パラメータ変動に対してロバストな LQ 最適制御の枠組みの提案

藤 本 健 治*・大 倉 裕 貴*

A New Framework of Robust LQ Optimal Control for Parameter Variation

Kenji FUJIMOTO* and Yuki OKURA*

This paper proposes a new framework to design LQ optimal control laws robust to parameter variation. By constructing the variational system of the original state space model with respect to a model parameter, we evaluate the sensitivity of the system behavior with respect to parameter variation. Some properties of the variational system, such as stability and controllability, are examined. A sufficient condition to realize robust LQ optimal control is obtained by investigating the controllability of the variational system. A numerical example exhibits how the proposed control method works with controllability analysis.

Key Words: LQ optimal control, trajectory planning, robust control

1. はじめに

軌道計画において、省エネルギーのために制御入力を小さくする軌道を設計することが望まれる。そのための制御手法の一つとして、与えられた評価関数を最小にする軌道を求める最適制御の枠組みが考えられてきた¹⁾。また、エネルギー効率の向上を図るために軽量で、構造が複雑な機械システムの開発がなされてきたが、システムが軽量、複雑な構造になればなるほど、物理的なモデルパラメータを正確に求めることが困難となる。状態が観測でき、フィードバック制御を行なえる場合には、想定していたモデルのパラメータと実際のシステムのパラメータに少々ずれがあっても制御が可能であるが、フィードフォワード制御においては、パラメータのずれが原因で、望みの状態の操作とかなり異なる操作結果になる可能性もある。そこで、実際の物理モデルのパラメータが想定したものと少々ずれていたとしてもうまく制御できるよう、パラメータの不確かさに対してロバストな制御についての検討が重要になる。

時間最適を考慮したバンバン制御^{2),3)}や制振制御⁴⁾などの特定の枠組みでは、パラメータの不確かさに対してロバストな制御について研究がなされている。また、不確かなパラメータに対してパラメータによる微分を考えることでロバストな時間最適制御を行なう手法⁵⁾もある。しかしながら、特定のパラメータに対するロバスト性のみについて議論がされており、どのパラメータであれば変動による影響を抑制できるか

についての性質の考察はなされておらず、時間最適制御以外の一般的な最適制御問題に対する解法は得られていない。

本論文では、与えられた状態空間モデルにおいて、パラメータの微小変動に対する状態変数の変分の挙動を考え、ノミナルな状態変数とその変分の挙動を表わす変数を合わせて構成される拡大系を導く。この拡大系を用いることで、パラメータ変動によって引き起こされるシステムの振る舞いを正確に記述することができる。したがって、ノミナルの状態変数に対して目的の最適制御を実行する際に、変分の状態変数ができるだけ小さく抑えられるように制御を行なうことができれば、パラメータ変動に強いフィードフォワード型の最適制御を行なうことが期待できる。ここではこのようなアイデアに基づいてパラメータ変動に対してロバストな最適制御を行なう手法を提案する。しかし上記の枠組みにおいて、ノミナルの制御系が可制御であったとしても、一般に変分を表わす状態変数を含めた拡大系が可制御となるとは限らず、パラメータ変動の影響をすべて抑制できるわけではない。本論文では変動抑制制御が可能となるか否かを、カルマンの正準分解を用いて判別する方法も示す。この解析を行なうことで本手法の有効性と限界の両方を評価することができる。さらに本論文では簡単な振動系を用いた数値例によって、提案法の有効性を検証する。先に述べた正準分解による変動抑制の可能性を具体的に調べることににより、提案法が有効となる場合とそうでない場合の制御結果を評価する。

2. パラメータ変動を評価する LQ 最適制御

本章では、本論文で提案するパラメータ変動による影響を抑制するフィードフォワード型の LQ 最適制御について述べる。

2.1 LQ 最適制御問題

まず、本論文で対象とする最適制御について簡単に述べる。

* 京都大学大学院工学研究科 京都市西京区京大学桂

* Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyoto-daigakukatsura, Nishikyo-ku, Kyoto

(Received July 5, 2017)

