AR モデルと行列ランク最小化によるグラフ信号の修復

芋田 総之*・東 俊一**・杉江 俊治***

Restoration of Graph Signals Based on AR Models and Structured Matrix Rank Minimization

Nobuyuki IMODA*, Shun-ichi AZUMA** and Toshiharu SUGIE***

In this paper, we address a restoration problem for graph signals with unknown signal values. First, we introduce an autoregressive model for graph signals. We next develop a restoration method based on a rank minimization technique. The proposed method is demonstrated by applying to a PageRank estimation problem of a web network.

Key Words: graph signal processing, rank minimization, signal restoration

1. はじめに

グラフ信号とは、グラフの各頂点に実数を割り当てた信号のことである。これは、デジタル画像やセンサネットワークの観測値などを表す数値モデルとして期待されている¹⁾。グラフ信号を対象とした信号処理をグラフ信号処理というが、これに対しては近年さまざまな成果が得られている。たとえば、グラフフーリエ変換¹⁾やグラフウェーブレット変換²⁾、グラフサンプリング定理^{3)~5)}、不確定性原理⁶⁾、 $\Delta\Sigma$ 変換⁷⁾など、通常の信号処理の手法はここ数年でグラフ信号へと拡張されてきた。

一方、対象とする信号において、いくつかの信号値が欠損しているとき、欠損した信号値を復元する問題を信号修復問題というが、グラフ信号に対するその問題の解法は十分に整備されてはいない。特に、変数領域での解は著者らの知る限りこれまでに得られていない。実際、Table 1 に示すように、時系列信号や画像など、従来の信号に対しては、周波数領域^{8),9)}および変数領域^{10),11)}に関して十分な成果が得られているが、グラフ信号に対しては、周波数領域での解^{3)~5)}がわずかに得られているだけである。

そこで、本論文ではグラフ信号に対する信号修復問題を扱い、変数領域での解法を提案する。特に、対象とするグラフ信号に対して、ある種の自己回帰性 (AR 性) を仮定し、そのも

とでの解法を与える。最初に、時系列信号の AR 性をグラフ信号に対して拡張する。つぎに、グラフ信号の AR 性を表現する行列を定義し、信号修復問題をその行列のランク最小化問題へ帰着させる。最後に、web ページの重要度の指標として PageRank が知られているが^{12),13)}、ここでは、PageRank が定められた web をグラフ信号としてモデル化し、提案手法を PageRank 値の推定問題へ応用する。

[記法] (i) $\mathbf{R}$ で実数の集合を表す。有限集合 $\mathbf{S}$ に対し、 $|\mathbf{S}|$ で集合 $\mathbf{S}$ の要素数を表す。数列 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ と集合 $\mathbf{I} := \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $[x(i)]_{i \in \mathbf{I}}$ でベクトル $[x(i_1) \ x(i_2) \ \dots \ x(i_m)]^T$ を表現する。たとえば $\mathbf{I} := \{2, 5, 7\}$ のとき、 $[x(i)]_{i \in \mathbf{I}} = [x(2) \ x(5) \ x(7)]^T$ である。同様の記法は数列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対しても用いるが、その場合は、 $[x_i]_{i \in \mathbf{I}}$ と表す。

(ii) 頂点集合 $\mathbf{V}$ 、辺集合 $\mathbf{E}$ によって定義される有向グラフ $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ を考える。 $\mathbf{E}$ に含まれる辺の逆向きの辺の集合を $\bar{\mathbf{E}}$ 、つまり $\bar{\mathbf{E}} = \{(i, j) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \mid (j, i) \in \mathbf{E}\}$ とする。グラフ $\bar{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \cup \bar{\mathbf{E}})$ が強連結となると、 G は弱連結であるという。頂点集合の要素数が等しい二つの有向グラフ $G_1 = (\mathbf{V}_1, \mathbf{E}_1)$ および $G_2 = (\mathbf{V}_2, \mathbf{E}_2)$ の間に、全単射 $f: \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ が存在して、任意の $(i, j) \in \mathbf{E}_1$ に対し $(f(i), f(j)) \in \mathbf{E}_2$ となり、また任意の $(i, j) \in \mathbf{E}_2$ に対し $(f^{-1}(i), f^{-1}(j)) \in \mathbf{E}_1$ となるとき、 G_1 は G_2 に同型であるという。また、この全単射 f を G_1 から G_2 への同型写像と呼ぶ。

