 14) Theorem 4 においては, $E(\cdot) = I$ とした一般化プラント Σ_c に対して条件 (C)

が調べられたが、最大固有値 $\lambda_{\max}(\mathcal{PS})$ を得るためには、パラメータ σ を含む時変の微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{r}}(t) &= H_\sigma(t)\tilde{r}(t), \quad H_\sigma(t) := \\ &\begin{bmatrix} A_c & \frac{1}{\sigma^2} \cdot B_1 P_1(t) B_1^T - B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T \\ -C_1^T N_c C_1^T & -A_c^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

から状態遷移行列 $\tilde{\Phi}_\sigma(0, -h)$ を定め、方程式

$$\det \tilde{W}(\sigma) = 0, \quad \tilde{W}(\sigma) := U \tilde{\Phi}_\sigma(0, -h) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \cdot P_0 \\ I \end{bmatrix} \quad (24)$$

の根の最大値を求める必要があった^(注2)。これは $\tilde{W}(\sigma)$ の値を調べる度に、その σ に応じて状態遷移行列 $\tilde{\Phi}_\sigma(0, -h)$ を計算し直すことを意味しており、条件 (C) の判定に多大な計算が必要であった。

本章では、条件 (B), (C) が検証の容易な形に展開できることを新たに示し、制御問題 $(\mathbf{P}_c)$ に対する可解条件と制御則の構成法を導く (3.1 節)。また、文献 14) と比較した場合、制御則は輸送型の偏微分方程式を含まない形で構成できることを示し、さらに (1d) 式のように予見情報を一般化した本結果から、正確な予見情報を仮定した従来の結果が系統的に導かれることを明らかにする (3.2 節)。

3.1 可解条件の導出

本節では、先に示された条件 (B), (C) と等価な条件が、固有値の条件 $\lambda_{\max}(\mathcal{PS}) < \gamma^2$ を経由せずに求められることを示す。導出の手順は、以下のようにまとめられる。

- 1) 条件 (B) で示した作用素 Riccati 方程式 (17) の安定化解を既報 5) の結果から構成する (補題 3, 4)。
- 2) 条件 (B), (C) が同時に成り立つことが、ある補助的な作用素 Riccati 方程式に半正定な安定化解が存在する条件に帰着できることを示す (補題 5)。また、手順 1) で示した Riccati 方程式 (17) の安定化解からその補助的な Riccati 作用素方程式の解を構成する。
- 3) 手順 2) で示した補助的な作用素 Riccati 方程式に半正定な安定化解が存在する条件を判定が容易な形で与える (定理 1 および補題 6, 7)。

はじめに、文献 5), 7) に基づき、(17) 式の安定化解を構成する基本結果を示す。

[補題 3] (文献 5) Lemma 1, 7) Theorem 1) 定数 $\gamma > 0$ に対して、条件 (B) が成り立つ必要条件是、Hamilton 行列

$$H := \begin{bmatrix} A_c & \frac{1}{\gamma^2} \cdot B_1 B_1^T - B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T \\ -C_1^T N_c C_1 & -A_c^T \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$A_c := A - B_2 D_{12}^+ C_1 \quad (26)$$

(注 2) 状態遷移行列 $\tilde{\Phi}_\sigma(0, -h)$ は、 $\tilde{r}(0) = \Phi_\sigma(0, -h)\tilde{r}(-h)$ を満たすことを意味する。また (24) 式において、 U, P_0 は、パラメータ σ と無関係な定数行列である。

が虚軸上に固有値をもたないことである。□

補題 3 により、条件 (B) が成り立つときには、常につきの列最大階数の行列 $V \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ が存在する。

$$\begin{aligned} V &:= [V_1^T \ V_2^T]^T, \quad V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ HV &= V\Lambda_c, \quad \Lambda_c : \text{安定行列} \end{aligned} \quad (27)$$

そして、この行列 V から補助的な作用素

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 &\in \mathcal{L}(\mathcal{X}^o), \quad \mathcal{X}^o := \mathbb{R}^n \times L_2(0, h; \mathbb{R}^n) : \\ \mathcal{V}_1 &:= \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 := \begin{bmatrix} V_2 & 0 \\ 0 & C_1^T N_c C_1 \cdot I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Pi &\in \mathcal{L}(\mathcal{X}'), \quad \mathcal{X}' := \mathbb{R}^n \times L_2(0, h; \mathbb{R}^n) : \\ \Pi &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T \cdot I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') : \quad \Xi := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_1 \cdot I \end{bmatrix} \quad (30)$$

$\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}', \mathcal{X}^o) :$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\phi &:= ((\mathcal{G}\phi)^0, (\mathcal{G}\phi)^1), \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{X}' \\ (\mathcal{G}\phi)^0 &:= e^{A_c h} \phi^0 + \int_0^h e^{A_c(h-\alpha)} \phi^1(\alpha) d\alpha \\ (\mathcal{G}\phi)^1(\xi) &:= e^{A_c \xi} \phi^0 + \int_0^\xi e^{A_c(\xi-\alpha)} \phi^1(\alpha) d\alpha \\ &\quad (0 \leq \alpha \leq h) \end{aligned} \quad (31)$$

を定めると、(17) 式の安定化解はつぎのように与えられる。
[補題 4] (文献 5) Theorem 19, および Theorem 17 証明)
定数 $\gamma > 0$ に対して、(27) 式を満たす列最大階数の行列 $V \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ が存在するとする。このとき、作用素 Riccati 方程式 (17) が安定化解をもつ必要十分条件は、

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^o) \quad (32)$$

が可逆であることである。さらに、作用素 (32) が可逆であるとき、安定化解はつぎのように与えられる。

$$S = (\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 (\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2)^{-1} (\mathcal{G}\Xi) \quad (33)$$

□

(注意) 文献 5) では、むだ時間系を同時に扱ったため、つぎのように状態を定めている。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{w}_t \end{bmatrix} &\in \tilde{\mathcal{X}}, \quad \tilde{\mathcal{X}} := \mathbb{R}^n \times L_2(-h, 0; \mathbb{R}^n), \\ \tilde{w}_t(\beta) &:= B_1 w(t + \beta) \quad (-h \leq \beta \leq 0) \end{aligned} \quad (34)$$

(33) 式の表現では、状態 (34) を (7) に対応させるために $\mathcal{X} = \Xi \tilde{\mathcal{X}}$ を満たす作用素 Ξ ((30) 式) を用い、 $\alpha := \beta + h$ の変換を行なっている。□

原理的には、補題 3, 4 から、さらに作用素 (33) が半正定になる条件を整備すれば、条件 (B) を検証する方法が得られる。しかしながら、予見制御問題 $\mathbf{P}_c$ においては、作用素 $\mathcal{P}$ が