(Revised October 6, 2017)

LQ 最適制御問題は、微分方程式の 2 点境界問題を解くことに帰着される⁶⁾。状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

で表わされた系に関して、評価関数 J と、境界条件が以下のようにならされているとする。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (3)$$

このとき、(2) 式の評価関数 J が最小になるような入力 u^* を求める問題を考える。随伴変数 λ 、ハミルトン関数 H を

$$H(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T Q x + \lambda^T A x - \frac{1}{2} \lambda B R^{-1} B^T \lambda$$

とすると、評価関数 J を最小にするための必要条件は、

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, \lambda, u)}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H(x, \lambda, u)}{\partial x} \quad (4)$$

$$u^* = -R^{-1} B^T \lambda \quad (5)$$

となる。よって最適制御問題 (1)~(3) は x と λ に関する 2 点境界値問題 (4) を解くことに帰着される。

2.2 問題設定

入力 u 、モデルパラメータ $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ に依存した状態 $x(t, \theta)$ からなる線型システムの状態空間モデルを考える。

$$\frac{dx(t, \theta)}{dt} = A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t) \quad (6)$$

ここで、 $x(t, \theta) \in \mathbb{R}^n$ 、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 、 $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ である。このシステムに対して、初期値 $x(t_0) = x_0$ から終端値 $x(t_f) = x_f$ へ操作を行なう。ただし、ノミナルなパラメータの値 θ_{nom} はわかっているが、実際のシステムのパラメータ θ は正確にわからない状況であるとする。この系に対して、システムのパラメータがノミナル $\theta = \theta_{\text{nom}}$ である場合には与えられた制御目標を達成し、かつパラメータ誤差が存在する場合でも制御目標をできるだけ達成する、という問題を考える。

モデルパラメータに依存した状態 $x(t, \theta)$ をノミナルな値 $\theta = \theta_{\text{nom}}$ まわりでテイラー展開を行ない、1 次の項まで近似すると、

$$x(t, \theta) \simeq x(t, \theta_{\text{nom}}) + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot (\theta - \theta_{\text{nom}}) \quad (7)$$

となる。右辺第 2 項の偏微分 $\partial x / \partial \theta$ の初期値と終端値が $\partial x(t_0) / \partial \theta = \partial x(t_f) / \partial \theta = 0$ であれば、

$$x(t_0, \theta) \simeq x(t_0, \theta_{\text{nom}}) = x_0, \quad x(t_f, \theta) \simeq x(t_f, \theta_{\text{nom}}) = x_f \quad (8)$$

となり、近似が成り立つ範囲ではノミナルパラメータによる状態 $x(t, \theta_{\text{nom}})$ と実際のモデルの状態 $x(t, \theta)$ が等しくなる。微小変位の初期値は 0、すなわち $(\partial x / \partial \theta)|_{t=t_0} = 0$ であるので、 $(\partial x / \partial \theta)|_{t=t_f} = 0$ になるように軌道を設計すると、パラメータ変動による影響を抑制することができる。

2.3 パラメータ変動を評価する最適制御

偏微分 $(\partial x / \partial \theta)$ の振る舞いは、元のシステム (6) のパラメータ θ に関する変分系⁷⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} (A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t)) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_i} \right) &= \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_i} x(t, \theta) + A(\theta) \frac{\partial x}{\partial \theta_i} + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_i} u \end{aligned} \quad (9)$$

で表わされる ($i = 1, 2, \dots, p$)。元の状態 $x(t, \theta)$ とその変分 $\partial x / \partial \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) を合わせた拡大系

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_1} & A & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_2} & 0 & A & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_p} & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (10)$$

を定義する。表記を簡略化するために

$$\begin{aligned} A_e &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_1} & A & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_2} & 0 & A & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_p} & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \\ B_e &= \begin{bmatrix} B \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}, \quad x_e = \begin{bmatrix} x \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