2. 問題設定

本章ではグラフ信号とそれに対する AR モデルの定義を行った上で、グラフ信号の修復問題を定式化する。

2.1 グラフ信号

頂点集合 $\mathbf{V} := \{1, 2, \dots, n\}$ と辺集合 $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ で定義

* (株)デンソー 刈谷市昭和町 1-1

** 名古屋大学大学院工学研究科 名古屋市中千種区不老町

*** 京都大学大学院情報学研究科 京都市左京区吉田本町

* DENSO corporation, 1-1 Showa-cho, Kariya

** Graduate School of Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

*** Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto

(Received March 31, 2018)

(Revised July 3, 2018)

Table 1 Previous works and the position of this paper

	Conventional signal(time series, digital image, etc.)	Graph signal
Frequency domain	8),9)	3)~5)
Variable domain	10),11)	This paper

Fig. 1 Example of graph signal **Fig. 2** Grayscale digital image ¹⁴⁾

される有向グラフ $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ を考える. これに対し, 各頂点に信号値と呼ばれる実数を割り当てる写像を $x: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ とする. このとき, G と x の組, すなわち, $\hat{G} = (G, x)$ をグラフ信号という. たとえば **Fig. 1** は, $\mathbf{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と $\mathbf{E} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ で定義される有向グラフと, $x(1) = 2, x(2) = 1, x(3) = 1, x(4) = 2, x(5) = 3$ となる関数 x で定義されるグラフ信号である.

グラフ信号は, 頂点に実数値のラベルの付いたラベル付き有向グラフと等しい. したがって, そのような有向グラフでモデル化できるものは, グラフ信号として扱うことが可能である. グラフ信号としてモデル化できる工学的な例を示そう.

例 1 **Fig. 2** は, 76 ピクセル $\times$ 76 ピクセルのデジタル画像である. このようなデジタル画像はグラフ信号だと捉えることができる. この場合, $\mathbf{V}$ は各画素のインデックスの集合, つまり, $(1, 1), (1, 2), \dots, (76, 76)$ を要素にもつ集合を表わし, $\mathbf{E}$ は各画素の隣接関係を表わす辺の集合である. また, x は各画素とその画素値を対応付ける関数である. $\square$

例 2 **Fig. 3** に示すようなセンサネットワークの観測値もグラフ信号で表現できる. この場合, $\mathbf{V}$ は各センサのインデックスの集合に対応し, $\mathbf{E}$ は, 通信可能なセンサ同士の組の集合を表わす. x は各センサとある時刻の観測値を対応付ける関数である. $\square$

Fig. 3 Sensor network

以下ではグラフ G に対して定義されたグラフ信号を $\hat{G}$ と表わす.

2.2 グラフ信号の AR モデル

例 1 に示したデジタル画像では, 隣り合う画素は互いに近い画素値をもつ場合が多いことが知られている. たとえば, 確率的画像処理では, そのような仮定が基礎となっている ¹⁵⁾. また, そのような性質を 2 次元格子上の AR モデルとして表現して画像処理することも提案されている ¹⁶⁾. 例 2 に示したセンサネットワークにおいても, 観測対象が, 空間的に連続に分布するような物理量の場合, 空間的に近いセンサ同士で近い測定値をもち, また空間的に近いセンサ同士で通信する (すなわち, グラフ上で辺を有する) ことが自然である. このような性質を表現するモデルとして, 本論文ではグラフ信号に対する AR モデルを定義する.