(21) の構造をもつため、条件 (C) に現れる固有値 $\lambda_{\max}(\mathcal{P}\mathcal{S})$ を求めるために、可変パラメータを含む時変系の状態遷移行列を逐一計算する必要があった¹⁴⁾。本章では、補題 3, 4 の基本的な結果に基づき、条件 (B), (C) 双方を判定する簡明な条件を明らかにする。

作用素 Riccati 方程式

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{A}}_c\phi + \tilde{\mathcal{A}}_c^*\tilde{\mathcal{S}}\phi + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{B}}_1(\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{21}^*)^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_1^*\tilde{\mathcal{S}}\phi \\ & - \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{B}}_2(\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_2^*\tilde{\mathcal{S}}\phi + \mathcal{C}_1^*N_c\mathcal{C}_1\phi = 0, \phi \in \mathcal{X}, \\ & \tilde{\mathcal{A}}_c := \mathcal{A}_c + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{C}_1^*N_c\mathcal{C}_1, \\ & \tilde{\mathcal{B}}_1 := \mathcal{P}\mathcal{C}_2^*, \tilde{\mathcal{B}}_2 := \mathcal{B}_2 + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{C}_1^*D_{12} \end{aligned} \quad (35)$$

に着目すると、(B), (C) と等価な条件がつぎのように表わされる。

[補題 5] 定数 $\gamma > 0$ に対して、条件 (A) が成り立つとする。このとき、(B), (C) が成り立つ必要十分条件は、作用素 Riccati 方程式 (35) に安定化解 $\tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ が存在し、作用素 $\tilde{\mathcal{A}}_c + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_1(\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{21}^*)^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_1^*\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{B}}_2(\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_2^*\tilde{\mathcal{S}}$ が指数安定な半群を生成することである。また、条件 (B), (C) が成り立つとき、つぎの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} &= \mathcal{S} \left(\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S} \right)^{-1} \\ \tilde{\mathcal{A}}_S \left(\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S} \right) &= \left(\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S} \right) \mathcal{A}_S, \\ \tilde{\mathcal{A}}_S &:= \tilde{\mathcal{A}}_c + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_1(\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{21}^*)^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_1^*\tilde{\mathcal{S}} \\ &\quad - \tilde{\mathcal{B}}_2(\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_2^*\tilde{\mathcal{S}}, \\ \mathcal{A}_S &:= \mathcal{A}_c + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{B}_1\mathcal{B}_1^*\mathcal{S} - \mathcal{B}_2(\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\mathcal{B}_2^*\mathcal{S} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、 $\mathcal{P} \geq 0, \mathcal{S} \geq 0, \tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ は、それぞれ (16), (17), (35) 式の安定化解である。

(証明) $(\Rightarrow)$ 条件 (A) の下、さらに (B), (C) が成り立てば、方程式 (35) が安定化解 $\tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ をもつことを示す。 $\mathcal{P} \geq 0, \mathcal{S} \geq 0$ をそれぞれ (16), (17) 式の安定化解とすると、 $\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S}$ は可逆であり、作用素 (36) は半正定である。つぎに作用素 (36) が、方程式 (35) の安定化解になることを示す。作用素 (36) を方程式 (35) の左辺に代入し、(16), (17) 式を用いると、(36) が方程式 (35) の解であることがわかる。また、(37) 式中の第 1 式が (16), (17), (35) 式から導かれ、条件 (B) より $\mathcal{A}_S$ が指数安定な半群を生成する。よって、 $\tilde{\mathcal{A}}_S$ もまた指数安定な半群を生成し、作用素 (36) が (35) 式の安定化解になることが示された。

$(\Leftarrow)$ 条件 (A) の下、方程式 (35) が安定化解 $\tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ をもてば、(B), (C) が成り立つことを示す。 $\mathcal{P} \geq 0$ を方程式 (16) の安定化解とすると、 $\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}}$ は可逆であり、 $\mathcal{S} := \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}})^{-1} \geq 0$ が方程式 (17) の解になる。また、等式 $\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S} = (\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}})^{-1}$ が成り立ち、前提より (37) 式中の作用素 $\tilde{\mathcal{A}}_S$ は指数安定な半群を生成する。

よって、(37) 式中の第 1 式から $\mathcal{S} := \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}})^{-1} \geq 0$ は (17) 式の安定化解になり、条件 (B) と (36), (37) 式が導かれる。他方、作用素 $\mathcal{P}\mathcal{S}$ は $\mathcal{P}\mathcal{S} = \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}})^{-1}$ と表わされ、 $\mathcal{P} \geq 0, \tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ であるから、 $\lambda_{\max}(\mathcal{P}\mathcal{S}) < \gamma^2$ すなわち条件 (C) が導かれる。

(注意) 方程式 (35) は、一般化プラント

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_c' : \quad & \dot{x}(t) = \tilde{\mathcal{A}}_c\hat{x}(t) + \tilde{\mathcal{B}}_1(\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{21}^*)^{-\frac{1}{2}}w(t) + \tilde{\mathcal{B}}_2u(t) \\ & z(t) = \mathcal{C}_1\hat{x}(t) + D_{12}u(t) \\ & \tilde{y}(t) = (\hat{x}(t), w(t)) \end{aligned} \quad (38)$$

に対する H^∞ 制御問題の解法を与える。そして系 Σ_c' に対して、

$$\sup_{w \neq 0, (\hat{v}, w) \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{R}^{p_1})}}{\|w\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{R}^\ell)}} < \gamma \quad (\gamma > 0) \quad (39)$$

を満たす安定化制御則 $u(t) = [\Psi' \tilde{y}](t)$ が存在する必要十分条件は、(35) 式が安定化解 $\tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ をもつことであり、制御則は、

$$u(t) = -(\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_2^*\tilde{\mathcal{S}}\hat{x}(t) \quad (40)$$

のように与えられる (文献 17), Theorem 4.4).