と表わすこととし、(10) 式を改めて

$$\frac{d}{dt} x_e(t, \theta) = A_e(\theta)x_e(t, \theta) + B_e(\theta)u$$

と表わす。ここで $x_e \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$ 、 $A_e \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n(p+1)}$ 、 $B_e \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times m}$ である。この拡大系に既知のノミナル値 $\theta = \theta_{\text{nom}}$ を代入した系

$$\frac{d}{dt} x_e(t, \theta_{\text{nom}}) = A_e(\theta_{\text{nom}})x_e(t, \theta_{\text{nom}}) + B_e(\theta_{\text{nom}})u \quad (12)$$

に対して LQ 最適制御を行なう。拡大系 (12) に対してつぎの評価関数 J を設定する。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x_e^T Q_e x_e + u^T R_e u) dt \quad (13)$$

有限時刻 $t \in [t_0, t_f]$ における境界条件

$$x_e(t_0) = [x_0, 0, \dots, 0]^T, \quad x_e(t_f) = [x_f, 0, \dots, 0]^T \quad (14)$$

のもとで、評価関数 J を最小にする入力 u を求める問題を扱う。ここで $Q_e \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n(p+1)}$ は半正定対称行列、 $R_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は正定対称行列である。この拡大された系で増えた偏微分の状態の項 $\partial x / \partial \theta_i$ は、パラメータ θ_i が変動したときの x の変動を表す。この偏微分項が評価関数 J の中に含まれることにより状態の変動も考慮した最適な入力を求めることができ、パラメータ変動に対してロバストな最適制御則を導出できる。

2.4 拡大系の性質

ここでは拡大系 (12) の性質に関して述べる。

《定理 1》 ノミナルシステム (6) と拡大系 (12) には以下の関係が成り立つ。

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(A_e - \lambda I_e) = 0$$

ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ である。

(証明) (11) 式より、拡大系がブロック下三角行列で表わされるため、

$$\begin{aligned} \det(A_e - \lambda I_e) &= \begin{vmatrix} A - \lambda I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_1} & A - \lambda I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_2} & 0 & A - \lambda I & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_p} & 0 & 0 & 0 & A - \lambda I \end{vmatrix} \\ &= |A - \lambda I|^{p+1} = 0 \end{aligned}$$

となることから題意は明らか。 ■

定理 1 は換言すれば、拡大系は元のシステムの極以外の値の極をもたず、拡大系の極が元のシステムのそれぞれの極の $p+1$ 重極になっていることを意味している。

《定理 2》 ノミナルシステム (6) 式の可制御性行列を M_c 、拡大系 (12) 式の可制御性行列を M_{ce} とすると

$$M_{ce} = \begin{bmatrix} M_c & A^n M_c & \dots & A^{np} M_c \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} M_c & \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^n M_c) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^{np} M_c) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_c & \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^n M_c) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^{np} M_c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} M_c & \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^n M_c) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^{np} M_c) \end{bmatrix}$$

であり、 $\text{rank}(M_c) \leq \text{rank}(M_{ce}) \leq n(p+1)$ となる。

(証明)

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

であり、一方 M_{ce} については

$$A_e B_e = \begin{bmatrix} AB \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_1} B + A \frac{\partial B}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_2} B + A \frac{\partial B}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_p} B + A \frac{\partial B}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} (AB) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (AB) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} (AB) \end{bmatrix}$$

となるので、帰納法により

$$\begin{aligned} A_e A_e^i B_e &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_1} & A & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_2} & 0 & A & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_p} & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^i B \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^i B) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^i B) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^i B) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{i+1} B \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_1} (A^i B) + A \frac{\partial (A^i B)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_2} (A^i B) + A \frac{\partial (A^i B)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial \theta_p} (A^i B) + A \frac{\partial (A^i B)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{i+1} B \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^{i+1} B) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^{i+1} B) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^{i+1} B) \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} M_{ce} &= \begin{bmatrix} B_e & A_e B_e & A_e^2 B_e & \dots & A_e^{n(p+1)-1} B_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B & \dots & (A^{n(p+1)-1} B) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} B & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^{n(p+1)-1} B) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} B & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^{n(p+1)-1} B) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} B & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^{n(p+1)-1} B) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_c & A^n M_c & \dots & A^{np} M_c \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} M_c & \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^n M_c) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_1} (A^{np} M_c) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_c & \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^n M_c) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_2} (A^{np} M_c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} M_c & \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^n M_c) & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_p} (A^{np} M_c) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表わされ、 M_{ce} は M_c とほかの要素からなるので、