まず, グラフ信号に対する AR モデルを定義する前に, 古くから知られている離散時間信号に対する AR モデルを紹介しよう. それは以下のように与えられる.

$$x(k) = \sum_{i=1}^r a_i x(k-i), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

ここで, $a_i \in \mathbf{R}$ は AR 係数と呼ばれる定数, $r \in \{1, 2, \dots\}$ はモデル次数と呼ばれる自然数である. このモデルでは時刻 k の信号値が過去のいくつかの信号値の線形結合で与えられることを表わしている. 信号に対して, この関係を仮定することで, たとえば, システム同定問題では, 信号系列 $x(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) が既知のもとで, AR 係数 a_i ($i = 1, 2, \dots, r$) を推定したり, また, 信号復元問題では AR 係数 a_i ($i = 1, 2, \dots, r$) が既知のもとで, 信号系列 $x(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) の一部を推定したりすることが行なわれる.

以上の点に着目して, グラフ信号に対する AR モデルをつぎのように定義する.

定義 1 グラフ信号 $\hat{G} = (G, x)$ を考える. グラフ G から, 弱連結の部分グラフ $G_0 = (\mathbf{V}_0, \mathbf{E}_0)$ を任意に一つ取り出し, さらに G_0 と同型かつ互いに相異なる部分グラフをすべて取り

Fig. 4 Graph signal $\hat{G} = (G, x)$ in Example 3

出し、それらを $G_i = (\mathbf{V}_i, \mathbf{E}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) とする。これらのグラフが $\mathbf{V} = \bigcup_{i=0}^m \mathbf{V}_i$ および $\mathbf{E} = \bigcup_{i=0}^m \mathbf{E}_i$ をみたすとき、 G_0 をグラフ G のモチーフとよぶ。また、 G_i から G_0 への同型写像を $\phi_i: \mathbf{V}_i \rightarrow \mathbf{V}_0$ とし、 $\phi_0: \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}_0$ を恒等写像としたとき、

$$\sum_{j \in \mathbf{V}_i} a_{\phi_i(j)} x(j) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (2)$$

を、モチーフ G_0 に対する AR モデルという。ここで、 $a_k \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{V}_0$) は定数であり、グラフ信号の AR 係数とよぶ。□

定義 1 の AR モデルは、(1) 式に示される時間信号に対する AR モデルを一般化したものである。実際、(1) 式において時刻 k の範囲を有限とし、時間軸を各時刻 k を頂点とする道グラフと考えれば、(1) 式は、(2) 式に従うグラフ信号とみなすことができる。(1) 式の AR モデルと同様に、(2) 式の関係を仮定することで、システム同定問題 (AR 係数を推定) や信号復元問題 (信号値の一部を推定) を考えることができるようになる。

AR モデルに従うグラフ信号の例を示そう。

例 3 Fig. 4 に示すグラフ信号 $\hat{G} = (G, x)$ を考える。これは、Fig. 5 のモチーフ $G_0 = (\mathbf{V}_0, \mathbf{E}_0)$ に対する AR モデルに従う。実際、 G_0 と同型かつ互いに異なる部分グラフをすべて取り出すと Fig. 6 に示すグラフ $G_i = (\mathbf{V}_i, \mathbf{E}_i)$ ($i = 1, 2$) が得られ、 $\bigcup_{i=0}^2 \mathbf{V}_i = \mathbf{V}$ および $\bigcup_{i=0}^2 \mathbf{E}_i = \mathbf{E}$ をみたすため、 G_0 はグラフ G のモチーフである。このとき、 $\hat{G}$ は、モチーフ G_0 に対する以下の AR モデルに従うことがわかる。

$$\sum_{j \in \mathbf{V}_i} a_{\phi_i(j)} x(j) = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3)$$

ただし、 $a_1 = -1, a_2 = a_3 = 1$ であり、 ϕ_1, ϕ_2 は $\phi_1(2) = 1, \phi_1(4) = 2, \phi_1(5) = 3$ および $\phi_2(3) = 1, \phi_2(6) = 2, \phi_2(7) = 3$ と定義される写像である。□

