PWM型入力サンプル値系における多入力厳密線形化法

鈴木 雅 康*・平 田 光 男*

Multi-input Exact Linearization Method for PWM-type Input Sampled-data Systems

Masayasu SUZUKI* and Mitsuo HIRATA*

This paper is concerned with a control problem for linear systems by means of pulse-width-modulation (PWM)-type input. Since the PWM input system is nonlinear in terms of the duty ratio, its analysis and design for precision control is in general difficult. Nevertheless it turns out that the discrete-time systems on the sampling instants can be exactly transformed to single input linear systems by making the number and center-locations of pulses variable, where the fact that the sets of the vector-values of the input terms are convex is used. In this paper, by utilizing the above fact further, we propose a method exactly transforming the nonlinear discrete-time systems to multi-input linear systems.

Key Words: pulse-width-modulation, exact linearization, tracking control

1. はじめに

実システムの制御においては、さまざまな要因で入力値が有限個の値に限られるアクチュエータを使うことがある。たとえば、モータ制御におけるスイッチングアンプの採用は消費電力の大幅な削減を実現しているし、流体量の加減制御ではバルブ開度の精密な調整が難しいため信頼性向上のために開度を有限個に限定することがある¹⁾。ところが、このような離散事象を含むシステムに対する解析や制御器設計は、連続値入力系のそれらと比べて普通困難である。そのため、離散事象を直接扱うのではなく、何らかの厳密あるいは近似的な方法によって有限入力値系を連続値入力系とみなし、連続値入力系の解析・設計法に類する方法を利用することが常套手段となっている。

本論文では、パルス幅変調 (pulse-width-modulation, PWM) 型入力をともなう線形時不変系を扱う。PWM型入力は、通常、各制御周期に高々1つの矩形パルスを配置した信号として定義され、パルス高が2値に制限される一方で、パルス幅は任意に調整できるものとされる。サンプル点上の状態遷移は、定数変化法を用いて離散時間発展方程式により表現でき、このサンプル値系にとってパルス幅の列が連続値の操作量となる。ところが、発展方程式の入力項はパルス幅に関する非線形写像で与えられ、依然としてその取り扱いに難点が残されている。この問題は古くから認識されており、たと

えば、制御理論の分野ではPWM型入力をともなうフィードバック系の零解の安定性について議論され、多くの成果が報告されている^{1)~8)}。一方、目標値応答の向上には二自由度制御のようにフィードフォワード入力を併用することが効果的であることがよく知られている。このとき、制御系設計のためのモデル構築は重要な手続きであり、フィードフォワード入力がより有効性を発揮するには制御対象の性質を適切に反映したモデルが必要になる。加えて、そのモデルが妥当な線形モデルであれば設計は非常にやりやすくなる。実際、制御応用の分野において、この視点より上述の非線形入力項の線形近似法が議論され、軌道追従問題などに利用されている^{9)~11)}。

筆者らは、PWM型入力をともなう二次系に対して、パルスの幅だけでなく制御周期における配置位置を可変にすることで、系のサンプル点上の振る舞いを適当な単入力線形系の振る舞いに厳密に一致させられ、その線形系を制御器設計用のモデルに利用できることを示した^{12)~14)}。また、系の固有値が実数である三次以上の高次系に対しては、さらにパルスの数を増やすことで同様の結果を得ている¹⁵⁾。これらの結果は、離散時間系の入力項の取り得るベクトル値集合が、凸集合になっているという性質に基づいている。本論文では、この凸性の利用を一步進めて、非線形な離散時間系を状態空間の次元と同じ数の入力をもつ多入力線形系に変換する方法を提案する。この方法では変換先の線形系の入力行列を正則となるように選べるので、たとえば、完全追従制御¹¹⁾のように全状態量に対する参照軌道が与えられれば、その軌道にサンプル点上で誤差なく追従できるパルス群を与えることができる。本論文の最後にこの考えを応用した単相インバータ系の目標交流追従制御を紹介する。

以下では、まず、第2章で先行研究の結果を紹介し、その

* 宇都宮大学大学院工学研究科 宇都宮市陽東 7-1-2

* Graduate School of Engineering, Utsunomiya University, 7-1-2 Yoto Utsunomiya

(Received May 1, 2017)

(Revised July 22, 2017)

Fig. 1 Rectangular waves as a control input on $[kT, (k+1)T]$

準備を踏まえて第3章で提案法を示す。そして、第4章にて提案法の適用例（単相インバータ系の制御）を示す。

2. PWM型入力系の単入力線形系への厳密変換

2.1 PWM型入力系

以下の連続時間線形時不変系を考える。

$$\dot{x} = Ax + bu. \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は系の状態、 $u(t) \in \mathbb{R}^1$ は入力で、 A, b は実行列である。