条件 (A) の下で、補助的な行列

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_c &:= \mathcal{A}_c + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}_0\mathcal{C}_1^*N_c\mathcal{C}_1, \\ \tilde{\mathcal{B}}_1 &:= \mathcal{P}_0\mathcal{C}_2^T, \tilde{\mathcal{B}}_2 := \mathcal{B}_2 + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}_0\mathcal{C}_1^T D_{12} \end{aligned} \quad (41)$$

とつぎの微分方程式を定める。

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= H_\gamma(t)r(t), \quad H_\gamma(t) := \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{A}_c & \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{B}_1\mathcal{P}_1(t)\mathcal{B}_1^T - \mathcal{B}_2(\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\mathcal{B}_2^T \\ -\mathcal{C}_1N_c\mathcal{C}_1^T & -\mathcal{A}_c^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、 $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1(\cdot)$ は (19), (20) 式で定めた行列である。このとき (B), (C) が同時に成り立つための必要十分条件は、つぎのように与えられる。

《定理 1》 定数 $\gamma > 0$ に対して、条件 (A) が成り立つとする。このとき、(B), (C) が成り立つ必要十分条件は、つぎの (bc1), (bc2) が成り立つことである。

(bc1) Hamilton 行列 (25) は、虚軸上に固有値をもたない。

(bc2) つぎに定める行列 W_0 は正則であり、 $\tilde{\mathcal{A}}_c + \tilde{\mathcal{B}}_2 \times (\mathcal{D}_{12}^T\mathcal{D}_{12})^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_2^TW_0^{-1}W_1(0)$ は安定である。

$$W_0 := U\Phi_\gamma(h, 0) \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}_0 \\ I \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$W_1(\tau) := U\Phi_\gamma(h, \tau) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (0 \leq \tau \leq h) \quad (44)$$

$$U := \begin{bmatrix} V_2^T & -V_1^T \end{bmatrix} \quad (45)$$

ここで、 $V = [V_1^T \ V_2^T]^T$ は (27) 式を満たす列最大階数の行列であり、 $\Phi_\gamma(\cdot, \cdot)$ は微分方程式 (42) の状態遷移行列

である(注3)。

また条件 (A), (bc1), (bc2) が成り立つとき, 作用素方程式 (35) の安定化解 $\tilde{S} \geq 0$ は, つぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= (\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \times \\ &\left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \right\}^{-1} (\mathcal{G}\Xi) \end{aligned} \quad (46)$$

□

定理 1 により, 条件 (B), (C) が (bc1), (bc2) に定めた行列の性質から判定できることが示された。この結果は, (23), (24) 式に引用した既報 14) の結果と異なり, (42) 式に対する状態遷移行列 $\Phi_\gamma(h, 0)$ を 1 回計算すれば, 条件 (B), (C) の成否が判定できる。

定理 1 の証明のために, つぎの補題を用意する。

[補題 6] 条件 (A), (bc1) の下, 作用素

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \quad (47)$$

が可逆である必要十分条件は, 行列 (43) が正則であることである。□

(証明) 付録 A. □

[補題 7] 条件 (A), (bc1), (bc2) の下, 作用素 (46) は, 作用素 Riccati 方程式 (35) の解になる。このとき, フィードバック画像

$$u = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^* \tilde{S} g \quad (u \in \mathbb{R}^{m_2}, g \in \mathcal{X}) \quad (48)$$

は,

$$\begin{aligned} u &= (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^T \\ &\times W_0^{-1} \left\{ W_1(0)g^0 + \int_0^h W_1(\tau) E g^1(\tau) d\tau \right\}, \\ g &= (g^0, g^1) \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (49)$$

と表わされ, 閉ループ系

$$\dot{\hat{x}}(t) = \{\tilde{A}_c - \tilde{B}_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^* \tilde{S}\} \hat{x}(t), \quad \hat{x}(t) \in \mathcal{X} \quad (50)$$

は, つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= \{\tilde{A}_c + \tilde{B}_2(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \tilde{B}_2^T W_0^{-1} W_1(0)\} x^0(t) \\ &+ \tilde{B}_2(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \tilde{B}_2^T W_0^{-1} \int_0^h W_1(\tau) B_1 x^1(t, \tau) d\tau \\ &+ B_1 x^1(t, 0) \end{aligned} \quad (51a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x^1(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} x^1(t, \alpha), \quad x^1(t, h) = 0 \quad (51b)$$

ここで状態は, $\hat{x}(t) = (x^0(t), x_t^1)$, $x_t^1(\alpha) = x^1(t, \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq h$) と定めている。□

(証明) 付録 B. □

(注 3) 任意の時刻 t_0, t_1 において, $r(t_1) = \Phi_\gamma(t_1, t_0)r(t_0)$ が成り立つことを意味する。

(定理 1 の証明) ($\Rightarrow$) 条件 (A) の下, (B), (C) から (bc1), (bc2) が導かれることを示す。補題 3 により, 条件 (B) から (bc1) は直接導かれる。そこで以下では, 条件 (B), (C) が成り立てば (bc2) が成り立つことを示す。

条件 (B) と補題 4 から, (17) 式の半正定な安定化解は (33) 式のように与えられ, 作用素 $\mathcal{P}\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 (\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2)^{-1} (\mathcal{G}\Xi)$ と, その順序を変更した

$$\mathcal{T} = (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 (\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2)^{-1} \quad (52)$$

の非零の固有値は一致する。条件 (C) より, 作用素

$$\begin{aligned} \mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{T} &= \left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \right\} \\ &\times (\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2)^{-1} \end{aligned} \quad (53)$$

は可逆であり, (53) 式右辺に含まれる作用素 (47) も可逆になるので, 補題 6 より行列 (43) は正則である。

一方, 条件 (A), (B), (C) と補題 5 から, 作用素 Riccati 方程式 (35) は安定化解 $\tilde{S} \geq 0$ をもち, (38), (40) 式と $w = 0$ により定めた閉ループ系 (50) は安定である。補題 7 により, 系 (50) は (51) 式のように表わされ, 特に時刻 $t > h$ では,

$$\dot{x}^0(t) = \{\tilde{A}_c + \tilde{B}_2(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \tilde{B}_2^T W_0^{-1} W_1(0)\} x^0(t) \quad (54a)$$

$$x^1(t, \alpha) = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq h) \quad (54b)$$

となる。よって, 行列 $\tilde{A}_c + \tilde{B}_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^T W_0^{-1} W_1(0)$ は安定であり, 条件 (bc2) が示された。

($\Leftarrow$) 条件 (A) の下, (bc1), (bc2) から (B), (C) が導かれることを示す。条件 (bc1), (bc2) と補題 6, 7 により, 作用素 (47) は可逆であり, 作用素 (46) は (35) 式の解になる。一方, 条件 (bc2) と補題 7 により, 系 (50) は安定である。よって, (35) 式が Lyapunov 方程式

$$\begin{aligned} \tilde{S} \tilde{A}_c^{cl} \phi + \tilde{A}_c^{cl*} \tilde{S} \phi + \tilde{Q} \phi &= 0, \quad \phi \in \mathcal{X}, \\ \tilde{A}_c^{cl} &:= \tilde{A}_c - \tilde{B}_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^* \tilde{S}, \\ \tilde{Q} &:= \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{S} \tilde{B}_1(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \tilde{B}_1^* \tilde{S} \\ &+ \tilde{S} \tilde{B}_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^* \tilde{S} + \mathcal{C}_1^* N_c \mathcal{C}_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (55)$$