グラフ信号に対する AR モデルは、常に定義できるわけではない点に注意されたい。定義 1 で示したとおり、モチーフ G_0 を適切に設定し、それによって対象となるグラフ G を覆うことができる場合 (つまり、定義 1 の $\bigcup_{i=0}^m \mathbf{V}_i = \mathbf{V}$ および $\bigcup_{i=0}^m \mathbf{E}_i = \mathbf{E}$ を満たす) に限って、AR モデルを定義できる。

2.3 グラフ信号の修復問題

以上の準備のもと、本論文で考えるグラフ信号の修復問題は以下のように定式化される。

Fig. 5 Motif G_0 Fig. 6 Isomorphic graphs to motif G_0

問題 1 グラフ信号 $\hat{G} = (G, x)$ が与えられているとする。いま、グラフ G の頂点集合のある部分集合 $\mathbf{V}_l \subseteq \mathbf{V}$ に対し、 $\hat{G}$ の信号値 $x(i)$ ($i \in \mathbf{V}_l$) が欠損しているが、 $\hat{G}$ は既知のモチーフ G_0 に対するある AR モデル (AR 係数は未知) に従うものとする。このとき、欠損した信号値 $x(i)$ ($i \in \mathbf{V}_l$) を推定せよ。□

3. 行列ランク最小化による信号修復

本章では、問題 1 に対し、ある行列のランクを最小化することで解を得る方法を提案する。

3.1 未知パラメータの推定とランク最小化

問題 1 の解を得るにあたっては、未知パラメータを含む行列のランクをできる限り小さくするように、未知パラメータを推定することが重要である。ここでは、その考え方について述べる。

ベクトルパラメータ $p \in \mathbf{R}^l$ をもつ行列 $M(p) \in \mathbf{R}^{s \times t}$ が、与えられたあるベクトル $q \in \mathbf{R}^t$ に対し

$$M(p)q = 0 \quad (4)$$

を満たすとき、パラメータ p を求める問題を考える。もし q が既知であれば、 $M(p)q = 0$ を p を未知数とする方程式だとして解を求めればよい。

一方、 q が未知であるときは、 $M(p)q = 0$ を満たす p を求めることは、 q が未知であるがゆえに一般にはできない。このような場合、“できるだけ多くの q ” に対して $M(p)q = 0$ を満たすことを期待して、そのような期待を実現するような p を解の候補とするのは一つの方策であろう。そのような考えに立つと、 $\text{Ker}(M(p))$ の次元を最大化する、すなわち $M(p)$ のランクを最小化するような p を上記の問題の解として扱うことが、一つの解決策になると考えられる。

3.2 構造化行列のランク最小化による信号修復

いま、問題 1 で対象とするグラフ信号 $\hat{G}$ はモチーフ G_0 に対する AR モデルに従うことがわかっている。したがって、(2) 式が成り立つ。このとき、未知の信号値を並べたベクトル $[x(i)]_{i \in \mathbf{V}_l}$ を z とし、AR 係数を並べたベクトル $[a_j]_{j \in \mathbf{V}_0}$ を a とすると、(2) 式は行列 $X(z) \in \mathbf{R}^{(m+1) \times |\mathbf{V}_0|}$ を適切に定義することでつぎのように表わすことができる。

$$X(z)a = 0 \quad (5)$$

行列 $X(z)$ を構造化行列とよぶ。

Fig. 7 Graph signal $\hat{G} = (G, x)$ in Example 5

例 4 例 3 のグラフ信号 $\hat{G}$ とモチーフ G_0 に対する AR モデルを考える．この AR モデルは，つぎのように表わされる．

$$\begin{bmatrix} a_1x(1) + a_2x(2) + a_3x(3) \\ a_1x(2) + a_2x(4) + a_3x(5) \\ a_1x(3) + a_2x(6) + a_3x(7) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x(1) & x(2) & x(3) \\ x(2) & x(4) & x(5) \\ x(3) & x(6) & x(7) \end{bmatrix}}_{X(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_a = 0$$