[仮定1] 入力 u は、周期 T の制御区間に $[n/2]$ 個ずつ配置した高さ w^0 (> 0) あるいは $-w^0$ の矩形パルス列とする。ただし、 $[\cdot]$ は天井関数で、同一の制御区間にあるパルスの符号はすべて同じとする。ある区間 $[kT, (k+1)T]$ 上のパルス列について、立ち上がり・立ち下がり端を順序付きの実数 $(0 \leq) a_k^1 \leq a_k^2 \leq \dots \leq a_k^n (\leq 1)$ によって表現し、システムの次数 n が偶数の場合は

$$t/T - k \in [a_k^1, a_k^2] \cup [a_k^3, a_k^4] \cup \dots \cup [a_k^{n-1}, a_k^n]$$

のとき、奇数の場合には

$$t/T - k \in [0, a_k^1] \cup [a_k^2, a_k^3] \cup \dots \cup [a_k^{n-1}, a_k^n]$$

のとき、 $u(t)$ は値 $w_k \in \{w^0, -w^0\}$ をとり、それ以外は0とする (Fig. 1 参照)。

(注意) ここでは、システムの次数 n が奇数の場合に最初のパルスの立ち上がり端をサンプル点上 ($t = kT$) に固定している。代わりに、最後のパルスの立ち下がり端をサンプル点上 ($t = (k+1)T$) に固定しても、本論文での議論は同様に成立する。

パルスのタイミング列 $a^1, \dots, a^n$ をまとめて a とかくこととし (時刻を意味する下添え字付きの列 $a_k^1, \dots, a_k^n$ の場合には a_k)、その定義域を Δ で表わすことにする。

$$a = (a^1, a^2, \dots, a^n),$$

$$\Delta = \{a \mid 0 \leq a^1 \leq a^2 \leq \dots \leq a^n \leq 1\}.$$

系 (1) のサンプル点上の振る舞いは、つぎの発展方程式で記述できる。

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + w_k I(a_k), \quad a_k \in \Delta. \quad (2)$$

ただし、

$$I(a) = \int_{S_a} e^{AT(1-\tau)} b T d\tau,$$

$$S_a = \begin{cases} [a^1, a^2] \cup \dots \cup [a^{n-1}, a^n] & (n \text{ is even}), \\ [0, a^1] \cup \dots \cup [a^{n-1}, a^n] & (n \text{ is odd}) \end{cases}$$

である。

2.2 入力項の特徴付けと厳密線形化

系 (2) の入力項の解析について、先行研究 [13]~[15] の結果を紹介する。

2.2.1 像 $I(\Delta)$ について

(A, b) は可制御であると仮定する。操作量の定義域 Δ の I による像 $I(\Delta)$ について、以下のことがいえる。

- (i) $n = 2$ とし、 A の固有値が実数であるか、または、複素数であってその虚部の大きさがナイキスト角周波数 π/T より小さいとする。このとき、 $I(\Delta) \subset \mathbb{E}^2$ は境界上に原点がある凸体であり、さらに $\text{int}(\Delta)$ と $\text{int}(I(\Delta))$ は制限写像 $I|_{\text{int}(\Delta)}$ によって同相である。
- (ii) $n \geq 2$ とし、 A は相異なる実固有値をもつとする。このとき、 $I(\Delta) \subset \mathbb{E}^n$ は、境界上に原点がある凸体であり、 $\text{int}(\Delta)$ と $\text{int}(I(\Delta))$ は制限写像 $I|_{\text{int}(\Delta)}$ によって同相である。

ここで、 $\mathbb{E}^n$ は n 次元ユークリッド空間であり、凸体とは空でない内部をもつ凸集合のことである。

(注意) (i) について、 A の固有値が複素数でその虚部の大きさがナイキスト角周波数より大きい場合には、 $I(\Delta)$ は凸体ではなく、空でない内部をもつ原点に関する星状集合^(注1)であることがわかっている。ただし、定義域 Δ を適当に制限する、すなわち、パルスの配置を制御区間のある部分区間に限定するとその像は凸体でかつ内部同士は同相となるため、凸性・同相性を利用することは可能である。しかし、問題を簡単にするために本論文ではこの状況を扱わない。(ii) について、高次系に対しては相異なる実固有値を有する場合のみ結果を得ているが、重複固有値、複素固有値を有する場合にも (i) と同様の結論が得られることについて、筆者らは肯定的である。結果の拡張は今後の課題である。