に書き換えられることに注意すれば, (46) 式で定めた作用素 $\tilde{S}$ が半正定であることが示される¹⁸⁾。また, 作用素 $\mathcal{P}\tilde{S}$ ($\mathcal{P} \geq 0, \tilde{S} \geq 0$) は負の固有値をもたず, その乗算の順序を変更した

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}} &= (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \\ &\times \left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (56)$$

も負の固有値をもたない。よって, 作用素

$$\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{\mathcal{T}} = (\mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^* \mathcal{V}_2)$$

$$\times \left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^*\mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^*\mathcal{V}_2 \right\}^{-1} \quad (57)$$

は可逆であり, (57) に含まれる作用素 (32) も可逆になるので, 補題 3, 4 から方程式 (17) は安定化解 $\mathcal{S}$ をもつ. さらに (16), (17), (35) 式から, 等式

$$\tilde{\mathcal{A}}_S \left(\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}} \right) = \left(\mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}} \right) \mathcal{A}_S \quad (58)$$

が導かれ, $\mathcal{S}$ を (17) 式の安定化解とすれば, $\mathcal{A}_S$ は指数安定な半群を生成する. よって, $\tilde{\mathcal{A}}_S$ も指数安定な半群を生成し, (46) 式で定めた作用素 $\tilde{\mathcal{S}}$ は, (35) 式の安定化解になる. 以上の結果から, 条件 (A), (bc1), (bc2) が成り立つとき, 方程式 (35) は半正定な安定化解 $\tilde{\mathcal{S}} \geq 0$ をもち, 補題 5 から (B), (C) が導かれた. $\square$

3.2 設計法と制御則の性質

2 章および 3.1 節の考察により, 可解条件 (A), (B), (C) (補題 1) の判定法が与えられ, 補助的な Riccati 作用素方程式 (35) の解法が示された. 本節ではこれらの結果から制御則を導き, 設計法をまとめる. また, 正確な予見情報を仮定した従来の結果との関係を明らかにする.

作用素方程式 (16), (35) の解析解 (21), (46) を用いると, H^∞ 予見制御問題 $\mathbf{P}_c$ の解法は, つぎのように求められる. 《定理 2》 定数 $\gamma > 0$ に対して, H^∞ 予見制御問題 $\mathbf{P}_c$ が可解である必要十分条件は, 補題 2 の条件 (a), 定理 1 の条件 (bc1), (bc2) が成り立つことである. そして, 条件 (a), (bc1), (bc2) が成り立つとき, H^∞ 予見制御則はつぎのように与えられる.

$$u(t) = K_0 \underline{x}(t) + \int_0^h K_1(\tau) \underline{w}(t, \tau) d\tau \quad (59a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \mathcal{A}\underline{x}(t) + B_1 \underline{w}(t, 0) + B_2 u(t) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \cdot P_0 C_1^T (C_1 \underline{x}(t) + D_{12} u(t)) \\ &\quad + L_0 (y_0(t) - C_2 \underline{x}(t)) \end{aligned} \quad (59b)$$

$$\underline{w}(t, \tau) = \int_\tau^h L_1(\tau, \alpha) y^1(t + \tau - \alpha, \alpha) d\alpha \quad (59c)$$

$$K_0 := -D_{12}^+ C_1 + (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^T W_0^{-1} W_1(0)$$

$$K_1(\tau) := (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^T W_0^{-1} W_1(\tau) B_1$$

$$L_0 := P_0 C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

$$L_1(\tau, \alpha) := P_1(\tau) E^T(\alpha) (F(\alpha) F^T(\alpha))^{-1}$$

ここで, $\tilde{B}_2$, W_0 , $W_1(\cdot)$ は (41), (43), (44) 式で定めた行列である. $\square$

(証明) 補題 1, 2, 5 と定理 1 から, H^∞ 予見制御問題 Σ_c が可解である必要十分条件は, (a), (bc1), (bc2) が成り立つことである.

制御則 (59) を求めるために, はじめに (18b) 式からオペザバ (59b), (59c) を導く. (18b) 式を,

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathcal{A}\underline{x}(t) + B_2 u(t) + g(t) \quad (60)$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P} C_1^* (C_1 \hat{\underline{x}}(t) + D_{12} u(t)) \\ &\quad + \mathcal{P} C_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-1} (\hat{y}(t) - C_2 \hat{\underline{x}}(t)) \end{aligned} \quad (61)$$

と書き換え, 任意の $\psi \in \mathcal{V}^*$ に対して $\langle \psi, \dot{\underline{x}}(t) \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} = \langle \psi, \mathcal{A}\underline{x}(t) + B_2 u(t) + g(t) \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}$ が成り立つことに注意すると, つぎの表現が求められる.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathcal{A}\underline{x}(t) + B_1 \underline{w}(t, 0) + B_2 u(t) + g^0(t) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} g^0(t) &= \frac{1}{\gamma^2} \cdot P_0 C_1^T (C_1 \underline{x}(t) + D_{12} u(t)) \\ &\quad + L_0 (y_0(t) - C_2 \underline{x}(t)) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{w}(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{w}(t, \alpha) + g^1(t, \alpha), \quad \underline{w}(t, h) = 0 \quad (64)$$

$$g^1(t, \alpha) = L_1(\alpha, \alpha) (y_1(t, \alpha) - E(\alpha) \underline{w}(t, \alpha)) \quad (65)$$

ここで, $\hat{\underline{x}}(t) = (\underline{x}(t), \underline{w}(t, \cdot))$, $g(t) := (g^0(t), g^1(t, \cdot))$ である. よって, (62), (63) 式から (59b) 式が導かれ, (64), (65) 式の解が (59c) 式になることが示される.

つぎに, 表現

$$\begin{aligned} u &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (\mathcal{B}_2^* \mathcal{S} + D_{12}^T C_1) \\ &\quad \times \left(\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S} \right)^{-1} g, \quad u \in \mathbb{R}^{m_2}, g \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (66)$$

を整理し, フィードバック則 (59a) を導く. (36) 式と等式

$$\left(\mathcal{I} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\mathcal{S} \right)^{-1} = \mathcal{I} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{P}\tilde{\mathcal{S}} \quad (67)$$

を用いると, (66) 式はさらに

$$u = -D_{12}^+ C_1 g - (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^* \tilde{\mathcal{S}} g \quad (68)$$

と変形される. よって, 補題 7 と以下の対応

$$u \leftarrow u(t), \quad g = (g^0, g^1) \leftarrow (\underline{x}^0(t), \underline{w}(t, \cdot)) \quad (69)$$