□

問題 1 は，(5) 式において，ベクトル a が未知という条件のもとでベクトル z を推定することに対応するが，(4) 式における $p, q, M(p)$ をそれぞれ $z, a, X(z)$ と考えれば，この問題は，3.1 節で述べた問題と一致する．したがって，問題 1 は以下の最適化問題から解が得られることが期待される．

$$\min_{z \in \mathbf{R}^{|V_t|}} \text{rank}(X(z)) \quad (6)$$

例 5 Fig. 7 に示すグラフ信号において信号値が Fig. 8 に示すように欠損した状況を考えよう．信号値が欠損している頂点は 32 個存在し，それらは Fig. 9 の菱形で示したとおりである．このグラフ信号が，Fig. 5 に示すグラフ G_0 をモチーフとする AR モデルに従うと仮定し，欠損した信号値を (6) に示した構造化行列のランク最小化により修復してみよう．

まず，構造化行列は以下になる．

$$X(z) = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & x(3) \\ x(2) & 0.0222 & x(5) \\ x(3) & 0.0223 & x(7) \\ 0.0222 & 0.0192 & x(9) \\ x(5) & 0.0184 & x(11) \\ 0.0223 & 0.0189 & x(13) \\ x(7) & 0.0190 & x(15) \\ 0.0192 & 0.0155 & x(17) \\ x(9) & 0.0152 & x(19) \\ 0.0184 & 0.0154 & x(21) \\ x(11) & 0.0156 & x(23) \\ 0.0189 & 0.0157 & x(25) \\ x(13) & 0.0162 & x(27) \\ 0.0190 & 0.0153 & x(29) \\ x(15) & 0.0155 & x(31) \\ 0.0155 & 0.0132 & x(33) \\ x(17) & 0.0130 & x(35) \\ 0.0152 & 0.0129 & x(37) \\ x(19) & 0.0133 & x(39) \\ 0.0154 & 0.0133 & x(41) \\ x(21) & 0.0128 & x(43) \\ 0.0156 & 0.0136 & x(45) \\ x(23) & 0.0126 & x(47) \\ 0.0157 & 0.0135 & x(49) \\ x(25) & 0.0128 & x(51) \\ 0.0162 & 0.0131 & x(53) \\ x(27) & 0.0128 & x(55) \\ 0.0153 & 0.0133 & x(57) \\ x(29) & 0.0128 & x(59) \\ 0.0155 & 0.0131 & x(61) \\ x(31) & 0.0132 & 0.0128 \end{bmatrix} \quad (7)$$

この構造化行列に対し，(6) 式の最適化問題を解くと，欠損した信号値は Table 2 のように修復される．Table 2 には，修復の対象となる信号値の真値，修復結果，それらの差を表わしている．このグラフ信号は，Fig. 5 に示すグラフをモチーフとする AR モデルから生成された信号に， -0.0005 から 0.0005 の範囲のノイズをランダムに付加したものであるが，修復結果の誤差はそのノイズの幅にほぼ収まっていることが見て取れる．なお，ノイズがない場合には，提案法でほぼ厳密に修復を行なうことができたことを追記しておく． □

(6) 式の最適化問題を解くにあたってはつぎの点に注意する．一般に (6) 式の最適化問題は NP 困難であることが知られている．しかし，近似解法として NSAO (Null Space Alternating Optimization) 法が知られており，これを用いることで短い時間で近似解を得られることが知られている¹⁷⁾．例 5 においてもこの解法を利用した．

最後に，未知の信号値の数が多い場合について注意点を述べておきたい．一般に，未知の信号値の数が多い場合，結果

Fig. 8 Graph signal $\hat{G}$ in Fig. 7 with unknown signal values Fig. 9 Graph $G = (V, E)$ of $\hat{G}$ in Fig. 7