$$\text{rank}(M_c) \leq \text{rank}(M_{ce}) \leq n(p+1) \quad \blacksquare$$

定理 2 は、もとのシステム (A, B) の可制御性行列が最大階数であり、可制御であったとしても、拡大系は必ずしも可制御ではないことを示している。したがって、導出した拡大系によっては最適制御を行なえない場合がある。

2.5 拡大系の可制御性解析

定理 2 より拡大系の可制御性行列 M_{ce} は一般にフルランクではなく、ノミナルシステム (6) の (A, B) が可制御であったとしても、拡大系 (12) の (A_e, B_e) の可制御性は保証されない。ノミナルシステムが可制御であるが、拡大系が不可制御になった場合は、カルマンの正準分解を導く座標変換により

拡大系の可制御な部分だけを取り出して、最適制御を行なう。

拡大系 (12) に対して、カルマンの正準分解⁸⁾を求め、その状態ベクトルを $\bar{x}_e = [\bar{x}_c^T, \bar{x}_{uc}^T]^T$ とする。ここで、 $\bar{x}_c, \bar{x}_{uc}$ はそれぞれ可制御、不可制御な状態変数を表わす。可制御なサブシステムの境界条件 $\bar{x}_c(t_0)$, $\bar{x}_c(t_f)$ を拡大系 (12) の境界条件 (14) から求める。可制御なサブシステム

$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u \quad (15)$$

に対して LQ 最適制御を行なうために、可制御状態ベクトルのみに対する

$$J_c = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\bar{x}_c^T \bar{Q} \bar{x}_c + u^T \bar{R} u) dt \quad (16)$$

を評価関数として定め、最適制御を行なう。このとき、パラメータ変動に対するロバスト性を考慮するためには以下のことについて留意しなければならない。

注意 1. 拡大系 (12) の不可制御サブシステム

$$\dot{\bar{x}}_{uc} = \bar{A}_{uc} \bar{x}_{uc} \quad (17)$$

の極が安定であれば、不可制御サブシステムの状態は $t \rightarrow \infty$ で 0 へ収束するため、パラメータ変動による影響は時間とともに減衰する。

注意 2. 拡大系 (12) の不可制御サブシステムの初期値 $\bar{x}_{uc}(t_0)$ と終端値 $\bar{x}_{uc}(t_f)$ が

$$\bar{x}_{uc}(t_0) = \bar{x}_{uc}(t_f) = 0 \quad (18)$$

となるように設計者が初期値 x_0 と終端値 x_f を選べるなら、評価関数 (16) によって得られる最適なフィードフォワード制御入力によって、有限時間 $[t_0, t_f]$ で $x(t_0) = x_0$ から $x(t_f) = x_f$ へと操作される。したがって拡大系を初期値から終端値へ制御する際に、パラメータ変動による影響を抑制できる。

注意 3. 可制御なサブシステムのための評価関数 J_c の選び方として、たとえば拡大系 (12) に対して設定した評価関数 (13) から与える方法が考えられる。カルマンの正準分解を導く座標変換の変換行列 T によって $\bar{x}_e = T x_e$ と変換されるので、変換後の境界条件は

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_c(t_0) \\ \bar{x}_{uc}(t_0) \end{bmatrix} = T x_e(t_0) \quad (19)$$

となり、拡大系の評価関数 (13) は

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\bar{x}_e^T (T^{-1})^T Q_e T^{-1} \bar{x}_e + u^T R_e u) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\begin{bmatrix} \bar{x}_c^T & \bar{x}_{uc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{uc} \end{bmatrix} + u^T R_e u \right) dt \end{aligned} \quad (20)$$