から, フィードバック則 (59a) が導かれる. $\square$

定理 2 により, 情報の不確かさを考慮した H^∞ 予見制御問題 $\mathbf{P}_c$ に対して, 可解条件と制御則の構成法が導かれた. 予見情報に不確かさを想定していない場合^{5), 7)} と比較して, 制御則 (59) には予見情報の推定値 $\underline{w}(t, \cdot)$ を得るためにスモウザ ((59c) 式) が含まれていることが観察される. また, (59c) 式は (64), (65) 式と等価であり, 特に $y^1(t, \cdot)$, $\underline{w}(t, \cdot)$ をスカラ関数とすると, 単管熱交換器の動特性と類似性がある. 証明中の (64), (65) 式に着目すると, ‘内管温度’ $\underline{w}(t, \alpha)$ は ‘周囲温度’ との差 $y^1(t, \alpha) - E(\alpha) \underline{w}(t, \alpha)$ により影響を受け, 変化速度は ‘熱伝導率’ $L_1(\alpha, \alpha)$ により定まる. そして, 定理 2 中の定義から, $F(\alpha)$ が大きな値を取り予見情報の確度が下がる場合には, ‘熱伝導率’ $L_1(\alpha, \alpha)$ も小さな値になり, 予見情報の推定値 $\underline{w}(t, \alpha)$ の更新が抑制されることがわかる. これらの制御則の構造は, 予見情報の不確かさを想定する問題

において、はじめて現れたものである。

以下では、定理 2 に導かれた結果に対して $F(\cdot) \rightarrow 0$ の極限をとると、正確な予見情報を扱った結果⁵⁾が導かれることを示す。

(1) 式の記述において、

$$F(\cdot) = \epsilon \cdot I, \quad v^1(t, \cdot) = 0 \quad (\forall t \geq 0) \quad (70)$$

と定めた問題に着目し、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたときに得られる可解条件と対応する制御則を調べる。

系 Σ_c に条件 (70) を設けると、行列値関数 (20) は、

$$\begin{aligned} P_1(\tau) &= \left(I + \frac{1}{\epsilon^2} \cdot M(\tau) \right)^{-1} \\ &= (\epsilon^2 \cdot I + M(\tau))^{-1} (\epsilon^2 \cdot I + M(\tau) - M(\tau)) \\ &= I - (\epsilon^2 \cdot I + M(\tau))^{-1} M(\tau) \end{aligned} \quad (71)$$

$$M(\tau) := \int_{\tau}^h E^T(\alpha) E(\alpha) d\alpha \quad (0 \leq \tau \leq h) \quad (72)$$

と表わされる。そして、 $M^+(\tau)$ を $M(\tau)$ の疑似逆行列とすると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^2 \cdot I + M(\tau))^{-1} M(\tau) = M(\tau) M^+(\tau), \quad (73)$$

が成り立つので (文献 19), 定理 12.1), (71) 式において $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば、

$$P_1(\tau) = I - M(\tau) M^+(\tau) \quad (74)$$

が導かれる。よって、 $F(\cdot) = 0$ とした場合、(a), (bc1), (bc2) に対応する条件は、(74) 式を用いれば得られる。

条件 (70) の下で、予見情報の推定値 (59c) は、

$$\underline{w}(t, \tau) = (\epsilon^2 \cdot I + M(\tau))^{-1} M(\tau) w(t + \tau) \quad (75)$$

と表わされ、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすると、

$$\underline{w}(t, \tau) = M(\tau) M^+(\tau) w(t + \tau) \quad (76)$$

が得られる。関数 $M(\tau) M^+(\tau)$ は正確な予見情報を扱う場合の予見可能区間を表わしており、(59c) 式を (76) 式に置き換えれば、対応する予見制御則が導かれる。

これらの結果は、文献 13) 例題 (a), (b) で調べたような複数の予見情報を扱う問題にも適用が可能であり、(1d) 式を適切に定めれば、対応する予見制御則、さらには正確な予見情報を扱う問題との関係を調べることができる。以下の例題では、予見情報に欠落がある場合に着目し、対応する制御則の性質を調べる。

[例題] (予見情報に欠落がある場合) 予見情報が区間 $[d, d + \delta] \subset [0, h]$ で欠落する場合を、

$$E(\alpha) = \begin{cases} I_{\ell} & \alpha \in [0, d], [d + \delta, h] \\ 0_{\ell \times \ell} & \alpha \in [d, d + \delta] \end{cases} \quad (77)$$

$$(0 \leq d \leq d + \delta < h)$$

により定め、対応する設計法を調べる。このとき、 $L_1(\tau, \alpha) = 0$

($d \leq \alpha \leq d + \delta$) となるから、予見制御則 (59) は推定則 (59c) を

$$\begin{aligned} \underline{w}(t, \tau) &= \int_{\min(\tau, d)}^d L_1(\tau, \alpha) y^1(t + \tau - \alpha, \alpha) d\alpha \\ &\quad + \int_{\max(\tau, d + \delta)}^h L_1(\tau, \alpha) y^1(t + \tau - \alpha, \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (78)$$

と書き換えたものになる。さらに $F(\cdot) = 0$ とした予見情報が正確な場合には、(73), (76) 式から、 $M(\tau) M^+(\tau) = I$, $\underline{w}(t, \tau) = w(t + \tau)$ ($0 \leq \tau \leq h$) が成り立ち、全区間の予見情報が回復する。これは、予見情報が区間 $[d, d + \delta] \subset [0, h]$ で欠落しても、外乱 $v^1(t, \cdot)$ が印加されなければ、時刻 t における予見情報 $w(t + h)$ が時刻 $t + \tau$ ($0 \leq \tau \leq h$) において、 $w((t + \tau) + (h - \tau))$ として利用できるためである。□

4. 数 値 例

つぎの H^∞ 予見制御問題を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ z(t) &:= \begin{bmatrix} z_s(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y^0(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 0.01 \cdot v^0(t) \\ y^1(t, \alpha) &= w(t + \alpha) + F(\alpha) v^1(t, \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq h) \end{aligned} \quad (79)$$

ここで、 $y^1(t, \cdot)$ は各時刻に入手できる予見情報であり、 $v^1(t, \cdot)$ は不確かな外乱、 $F(\cdot)$ はその強度を表現する重みである。本例題は、文献 14) において基本的な性質が調べられ、 $F(\cdot)$ が一定値をとる場合と以下の (Case 2) の関係が述べられている。本章では、予見情報の不確かさが一定のエネルギーをもつ場合 (Case 1) について新たに示し、既報 14) の結果と比較する。はじめに、

(Case 1) 不確かさが一定のエネルギーをもつ場合

$$F(\alpha) := (1/\sqrt{h}) \cdot F_0, \quad F_0 = 0.1 \sim 5.0 \quad (0 < h \leq 5)$$