以降では、 $I(\Delta)$ の凸性と同相性のみが必要であるので、このことを仮定して議論を進める。

[仮定2] 仮定1のもとで、以下が成り立つと仮定する。

- (i) $I(\Delta)$ は境界上に原点がある凸体である。
- (ii) $I|_{\text{int}(\Delta)} : \text{int}(\Delta) \rightarrow I(\text{int}(\Delta)) (= \text{int}(I(\Delta)))$ は同相写像である。

2.2.2 単入力線形系への厳密変換

n 次元ユークリッド空間において $I(\Delta)$ の境界上にある (原点以外の) 点 P を適当に選び、原点からこの点に向かう n 次

(注1) ある点に関する星状集合とは、その点からはじまる直線が集合の外部に出るまでにただ1回のみ集合の境界と交差する集合のことである。

元ベクトルも同じ表記を使うことにする． $I(\Delta)$ は凸体であるので，線分 $\{Pv\}_{v \in [0,1]}$ は $I(\Delta)$ 内に含まれる．このとき，この線分上の点を像にもつ Δ 内の逆像が存在し，同相性より逆像の集合は線分の端点を除いて v の連続写像によって一意的に表わせる．すなわち，ある関数 $\mathbf{a}: (0,1) \rightarrow \Delta$ が一意的に存在して

$$I(\mathbf{a}(v)) = Pv, \quad v \in (0,1)$$

が成り立つ．なお，原点と点 P の逆像は複数存在し得る．そこで，上記写像の値の極限として

$$\alpha_0 := \lim_{v \rightarrow 0} \mathbf{a}(v), \quad \alpha_P := \lim_{v \rightarrow 1} \mathbf{a}(v)$$

を考えれば， $\alpha_0, \alpha_P \in \Delta$ で， $\mathbf{a}(\alpha_0) = 0$ と $\mathbf{a}(\alpha_P) = P$ が成り立つので， α_0, α_P を $0, P$ の逆像として選ぶことにする．そして， $\mathbf{a}$ の定義域を $[0,1]$ ，値域を $\mathbf{a}((0,1)) \cup \{\alpha_0, \alpha_P\}$ へ拡張する．

本章では，単一制御区間において正か負のパルス群を配置する問題を考えていた．その正負を決定する関数 $\mathbf{w}(v) = w^0 \text{sgn}(v)$ を導入すれば

$$\mathbf{w}(v)I(\mathbf{a}(|v|)) = w^0 Pv, \quad v \in [-1,1] \quad (3)$$

のように v の範囲を負の領域に延長した対応関係を得る．以上を用いると，系 (2) の非線形入力項を線形な入力項に変換できることがわかる．

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + w_k I(a_k), \quad a_k \in \Delta$$

$$\downarrow \quad w_k = \mathbf{w}(v_k), \quad a_k = \mathbf{a}(|v_k|)$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + w^0 Pv_k, \quad v_k \in [-1,1].$$

ただし， v_k は変換先の線形系の入力の意味をもち，区間 $[-1,1]$ 上にのみ値をもつ仮想的な操作量である．一方，写像 $\mathbf{a}$ は入力変換則を意味する．二次系の場合には，変換則 $\mathbf{a}$ を解析的に求めることができるが¹⁴⁾，高次系の場合には難しいので，各 $v \in (0,1)$ に対して下記の制約付き最小化問題を数値的に解くことによって変換則を求めることにする．

$$\min_a \|I(a) - Pv\| \quad \text{subject to } a \in \Delta.$$

3. PWM 型入力系の多入力線形系への厳密変換

3.1 $I(\Delta)$ 内の平行体を利用した変換

前章では， $I(\Delta)$ の中に原点から出発する 1 つの線分を選び，系 (2) を単入力線形系に変換する方法を紹介した．ところで， $I(\Delta)$ は“空でない内部をもつ”凸集合であるので，線分を複数選べば，各線分上のパラメータを仮想入力とする多入力線形系への変換が実現できそうである．ここでは，頂点の 1 つが原点にあり， $(n-1)$ 次元面 (facet) が $2n$ 個ある n 次元平行体 (n -parallelotope) Γ を考え，原点からはじまる n 本の辺 (edge) を線分を選ぶことにする．たとえば， $n=2$ の場合には平行四辺形， $n=3$ の場合には平行六面体を考え，それぞれ原点からはじまる 2 本の辺，3 本の辺を線分として選ぶことに