として得られる構造化行列のランクが、真の信号値で作られた構造化行列のランクよりも小さくなることが多い。それによって誤った推定値となる可能性がある。その一方で、既知の信号がノイズを含む場合、より小さなランクをもつような構造化行列を得ることによって、ノイズ除去の効果を生む可能性も考えられる。ただし、この点については、現時点において正確なことはわかっておらず、さらなる研究が必要である。

4. PageRank の修復への応用

4.1 PageRank

PageRank^{12),13)}とは、インターネットにおける各 Web ページの人気度や重要度を定量化したものであり、Google 社の検索エンジンに用いられている。PageRank は、各 web ページを頂点とし、各 web ページからほかの web ページへリンクが存在することを辺で表現した有向グラフによって定義されるものであるが、これは、グラフの各頂点に信号値が割り当てられたものにほかならない。したがって、PageRank

Table 2 Restoration result for graph signal in Fig. 8

Node	Signal value (unknown)	Restoration result	Restoration error
1	0.0326	0.0320	0.0006
2	0.0271	0.0268	0.0003
3	0.0275	0.0265	0.0010
5	0.0223	0.0221	0.0002
7	0.0225	0.0220	0.0005
9	0.0192	0.0187	0.0005
11	0.0188	0.0183	0.0005
13	0.0188	0.0186	0.0002
15	0.0190	0.0185	0.0005
17	0.0157	0.0156	0.0001
19	0.0162	0.0153	0.0009
21	0.0153	0.0152	0.0001
23	0.0154	0.0153	0.0002
25	0.0156	0.0156	0.0000
27	0.0162	0.0157	0.0005
29	0.0160	0.0155	0.0005
31	0.0157	0.0153	0.0004
33	0.0136	0.0129	0.0007
35	0.0136	0.0129	0.0007
37	0.0133	0.0127	0.0006
39	0.0132	0.0129	0.0003
41	0.0133	0.0129	0.0004
43	0.0127	0.0126	0.0001
45	0.0128	0.0132	0.0004
47	0.0132	0.0126	0.0006
49	0.0133	0.0132	0.0001
51	0.0130	0.0128	0.0002
53	0.0136	0.0132	0.0004
55	0.0135	0.0128	0.0007
57	0.0130	0.0129	0.0001
59	0.0130	0.0127	0.0003
61	0.0127	0.0129	0.0002

が定められた web はグラフ信号の一種だと考えることができる。

各 web ページの PageRank の値は、基本的には、隣接する web ページの PageRank の値の重み付き和となっていることが知られている¹³⁾。したがって、対応するグラフ信号は AR モデルにある程度従うことが期待される。それゆえ、いくつかの web ページの PageRank の値が欠損している状況においては、3 章までの結果を用いて修復を行なうことが可能である。

このような修復は、PageRank の値が欠損した web ページの数が十分に少ない場合には、PageRank のアルゴリズムに従って、すべての web ページの PageRank の値を再計算する方法よりも、少ない計算量で実行できると期待される。実際、PageRank の計算は、一般に、グラフ全体の隣接構造の情報を必要とするが、提案法による修復は、PageRank の値が欠損した頂点の周辺の隣接構造の情報のみを用いて実行することができる。

また、インターネットのユーザーのように、PageRank のアルゴリズムを実行するための情報をもたないが（すなわち、PageRank のアルゴリズムを実行できない）、いくつかの web ページの PageRank の値の情報をもつ場合に、未知の PageR-

Fig. 10 Web with PageRank

Fig. 11 Web with unknown PageRank values

Fig. 12 Graph $G = (V, E)$ of web in Fig. 10

ank の値を推定するための手段としても有効であろう。このような状況は、何らかの理由^(注 1)によって PageRank の値の保護を希望する web ページが現れ、実際に制度として保護をすることになった場合に起こり得ると考えられる。

4.2 PageRank の修復例

Fig. 10 に示す PageRank が定められた web を考える。いま、この web の PageRank の一部が欠損しており、Fig. 11 のようになっているものとする。ただし、これらの図において PageRank は対数スケールで表示されている。PageRank が欠損している web は 32 個存在し、それらは Fig. 12 の大