に着目し、(4) 式の H^∞ 制御性能と予見情報の不確かさ F_0 の関係を調べる。ここで (Case 1) は、予見情報 $y^1(t, \cdot)$ の中に、一定のエネルギーをもつ不確かさが含まれる場合であり、予見時間 h が長くなる程、予見情報全体への不確かさの影響は小さくなる。定理 2 を適用すると、(4) 式に対する最適な制御性能 γ_{opt} と予見時間 h の関係は、Fig. 2 のように求められる。いずれの F_0 においても予見時間 h を長くするほど、制御性能は上がるが、特に予見情報の確度が低い場合 (たとえば $F_0 = 3.0, 5.0$)、性能の大きな改善は期待できない。また、 $F_0 = 0.1 \sim 0.5$ においては、予見信号に含まれる不確かさのエネルギーと、性能が限界に達する予見時間の値がほぼ比例している。

予見時間を $h = 2.0$, 制御性能を $\gamma_{\text{opt}} \times 1.1$ と定めて Fig. 1

Fig. 2 H^∞ performance γ_{opt} vs. preview time h (preview control with constant energy noise)

Fig. 3 Impulse responses of the preview control system ($h = 2.0$)

の予見制御系を構成すると、インパルス応答は **Fig. 3** のように求められた。これらの結果から、予見情報の確度が高い $F_0 = 0.1$ の場合には、インパルス入力の影響を積極的に抑制する予見動作が見られるが、 $F_0 = 1.0, 2.0$ のように、より大きな予測誤差が見込まれる場合、予見的な動作は抑制的になり、むしろフィードバック制御とのバランスをとる傾向が観察される。

つぎに、不確かさの特性を変えた

(Case 2) 不確かさが一定のパワーをもつ場合

$$F(\alpha) := \sqrt{h} \cdot F_0, \quad F_0 = 0.1 \sim 5.0 \quad (0 \leq h \leq 5)$$

を調べる。これは、単位予見時間当たりの不確かさの強度を定めたものであり、一定のパワーをもつ不確かさを想定したことになる。本条件は文献 14) で定めたものであるが、3 章の結果を検証し、(Case 1) と対比させるために最小限の結果を示している。定理 2 を適用すると、最適な制御性能 γ_{opt} と予見時間 h の関係は **Fig. 4** のように求められ、本条件の場合には、不確かさの重み F_0 にかかわらず、予見時間 $h = 0.7 \sim 1.0$ の付近で性能改善の限界に達している。

(Case 1), (Case 2) の結果から、予見情報に含まれる不確かさのエネルギーとパワーは、性能改善に必要な予見時間に

Fig. 4 H^∞ performance γ_{opt} vs. preview time h (preview control with constant power noise)

直接影響を及ぼし、予見情報の質と制御の間に指標を与えると考えられる。

5. おわりに

本論文では、予見情報に不確かさが含まれる H^∞ 制御問題の定式化を行ない、その可解条件と制御則の構成法を明らかにした。ここで扱った予見制御問題は、予見可能な情報に関数型の外乱を印加したものであり、時々刻々と更新される予見情報から、制御系に適した予見情報を抽出し、制御に活かすことが可能になる。また可解条件は、集中定数系においてよく知られた解法とは異なるものの、作用素の固有値計算を回避する実際的な条件が導かれることを示した。

今後、予見不確かさとロバスト性の間に見通しの良い指標を導き、結果を、人間・機械系のアシスト制御、自然環境の変化を想定した系統制御問題（負荷周波数制御、系統安定化制御）に適用する予定である。

謝辞 本研究の一部は、JST CREST JPMJCR15K1 および科学研究費補助金 (C) 26420423 により行なわれた。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 早勢, 市川: 目標値の未来値を最適に利用する追従制御, 計測自動制御学会論文集, **5-1**, 86/94 (1969)
- 2) M. Tomizuka: Optimal continuous finite preview problem, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-20-3**, 362/365 (1975)
- 3) K. Hashikura: H^2/H^∞ controller design for input-delay and preview systems based on state decomposition approach, Doctoral dissertation, Tokyo Metropolitan University (2014)
- 4) K. Hashikura, A. Kojima and Y. Ohta: On construction of an H^∞ preview output feedback law, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, **6-3**, 167/176 (2013)
- 5) A. Kojima: H^∞ controller design for preview and delayed systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-60-2**, 404/419 (2015)
- 6) A. Kojima and S. Ishijima: H^∞ performance of preview control systems, Automatica, **39-4**, 693/701 (2003)

- 7) A. Kojima and S. Ishijima: Formulas on preview and delayed H^∞ control, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-51-12**, 1920/1937 (2006)
- 8) M. Kristalny: Exploiting previewed information in estimation and control, Ph.D. dissertation, Faculty of Mechanical Engineering, Technion-IIT, Aug. (2010)
- 9) L. Mirkin: On the H^∞ fixed-lag smoothing: How to exploit the information preview, Automatica, **39-8**, 1495/1504 (2003)
- 10) A.A. Moelja and G. Meinsma: H_2 control of preview systems, Automatica, **42-4**, 945/952 (2006)
- 11) U. Shaked and C.E. de Souza: Continuous-time tracking problems in an H^∞ setting: A game theory approach, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-40-5**, 841/852 (1995)
- 12) G. Tadmor and L. Mirkin: H^∞ control and estimation with preview—Part I: Matrix ARE solutions in continuous time, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-50-1**, 19/28 (2005)
- 13) 児島, 端倉: 予見情報の不確かさを考慮した H^∞ 推定器の構成, 計測自動制御学会論文集, **52-2**, 86/92 (2016)
- 14) A. Kojima: H^∞ preview control with uncertain information, Proc. 54th IEEE Conference on Decision and Control, 6643/6649 (2015)
- 15) A.J. Pritchard and D. Salamon: The linear-quadratic control problem for retarded systems with delays in control and observation, IMA J. Math. Contr. Inform., **2-4**, 335/362 (1985)
- 16) A.J. Pritchard and D. Salamon: The linear quadratic control problem for infinite dimensional systems with unbounded input and output operators, SIAM J. Contr. Optim., **25-1**, 121/144 (1987)
- 17) B. van Keulen: H^∞ -control for distributed parameter systems: A state-space approach, Birkhäuser (1993)
- 18) R. Datko: Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert space, J. Mathematical Analysis and Applications, **32-3**, 610/616 (1970)
- 19) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 339, コロナ社 (1978)
- 20) K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice Hall (1996)

《付 録》

A. 補題 6 の証明

対偶により, 作用素 (47) が零固有値をもつ必要十分条件は, 行列 (43) が非正則であることを示す. 条件

$$\exists w \neq 0:$$

$$\left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi\mathcal{G}^*\mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi)\mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^*\mathcal{V}_2 \right\} w = 0 \quad (\text{A.1})$$

は, つぎの 3 式を満たす $w \neq 0$ が存在することに等しい.