となる。したがって、(13) 式で先に与えた評価関数 J に対して、(20) 式の関係を用いることで、評価関数 J_c のための設計パラメータを $\bar{Q} = Q_{11}, \bar{R} = R_e$ と導くことができる。

注意 2 は言い換えると、境界条件の選び方によっては、たとえば不可制御サブシステムを非零の値へ操作せよ、といった無理な要求を与える可能性があることを示唆しており、パラメータ変動による影響を抑制できない場合があることを表わしている。そのため、パラメータ変動に対してロバストかどうかについて、注意 2 に基づいて事前に判定しておくことが重要である。提案法によってパラメータ変動の影響を抑制できない場合は、フィードバック型のロバスト制御を併用する必要がある。これらをいかに組み合わせるかは、今後検討すべき重要な課題である。

上記の注意 1, 2 はシステムの性質や設定した境界条件によってはパラメータ変動による影響を抑制できないことと述べている。元のシステムは可制御であるので、パラメータ変動がない場合は境界条件の選び方によらずに制御できることにも注意したい。

2.6 設計手順

本節で提案した、パラメータ変動を評価する LQ 最適制御手法についてまとめる。

設計手順

Step1. 状態空間モデル (6) に対して、拡大系 (12) を作成。

Step2. 拡大系の可制御性を調べる。拡大系 (12) が可制御ではない場合、座標変換によって可制御なサブシステムを取り出し、注意 2 に基づいてパラメータ変動に対するロバスト性を調べる。

Step3. 評価関数を $J_c = \frac{1}{2} \int (\bar{x}_c^T \bar{Q} \bar{x}_c + u^T \bar{R} u) dt$ として、可制御なサブシステムについて最適制御を行なう。

LQ 最適制御問題を解いて最適入力を得るための計算手法として、たとえば Shooting 法^{9), 10)}など、さまざまな方法が提案されている^{11)~13)}。次節の数値例では 2 重母関数法¹⁴⁾を用いて最適な入力 u と最適軌道 x を求めている。

3. 数値題

本章では数値例を対象に提案した設計手順に基づいてパラメータ変動に対してロバストな制御系設計を行なう。その性能を二つの例によって確認する。

Fig. 1 のような振り子のついた台車の運動を考える。 m_1

Fig. 1 A cart with a pendulum

Table 1 Physical parameters

Parameter	Value
m_1	3.0 (kg)
m_2	5.0 (kg)
l	2.0 (m)
g	9.8 (m/s ²)

は台車の質量, m_2 は振り子の質量, l は振り子の長さ, g は重力加速度である. 運動エネルギー K とポテンシャル U はそれぞれ

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_2\{(\dot{q} + l\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (l\dot{\phi}\sin\phi)^2\}$$

$$U = m_2gl(1 - \cos\phi)$$

ラグランジュ関数 $L = K - U$ として, ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = u, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

より

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + m_2l\ddot{\phi}\cos\phi - m_2l\dot{\phi}^2\sin\phi = u$$

$$m_2l\ddot{q}\cos\phi + m_2l^2\ddot{\phi} + m_2gl\sin\phi = 0$$

ϕ が十分に小さいとして, $\phi = 0$ まわりでの 1 次のテイラー展開による近似を行なう.

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + m_2l\ddot{\phi} = u$$

$$m_2l\ddot{q} + m_2l^2\ddot{\phi} + m_2gl\phi = 0$$

この関係式から, $x = [q, \phi, \dot{q}, \dot{\phi}]^T$ について, 状態空間モデルを以下のように定める.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (21)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gm_2}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{lm_1} \end{bmatrix}$$

以下の二つの場合についてパラメータ変動による影響を抑制した制御を行なえるかどうかを調べる.

Case1. パラメータ l の変動を考慮した拡大系を作成し, 状態 x を $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ から $x(6) = [1, 0, 0, 0]^T$ まで操作する.

Case2. パラメータ m_1 の変動を考慮した拡大系を作成し, 状態 x を $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ から $x(6) = [1, 0, 0, 0]^T$ まで操作する.