なる．前章に倣って各線分を $\{P_i v^i\}_{v^i \in [0,1]}$ ， $i=1, \dots, n$ で表記すると，平行体 Γ は n 本の線分の Minkowski 和^(注 2)で表現できる．

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^n P_i v^i \mid v^i \in [0,1], i=1, \dots, n \right\}.$$

なお，この手続きを，上式で定義される平行体が $I(\Delta)$ に含まれるように n 本の独立なベクトル P_i を選ぶといい換えてもよい．

組 $(v^1, \dots, v^n) \in [0,1]^n$ を 1 つ与えると， Γ 内の点 $q = \sum_{i=1}^n P_i v^i$ が定まる．そして， q は $I(\Delta)$ にも属するので，逆像 $I^{-1}(q) \subset \Delta$ を対応させることができる．ここで， q が $I(\Delta)$ の内点であれば逆像はただ 1 つの点からなるが， $I(\Delta)$ の境界点の逆像は複数あり得るので適当に 1 点を選ぶことにする．このようにして，パラメータ v^i の組からパルス列への対応

$$\begin{aligned} \mathbf{a}: \quad [0,1]^n &\rightarrow \Delta \\ \cup &\quad \cup \\ (v^1, \dots, v^n) &\mapsto \mathbf{a}(v^1, \dots, v^n) \end{aligned}$$

を与えることができる．この変換 $\mathbf{a}$ を用いて，以下を得る．

$$I(\mathbf{a}(v)) = \sum_{i=1}^n P_i v^i, \quad v \in [0,1]^n. \quad (4)$$

ただし， $v = (v^1, \dots, v^n)$ とした．

なお，具体的な変換則 $\mathbf{a}$ は，各 $v \in [0,1]^n$ に対する方程式 $I(a) = \sum_{i=1}^n P_i v^i$ を a について解くことによって導出する．解が存在することは上記の議論が保証している．2.2 節と同じく，たとえば，最小化問題を数値的に解くことによって求めることが可能であるが，二次系の場合には解析的に導出できる．〔例〕 $n=2$ とする．定数 $c \in [0,1]$ を適当に選んで，

$$P_1 = I((0,c)), \quad P_2 = I((c,1))$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \int_{[0,c]} e^{AT(1-\tau)} b d\tau + \int_{[c,1]} e^{AT(1-\tau)} b d\tau \\ &= \int_{[0,1]} e^{AT(1-\tau)} b d\tau \\ &= I((0,1)) \end{aligned}$$

であり， $\mathbb{R}^2$ 内に頂点 $(0,0)$ ， P_1 ， P_2 ， $I((0,1))$ によって決まる平行四辺形が定義できて，それは， $I(\Delta)$ に含まれる (**Fig. 2**)．平行四辺形に含まれる各点に対し，その逆像を与える対応 $\mathbf{a}$ を与えて， $I(\mathbf{a}(v^1, v^2)) = P_1 v^1 + P_2 v^2$ ， $v^1, v^2 \in [0,1]$ という関係を利用できるようになる．**Fig. 3** は変換則の一例で， (v^1, v^2) から決まるパルスの立ち上がり端 a^1 (右上図) と立ち下がり端 a^2 (左上図) を示している．定義域 $[0,1]^n$ の境界の一部 (ここでは原点) を除いて，なめらかな曲面を形成されていることがわかる． a^2 の曲面は a^1 の曲面の上部にあり (下図)， $a^1 \leq a^2$ が満たされていることも確認できる．

(注 2) 加えられる各集合の元ごとの和の集合．

Fig. 2 The image $I(\Delta)$ and parallelogram, where the system's eigenvalues are $-312.5 \pm j1504$, sampling period 1.2ms, and parameter for determining a parallelogram $c = 0.5$

Fig. 3 Transformation law $\mathbf{a} : (v_1, v_2) \mapsto (a^1, a^2)$, where the system's eigenvalues are $-312.5 \pm j1504$, sampling period 1.2ms, and parameter for determining a parallelogram $c = 0.5$