$$\exists w \neq 0: \mathcal{V}_1 w = \mathcal{G}(v - \Pi f) \quad (\text{A.2})$$

$$f = \mathcal{G}^*\mathcal{V}_2 w \quad (\text{A.3})$$

$$v = \Xi\mathcal{P}\Xi^* f \quad (\text{A.4})$$

そこで, 行列 (43) が非正則になることと, (A.2)~(A.4) 式を満たす $w \neq 0$ が存在することが等価な条件であることを示す. 補助変数

$$p(\xi) = e^{A_c \xi} v^0 + \int_0^\xi e^{A_c(\xi-\alpha)} \{v^1(\alpha) - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T f^1(\alpha)\} d\alpha \quad (\text{A.5})$$

$$q(\alpha) = e^{A_c^T(h-\alpha)} V_2 w^0 + \int_\alpha^h e^{A_c^T(\xi-\alpha)} C_1^T N_c C_1 w^1(\xi) d\xi \quad (\text{A.6})$$

を (A.2), (A.3) に導入すると, 等式

$$p'(\xi) = A_c p(\xi) + v^1(\xi) - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T f^1(\xi) \quad (\text{A.7})$$

$$p(0) = v^0 \quad (\text{A.8})$$

$$V_1 w^0 = p(h) \quad (\text{A.9})$$

$$w^1(\xi) = p(\xi) \quad (\text{A.10})$$

$$q'(\alpha) = -A_c^T q(\alpha) - C_1^T N_c C_1 w^1(\alpha) \quad (\text{A.11})$$

$$q(h) = V_2 w^0 \quad (\text{A.12})$$

$$f^0 = q(0) \quad (\text{A.13})$$

$$f^1(\alpha) = q(\alpha). \quad (\text{A.14})$$

が得られ, (A.4) 式から,

$$v^0 = P_0 f^0 \quad (\text{A.15})$$

$$v^1(\alpha) = B_1 P_1(\alpha) B_1^T f^1(\alpha) \quad (\text{A.16})$$

が得られる. さらに, (A.7), (A.16), (A.14), (A.11), (A.10) 式をまとめると微分方程式

$$\begin{bmatrix} p'(\xi) \\ q'(\xi) \end{bmatrix} = H_\gamma(\xi) \begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

が得られ, (A.9), (A.12) 式と (A.8), (A.15), (A.13) 式から, つぎの境界条件が得られる^(注4).

$$U \begin{bmatrix} p(h) \\ q(h) \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} \cdot P_0 \\ I \end{bmatrix} q(0) \quad (\text{A.18})$$

いま $q(0) = 0$ が成り立つとすると, (A.18), (A.17) 式と (A.9), (A.12), (A.10) 式から $(p, q) = 0$, $[V_1^T \ V_2^T]^T w^0 = 0$, $w^1 = 0$ が導かれ, $V = [V_1^T \ V_2^T]^T$ は (27) 式の定義から列最大階数をもつ. よって, $q(0) = 0$ ならば $w = (w^0, w^1) = 0$ が成り立つ. 逆に $w = (w^0, w^1) = 0$ が成り立つとすると, (A.3), (A.13) 式から, $q(0) = 0$ が導かれる.

以上のことから, $w \neq 0$ に対して (A.1) 式が成り立つ必要十分条件は, (A.17), (A.18) 式を満たす $q(0) \neq 0$ が存在することである. すなわち, 作用素 (47) が可逆である必要十分条件は, 行列 (43) が正則であることが示された. $\square$

B. 補題 7 の証明

つぎの Hamilton 作用素 $\mathcal{H}^o \in \mathcal{L}(\mathcal{W}^o \times \mathcal{X}^o, \mathcal{L}(\mathcal{X}^o \times \mathcal{X}^{o*}))$:

(注4) (27) 式に定めた行列 V と (45) 式の行列 U の間に $UV = 0$ が成り立つことを用いている. 文献 20) Proof of Theorem 13.5 による.

$$\mathcal{H}^o = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_c^o & \frac{1}{\gamma^2} \cdot \mathcal{B}_1^o \mathcal{B}_1^{o*} - \mathcal{B}_2^o (D_{12}^T D_{12})^{-1} \mathcal{B}_2^{o*} \\ -\mathcal{C}_1^{o*} N_c \mathcal{C}_1^o & -\mathcal{A}_c^{o*} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

を導入する．ここで $\mathcal{A}_c^o$ は、

$$\mathcal{A}_c^o \phi = \begin{bmatrix} A_c \phi^0 \\ \phi^{1'} \end{bmatrix}, \quad D(\mathcal{A}_c^o) = \{\phi \in \mathcal{X}^o : \phi^1 \in W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^n), \phi^0 = \phi^1(h)\} \quad (\text{B.2})$$

と定めた無限小生成作用素であり、 $\mathcal{W}^o := D(\mathcal{A}_c^o)$ を $\mathcal{X}^o$ の部分空間とすれば、 $D_{\mathcal{W}^o}(\mathcal{A}_c^o) = \mathcal{X}^o$ が成り立ち、空間 $\mathcal{W}^o, \mathcal{X}^o$ は、 $\mathcal{W}^o \subset \mathcal{X}^o$ と稠密に埋め込まれている (文献 15), Remark 2.6). そして、 $\mathcal{G}\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X}^o)$ と $\mathcal{G}\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{W}^o)$ が成り立つことから、作用素 $\mathcal{B}_1^o \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X}^o)$, $\mathcal{B}_2^o \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_2}, \mathcal{X}^o)$, $\mathcal{C}_1^o \in \mathcal{L}(\mathcal{W}^o, \mathbb{R}^{p_1})$ は、

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^o &:= \mathcal{G}\Xi \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_2^o := \mathcal{G}\Xi \mathcal{B}_2, \\ \mathcal{C}_1^o \phi &= C_1 \phi^1(0), \quad \phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{W}^o \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

と与えられ、等式

$$(\mathcal{G}\Xi) \mathcal{A}_c \phi = \mathcal{A}_c^o (\mathcal{G}\Xi) \phi, \quad \mathcal{C}_1 \phi = \mathcal{C}_1^o (\mathcal{G}\Xi) \phi, \quad \phi \in \mathcal{X} \quad (\text{B.4})$$