最適入力軌道を求める際に使用したノミナルパラメータは **Table 1** のとおりである. Case1 と Case2 では, 設計する拡大系に対して同じ評価関数

$$J_e = \frac{1}{2} \int_0^6 (x_e^T Q_e x_e + u^T R u) dt$$

$$Q_e = \text{diag}(10, 1, 10^3, 1, 10^3, 10^3, 10^3, 10^3)$$

$$R = 2 \times 10^2$$

と境界条件

$$x_e(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T,$$

$$x_e(6) = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

を設定し, この評価関数から注意 3 の手順でそれぞれの可制御サブシステムの評価関数を与える.

3.1 Case1

Step 1: 拡大系の作成

パラメータ l の変動を考慮して, $\theta = l$ とする.

$$\frac{\partial A}{\partial l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(m_1+m_2)}{l^2 m_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial B}{\partial l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{l^2 m_1} \end{bmatrix}$$

となり, 拡大系の状態空間モデルは $x_e = [x^T, (\partial x / \partial l)^T]^T$ として

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial l} & A \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} B \\ \frac{\partial B}{\partial l} \end{bmatrix} u \quad (22)$$

と表わされる.

Step 2: 拡大系の可制御性解析

この例題では拡大系 (22) の可制御性行列 $M_{ce} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ のランクが $\text{rank} M_{ce} = 6$ であるため, 拡大系は可制御ではない. カルマンの正準分解によって取り出した $\bar{x}_c \in \mathbb{R}^6$ の可制御なサブシステム

$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u \quad (23)$$

に対して制御を行なう. 注意 2 の判別方法によると, 今回の軌道設計の場合

$$\bar{x}_{uc}(t_0) = \bar{x}_{uc}(t_f) = 0 \quad (24)$$

となるため, パラメータ変動に対してロバストな軌道を生成することができる.

Step 3: 最適入力の決定

評価関数を

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^6 (\bar{x}_c^T \bar{Q} \bar{x}_c + u^T \bar{R} u) dt$$

と定めて, 境界条件 $\bar{x}_c(0)$, $\bar{x}_c(6)$ を満たす最適な入力 u と最適軌道 x を得る.

また, 結果の比較のためにノミナルシステム (21) を以下の評価関数 J と境界条件に対する最適制御問題も解いた.

(a) conventional method

(b) proposed method

Fig. 2 Optimal input u (Case1)

(a) conventional method

(b) proposed method

Fig. 3 Responses of the states (Case1)

$$J = \frac{1}{2} \int_0^6 (x^T Q x + u^T R u) dt$$

$$Q = \text{diag}(10, 1, 10^3, 1), \quad R = 2 \times 10^2$$

$$x(0) = [0, 0, 0, 0]^T, \quad x(6) = [1, 0, 0, 0]^T$$

ノミナルシステム (21) に対して設計した従来法と、拡大系 (22) に対して設計した提案法による最適入力を **Fig. 2** に示す。従来法による最適入力 **Fig. 2(a)** と比べると、提案手法による最適入力 **Fig. 2(b)** の大きさが大きくなっている。また、この **Fig. 2** の入力を用いて、パラメータ l を変化させた (6) 式の系に対してシミュレーションを行ない、得られた応答が **Fig. 3** である。このシミュレーションでは入力による操作を $t = 6$ で終了した後の状態の応答を確認するため、 $t > 6$ の入力を $u = 0$ としてシミュレーションを行ない、状態の応答を確認した。ノミナルシステム (21) に対して従来法を設計した最適入力によるシミュレーションでの状態の応答 **Fig. 3(a)** は、 l がノミナル値 $l = 2$ の場合は操作終了後 ($t > 6$) の状態 ϕ の振動はなく、所望の終端値へ制御できているが、 l がノミナルからずれる $l = 1.6$ の場合には、所望の終端値へうまく制御できておらず、操作終了後も振動が続いており、パラメータ変動がある場合に制御性能が劣化していることがわかる。一方、拡大系 (22) に対して提案法で設計した最適入力によるシミュレーションでの状態の応答 **Fig. 3(b)** では、 l がノミナル値 ($l = 2.0$) の場合に所望の制御が達成できている