(注 1) たとえば、サイバー攻撃の対象として狙いをつけられないようにする目的や、インターネットビジネスにおいて同業他社に自社の影響力を知られないようにする目的などが考えられる。

Fig. 13 Motif G_0 for web in Fig. 10

Fig. 14 Restoration result

Table 3 Restoration result for web in Fig. 11

Node	Signal value (unknown)	Restoration result	Restoration error ($\times 10^{-3}$)
1	0.0863	0.0865	0.2242
2	0.0502	0.0502	0.0154
4	0.0289	0.0289	0.0282
5	0.0289	0.0289	0.0150
8	0.0164	0.0165	0.0367
9	0.0164	0.0165	0.0296
10	0.0164	0.0165	0.0297
11	0.0164	0.0165	0.0251
12	0.0164	0.0165	0.0227
14	0.0164	0.0165	0.0189
16	0.0092	0.0092	0.0052
17	0.0092	0.0092	0.0026
18	0.0092	0.0092	0.0025
19	0.0092	0.0092	0.0008
20	0.0092	0.0092	0.0033
21	0.0092	0.0092	0.0007
22	0.0092	0.0092	0.0011
23	0.0092	0.0092	0.0005
24	0.0092	0.0092	0.0046
25	0.0092	0.0092	0.0085
28	0.0092	0.0092	0.0067
29	0.0092	0.0092	0.0108
48	0.0049	0.0049	0.0044
49	0.0049	0.0049	0.0055
50	0.0049	0.0049	0.0058
51	0.0049	0.0049	0.0065
56	0.0049	0.0049	0.0052
57	0.0049	0.0049	0.0066
58	0.0049	0.0049	0.0071
59	0.0049	0.0049	0.0079
112	0.0024	0.0024	0.0001
113	0.0024	0.0024	0.0001
114	0.0024	0.0024	0.0003
115	0.0024	0.0024	0.0005
116	0.0024	0.0024	0.0005
117	0.0024	0.0024	0.0007
118	0.0024	0.0024	0.0008
119	0.0024	0.0024	0.0009

きな丸印で示したとおりである。このとき、これを表現するグラフ信号が **Fig. 13** に示すモチーフに対する AR モデルに従うと仮定して提案手法によって欠損した信号値を修復してみよう。

この場合、構造化行列 $X(z)$ は付録 A に示すものになるが、(6) の最適化問題を解くと、信号は **Fig. 14** のように修復され、欠損した信号値は **Table 3** のようになる。Table 3 には、修復の対象となる信号値の真値、修復結果、それらの差を表わしているが、修復結果は十分に真値に近づいていることが見て取れる。PageRank は厳密には AR モデルに従わないが、よく近似されていることがわかる。