が (B.2), (B.3) 式から導かれる．

文献 5) Lemma 16 により、条件 (bc1) の下、つぎの等式が成り立つことが示されている．

$$\mathcal{H}^o \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} \phi = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} \mathcal{A}_{\Lambda_c}^o \phi, \quad \phi \in D(\mathcal{A}_{\Lambda_c}^o),$$

$$\mathcal{A}_{\Lambda_c}^o \phi = \begin{bmatrix} \Lambda_c \phi^0 \\ \phi^{1'} \end{bmatrix},$$

$$D(\mathcal{A}_{\Lambda_c}^o) = \{\phi \in \mathcal{X}^o : \phi^1 \in W^{1,2}(0, h; \mathbb{R}^n), V_1 \phi^0 = \phi^1(h)\},$$

$$\Lambda_c : (27) \text{ 式で定めた安定行列} \quad (\text{B.5})$$

ここで、 $\mathcal{A}_{\Lambda_c}^o$ は指数安定な半群を生成する．そこで、作用素

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

を用いて、(B.5) 式につぎの変形

$$\mathcal{F} \mathcal{H}^o \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} \phi = \mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} \mathcal{A}_{\Lambda_c}^o \phi,$$

$$\phi \in D(\mathcal{A}_{\Lambda_c}^o)$$

を施せば、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^o \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} \phi \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} \mathcal{A}_{\Lambda_c}^o \phi, \\ \phi \in D(\mathcal{A}_{\Lambda_c}^o) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\tilde{\mathcal{H}}^o := \mathcal{F} \mathcal{H}^o \mathcal{F}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_c^o & \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_1^o (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^*)^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_1^{o*} \\ -\mathcal{C}_1^{o*} N_c \mathcal{C}_1^o & -\tilde{\mathcal{B}}_2^o (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_2^{o*} \\ & -\tilde{\mathcal{A}}_c^{o*} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_c^o := \mathcal{A}_c^o + \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P} \mathcal{C}_1^* N_c \mathcal{C}_1^o$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_1^o := (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P} \mathcal{C}_2^*$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_2^o := \mathcal{B}_2^o + \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P} \mathcal{C}_1^* D_{12} \quad (\text{B.8})$$

が得られる．よって、作用素

$$\tilde{\mathcal{S}}^o = \mathcal{V}_2 \left\{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{G}\Pi \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot (\mathcal{G}\Xi) \mathcal{P}(\mathcal{G}\Xi)^* \mathcal{V}_2 \right\}^{-1} \quad (\text{B.9})$$

は、対応する作用素 Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}^o \tilde{\mathcal{A}}_c^o \phi + \tilde{\mathcal{A}}_c^{o*} \tilde{\mathcal{S}}^o \phi + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \tilde{\mathcal{S}}^o \tilde{\mathcal{B}}_1^o (\mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^*)^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_1^{o*} \tilde{\mathcal{S}}^o \phi \\ - \tilde{\mathcal{S}}^o \tilde{\mathcal{B}}_2^o (D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_2^{o*} \tilde{\mathcal{S}}^o \phi + \mathcal{C}_1^{o*} N_c \mathcal{C}_1^o \phi = 0, \quad \phi \in \mathcal{W}^o \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

の安定化解になり、(B.3), (B.4) 式の関係を用いれば、 $\tilde{\mathcal{S}} = (\mathcal{G}\Xi)^* \tilde{\mathcal{S}}^o (\mathcal{G}\Xi)$ すなわち作用素 (46) が、(35) 式の解になることが示された．

つぎに (48) 式から (49) 式を導く．(46) 式の解析解を用いると、(48) 式の関係は、つぎのように表わされる．

$$u = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_2^T \Xi^* f \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{V}_1 w = \mathcal{G}(v - \Pi f) \quad (\text{B.12})$$

$$f = \mathcal{G}^* \mathcal{V}_2 w \quad (\text{B.13})$$

$$v = \Xi \mathcal{P} \Xi^* f + \Xi g \quad (\text{B.14})$$

そこで、(B.11)~(B.14) 式の関係から、(49) 式を導く．補助変数 (A.5), (A.6) を導入すると、(B.12), (B.13) 式から、(A.7)~(A.14) と同一の式が得られ、(B.11), (B.14) 式からは、

$$u = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_2^T f^0 \quad (\text{B.15})$$

$$v^0 = P_0 f^0 + g^0 \quad (\text{B.16})$$

$$v^1(\alpha) = B_1 P_1(\alpha) B_1^T f^1(\alpha) + B_1 g^1(\alpha) \quad (\text{B.17})$$

が得られる．さらに、(A.7), (A.16), (A.14), (A.11), (A.10) 式から、

$$\begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix} = \Phi_\gamma(\xi, 0) \begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix} + \int_0^\xi \Phi_\gamma(\xi, \tau) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} B_1 g^1(\tau) d\tau \quad (\text{B.18})$$

が得られ、(A.8), (A.15), (A.13), (A.9), (A.12) 式から、境界条件

$$\begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} \cdot P_0 \\ I \end{bmatrix} q(0) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} g^0 \quad (\text{B.19})$$

$$U \begin{bmatrix} p(h) \\ q(h) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.20})$$

が得られる．ここで $\Phi_\gamma(\cdot, \cdot)$ は，(42) 式に定めた状態遷移行列である．(B.18) 式に $\xi = h$ と (B.19) 式を代入し，左から U をかけると，等式

$$W_0 q(0) + W_1(0)g^0 + \int_0^h W_1(\tau)B_1 g^1(\tau) d\tau = 0 \quad (\text{B.21})$$

が得られ， W_0 が補題 6 により可逆であることを用いると，(B.15), (A.13), (B.21) 式から (49) 式が導かれる．

系 (50) は，

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}_c \hat{x}(t) + \tilde{B}_2 u(t), \quad \hat{x}(0) \in \mathcal{X} \quad (\text{B.22})$$

$$u(t) = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} \tilde{B}_2^* \tilde{S} \hat{x}(t) \quad (\text{B.23})$$

と与えられ，さらに (B.22) 式は

$$\dot{x}^0(t) = \tilde{A}_c x^0(t) + B_1 x^1(t, 0) + \tilde{B}_2 u(t) \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x^1(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} x^1(t, \alpha), \quad x^1(t, h) = 0 \quad (\text{B.25})$$

と表わされる．(49) 式の関係を用いて (B.23) 式に用いれば，(51) 式が求められる． $\square$

[著 者 紹 介]

児 島 晃 (正会員)

1991 年早稲田大学大学院理工学研究科博士後期課程修了．同年，東京都立科学技術大学講師．97 年同助教授．2004 年首都大学東京教授となり，現在に至る．2000～2001 年，スイス連邦工科大学 (ETH) 自動制御研究所客員研究員．予見制御・モデル予測制御とその応用，ロバスト制御，むだ時間系・分布系の制御法に関する研究に従事．工学博士．Automatica, IET J. Control Theory and Applications の Associate Editor．IEEE, システム制御情報学会，日本鉄鋼協会，電気学会の会員．

端 倉 弘太郎 (正会員)

2006 年九州工業大学工学部機械知能工学科卒業．2010 年京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻修士課程修了．2014 年首都大学東京大学院システムデザイン研究科博士後期課程修了．同年，首都大学東京システムデザイン研究科特任助教．予見・予測制御理論とその応用に関する研究に従事．博士 (工学)．IEEE, システム制御情報学会の会員．