だけでなく、 l に変動がある ($l = 1.6$) の場合でも同様の性能が得られている。変動の有無にかかわらず、 $t > 6$ の残留振動も小さい。これらの結果から、提案手法ではパラメータ変動による影響を抑制できていることがわかる。

3.2 Case2

Case1 と同様に提案した設計手順に基づいて最適入力の設計を行なう。

Step 1: 拡大系の作成

パラメータ m_1 の変動を考慮することにして、 $\theta = m_1$ とする。拡大系の状態空間モデルは $x_e = [x^T, (\partial x / \partial m_1)^T]^T$ として

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial m_1} & A \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} B \\ \frac{\partial B}{\partial m_1} \end{bmatrix} u \quad (25)$$

と表わされる。

Step 2: 拡大系の可制御性解析

この例題では拡大系 (25) の可制御性行列 $M_{ce} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ のランクが $\text{rank} M_{ce} = 6$ であるため、拡大系は可制御ではない。カルマンの正準分解によって取り出した $\bar{x}_c \in \mathbb{R}^6$ の可制御なサブシステム

$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u \quad (26)$$

の制御を行なう。注意 2 の判別方法によると、今回の軌道設計の場合

(a) conventional method

(b) proposed method

Fig. 4 Optimal input u (Case2)

(a) conventional method

(b) proposed method

Fig. 5 Responses of the states (Case2)

$$\bar{x}_{uc}(t_0) = 0, \quad \bar{x}_{uc}(t_f) \neq 0 \quad (27)$$

であるため、パラメータ変動による影響を抑制することができない。

Step 3: 最適入力決定

評価関数を

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^6 (\bar{x}_c^T \bar{Q} \bar{x}_c + u^T \bar{R} u) dt$$

と定めて、境界条件 $\bar{x}_c(0)$, $\bar{x}_c(6)$ を満たす最適入力 u と最適軌道 x を得る。

また、Case 1 と同様に、結果の比較のためにノミナルシステム (21) について Case 1 と同じ評価関数と境界条件に対する最適制御問題も解いた。

ノミナルシステム (21) に対して設計した従来法と、拡大系 (25) に対して設計した提案法による最適入力を **Fig. 4** に示す。また、この **Fig. 4** の入力を用いて、パラメータ m_1 を変化させた (6) 式の系に対してシミュレーションを行ない、得られた応答が **Fig. 5** である。Case1 と同様に、このシミュレーションで入力による操作を $t = 6$ で終了した後の状態の応答を確認するため、 $t > 6$ の入力を $u = 0$ としてシミュレーションを行ない、状態の応答を確認した。ノミナルシステム (21) に対して従来法を設計した最適入力によるシミュレーションでの状態の応答 **Fig. 5(a)** は、 m_1 がノミナル値 $m_1 = 3$

の場合は操作終了後 ($t > 6$) の状態 q と ϕ の振動はなく、所望の終端値へ制御できているが、 m_1 がノミナルからずれる $m_1 = 2.4$ の場合には、所望の終端値へうまく制御できず、操作終了後も振動が続いており、パラメータ変動がある場合に制御性能が劣化していることがわかる。また、拡大系 (25) に対して提案法で設計した最適入力によるシミュレーションでの状態の応答 **Fig. 5(b)** でも、 m_1 がノミナル値 ($m_1 = 3.0$) の場合に所望の制御が達成できているが、 m_1 に変動がある ($m_1 = 2.4$) の場合は $t > 6$ の残留振動が大きく、 q と ϕ が所望の終端値へうまく制御できない。これらの結果から、提案手法ではパラメータ変動による影響を抑制できていないことがわかる。しかしながら、Step 2 の可制御性解析のおかげで、提案手法で軌道設計がうまくできないことが、設計前にあらかじめ判断できる。