5. おわりに

本論文では、グラフ信号の信号値の修復問題を検討した。まず、グラフ信号に対し AR モデルを定義した。つぎに、グラフ信号がある AR モデルに従うと仮定した上で、AR モデルを表現する行列のランク最小化による方法を提案した。また、提案法を PageRank が割り当てられた web の PageRank 値の修復問題に応用し、良好な結果が得られることを明らかにした。今後の課題としては、AR モデルのモチーフの決定基準を与えることや、修復対象のグラフ信号にノイズが含まれる場合に系統的な対処法を提案することなどが挙げられる。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金 #17H03281 の助成を受けた。記して謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) D.I. Shuman, S.K. Narang, P. Frossard, A. Ortega and P. Vandergheynst: The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains, *IEEE Signal Process. Mag.*, **30**-3, 83/98 (2013)
- 2) D.K. Hammond, P. Vandergheynst and R. Gribonval: Wavelets on graphs via spectral graph theory, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **30**-2, 129/150 (2011)
- 3) S.K. Narang, A. Gadde, E. Sanou and A. Ortega: Localized iterative methods for interpolation in graph structured data, *Proc. GlobalSIP'2013*, 491/494 (2013)
- 4) A. Anis, A. Gadde and A. Ortega: Towards a sampling theory for signals on arbitrary graphs, *Proc. ICASSP'14*, 3864/3868 (2014)
- 5) S. Chen, R. Varma, A. Sandryhaila and J. Kovacevic: Discrete signal processing on graphs: Sampling theory, *IEEE Trans. Signal Process.*, **63**-24, 6510/6523 (2015)
- 6) I. Pesenson: Sampling in Paley-Wiener spaces on combinatorial graphs, *Transactions of the American Mathematical Society*, **360**-10, 5603/5627 (2008)
- 7) N. Imoda, S. Azuma, T. Kitao and T. Sugie: Delta-sigma conversion for graph signals, *IFAC 2017 World Congress*, 9713/9717 (2017)
- 8) A.J. Jerri: The Shannon sampling theorem—Its various extensions and applications: A tutorial review, *Proc. IEEE*, **65**–11, 1565/1596 (1977)
- 9) A.C. Gilbert, S. Guha, P. Indyk, S. Muthukrishnan and M. Strauss: Near-optimal sparse Fourier representations via sampling, *Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 152/161 (2002)
- 10) T. Takahashi, K. Konishi and T. Furukawa: Rank minimization approach to image inpainting using null space based alternating optimization, *ICIP 2012*, 1717/1720 (2012)
- 11) D.L. Donoho: Compressed sensing, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **52**-4, 1289/1306 (2006)
- 12) L. Page, S. Brin, R. Motwani and T. Winograd: The pagerank citation ranking: Bringing order to the web, *Stanford Digital Libraries Working Paper*, 1999-66 (1999)
- 13) A.N. Langville and C.D. Meyer: A reordering for the PageRank problem, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **27**-6, 2112/2120 (2006)
- 14) <http://www.ess.ic.kanagawa-it.ac.jp/app-images-j.html>
- 15) 田中和之：統計力学を用いた確率的画像処理アルゴリズムの基礎—確率伝搬法と統計力学—, 計測と制御, **42**-8, 631/636 (2003)
- 16) 高橋, 小西, 吉川：行列のランク最小化に基づく画像修復手法, 電子情報通信学会技術研究報告, SIP, 信号処理, **111**-27, 67/72 (2011)
- 17) K. Konishi: Parallel GPU implementation of null space based alternating optimization algorithm for large-scale matrix rank minimization, *Proc. ICASSP'12*, 3689/3692 (2012)

《付 録》

A. PageRank の修復例の構造化行列

4.2 節に示した PageRank の修復例で用いた構造化行列を以下に示す。

$$X(z) =$$
[illegible]

[著 者 紹 介]

芋田 総之

2016 年京都大学工学部物理工学科卒業 2018 年
同大学大学院情報学研究科博士前期課程修了 2018
年（株）デンソー入社、現在に至る。

東 俊 一 (正会員)

2004 年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程修了。博士（工学）。同年より日本学術振興会特別研究員，2005 年京都大学大学院情報学研究科助手，2011 年同准教授，2017 年名古屋大学大学院工学研究科教授となり現在に至る。ハイブリッドシステムやネットワークシステムの研究に従事。2005 年，2008 年，2014 年，2016 年計測自動制御学会論文賞，2011 年度同学会制御部門パイオニア賞，2016 年同学会著述賞，2014 年システム制御情報学会論文賞などを受賞。IEEE，システム制御情報学会，電子情報通信学会，日本機械学会などの会員。

杉 江 俊 治 (正会員・フェロー)

1978 年京都大学大学院修士課程精密工学専攻修了，84 年同博士後期課程研究指導認定退学。78-80 年日本電信電話公社勤務，84 年大阪府立大学工学部助手，88 年京都大学工学部助教授を経て，現在情報学研究科教授。ロバスト制御，システム同定，非線形制御などの研究に従事。工学博士。IEEE の Fellow。