4. おわりに

本論文ではパラメータの変動に対するロバスト性を向上したフィードフォワード制御入力を得るための LQ 最適制御の枠組みの提案を行なった。ノミナルシステムとその変分を合わせて一つの拡大系を考え、ロバストな制御系設計のための枠組みを提案した。拡大系に対する LQ 最適制御によってパラメータ変動に対してロバストな最適フィードフォワード入力の設計を行なう方法を提案した。拡大系の可制御性解析を行なうことで、パラメータ変動による制御性能の劣化を抑制で

きるかどうかの判断が可能である。最後に例題で実際の手順とその効果を確認した。提案手法を用いることで、パラメータ変動に対してロバストな応答が得られることが確認されたが、変動を考慮するパラメータによっては変動による制御性能の劣化を抑制できない場合があることを例示した。

今後の課題としては、異なる最適制御問題への適用や、非線形系への対応などがあげられる。また提案した手法とフィードバック型のロバスト制御を組み合わせての方法についても検討したい。

参考文献

- 1) H.P. Geering: *Optimal Control with Engineering Applications*, 1st ed., Springer (2007)
- 2) Q. Liu and B. Wie: Robust time-optimal control of uncertain flexible spacecraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **5**-3, 597/604 (1992)
- 3) B. Wie, R. Sinha, J. Sunkel and K. Cox: Robust fuel-and time-optimal control of uncertain flexible space structures, *American Control Conference, 1993*, 2475/2479 San Francisco, CA, USA (1993)
- 4) L.Y. Pao and W.E. Singhose: Robust minimum time control of flexible structures, *Automatica*, **34**-2, 229/236 (1998)
- 5) S.W. Liu and T. Singh: Robust time-optimal control of flexible structures with parametric uncertainty, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **119**, 743 (1997)
- 6) 加藤寛一郎: 工学的最適制御 非線形へのアプローチ, 77/95, 東京大学出版会 (1988)
- 7) P.E. Crouch and A.J. van der Schaft: *Variational and Hamiltonian Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag (1987)
- 8) 吉川, 井村: 現代制御論, 昭晃堂 (2002)
- 9) H.B. Keller: *Numerical Methods for Two-point Boundary-value Problems*, Blaisdel (1968)
- 10) E. Cristiani and P. Martinon: Initialization of the shooting method via the hamilton-jacobi-bellman approach, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **146**-2, 346 (2010)
- 11) J.T. Betts: Survey of numerical methods for trajectory optimization, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **21**-2, 193/207 (1998)
- 12) O. Von Stryk and R. Bulirsch: Direct and indirect methods for trajectory optimization, *Annals of Operations Research*, **37**-1, 357/373 (1992)
- 13) V.M. Guibout and D.J. Scheeres: Solving relative two-point boundary value problems: Spacecraft formulation flight transfers application, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **27**-4, 693/704 (2004)
- 14) Z. Hao, K. Fujimoto and Y. Hayakawa: Optimal trajectory generation for linear systems based on double generating functions, *51st IEEE Conference on Decision and Control*, 3827/3832, Maui, Hawaii, USA (2012)

[著者紹介]

藤本 健治 (正会員)

1994年京都大学工学部精密工学科卒業, 96年京都大学大学院工学研究科修士課程応用システム科学専攻修了, 97年同大学院博士後期課程を中途退学, 97年京都大学大学院工学研究科助手, 2004年名古屋大学大学院工学研究科助教授などを経て, 2012年より京都大学大学院工学研究科教授。その間, 99年オーストラリア国立大学客員研究員, 1999~2000年および2002年デルフト工科大学客員研究員, 2012年および2017年グローニンゲン大学客員研究員, 2009年より理化学研究所客員研究員。非線形制御, 確率システムの研究に従事。博士(情報学)。IEEE, システム制御情報学会, 日本航空宇宙学会, 電子情報通信学会, 日本鉄鋼協会の会員。

大倉 裕貴 (学生会員)

2014年京都大学工学部物理工学科卒業。2016年京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻修士課程修了。同年京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻博士後期課程に進学, 現在に至る。最適制御, 非線形制御, 人間機械系のための制御に関する研究に従事。