3.2 問題の修正と多入力線形系への変換

2.2節と同様に、制御周期内のパルス群の正負を逆にするを考えると、 $I(\Delta)$ に原点对称な集合 $-I(\Delta)$ 内のベクトル値入力を実現できる。直ちに、共通の変換則 $\mathbf{a}$ によって

$$-I(\mathbf{a}(-v)) = \sum_{i=1}^n P_i v^i, \quad v \in [-1, 0]^n \quad (5)$$

が成り立つことがわかる。しかし、(4)と(5)はそれぞれ制御区間内の $\lceil n/2 \rceil$ 個のパルス群の符号を揃えた場合に有効な関係式である。2.2節での(3)式のように両式を合わせて1つの関係式を導いたとしても、それは各 v_i が $[-1, 1]$ 内の値を独立に取れないような関係であり、制御系設計において大きな制約をもたらしてしまう。同じことだが、これは、入力項の値域 $w^0(I(\Delta) \cup (-I(\Delta)))$ が入力値 $0 \in \mathbb{R}^n$ を内点として含んでいないことに対応している。そこで、以降では

- 制御区間に正負のパルスが共存できることと、
- パルスの数を増やすこと

を許容して、議論を進める。

まず、 $I(\Delta)$ と $-I(\Delta)$ は原点に関して点対称な凸体であり、そのMinkowski和は原点を内部にもつ凸体であることが容易にわかる。このことに注目し、改めて以下の仮定を満たすPWM型入力系を考える。

[仮定3] $\hat{u}$, $\tilde{u}$ を仮定1の入力でそれぞれパルスの高さが $w^0 (> 0)$, $-w^0$ であるものとする。制御対象は、これらの和 $\hat{u} + \tilde{u}$ を入力とする連続時間線形時不変系

$$\dot{x} = Ax + b(\hat{u} + \tilde{u}) \quad (6)$$

であるとする。 $\hat{u}$ のパルス群の立ち上がり・立ち下がり端($\hat{a} = (\hat{a}^n, \dots, \hat{a}^1)$ と表記)と、 $\tilde{u}$ のそれら($\tilde{a} = (\tilde{a}^n, \dots, \tilde{a}^1)$ と表記)は独立に選べるとする。

1つの制御区間において、和 $\hat{u} + \tilde{u}$ は $2n$ 個のタイミングで表わされる正負が混ざった高々 n 個のパルス群を意味する。新しいPWM型入力系(6)の状態のサンプル点上の振舞いは

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + w^0(I(\hat{a}_k) - I(\tilde{a}_k)), \\ \hat{a}_k, \tilde{a}_k \in \Delta$$

にしたがう。

先述の平行体 Γ に対し、ベクトル P_i の符号を逆にしてできるMinkowski和集合を $\bar{\Gamma}$ とかくことにする。すると、 $\bar{\Gamma} \subset -I(\Delta)$, $\Gamma + \bar{\Gamma} \subset I(\Delta) + (-I(\Delta))$ (“+”はMinkowski和をとる演算子)であり、 $\Gamma + \bar{\Gamma}$ は原点を重心にもつ平行体であることがわかる。この平行体 $\Gamma + \bar{\Gamma}$ 内の点は、 $v \in [-1, 1]^n$ によって $\sum_{i=1}^n P_i v^i$ で表現できることも明らかである。

ここで、 $v = (v^1, \dots, v^n)$ を0以上の要素からなる組 $\hat{v} = (\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^n)$ と、0以下の要素からなる組 $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$ に分ける。

$$v = \hat{v} + \tilde{v}, \quad \hat{v} \in [0, 1]^n, \quad \tilde{v} \in [-1, 0]^n. \quad (7)$$

ただし、 $\hat{v}^i \neq 0$ ($\tilde{v}^i \neq 0$)ならば $\tilde{v}^i = 0$ ($\hat{v}^i = 0$)であることを条件とする。これらの準備の下、仮想入力 $v \in [-1, 1]^n$ に対し、正・負のパルス列を

$$\hat{a} = \mathbf{a}(\hat{v}), \quad \tilde{a} = \mathbf{a}(-\tilde{v}) \quad (8)$$

で与えることにすると

$$I(\hat{a}) - I(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n P_i \hat{v}^i - \sum_{i=1}^n P_i (-\tilde{v}^i) = \sum_{i=1}^n P_i v^i$$

が成り立ち、 n 個の仮想入力 $v^i \in [-1, 1]$ を係数にもつ線形結合式に変換できる。

多入力線形系への変換手順

提案する線形化法を以下にまとめる。

Step 1 n 次元平行体 Γ が $I(\Delta)$ に含まれるように n 本の独立なベクトル $P_1, \dots, P_n$ を選ぶ。

Step 2 $I(\mathbf{a}(v)) = \sum_{i=1}^n P_i v^i$, $v \in [0, 1]^n$ を満たす変換則 $\mathbf{a} : [0, 1]^n \rightarrow \Delta$ を構成する。

Step 3 Fig. 4に示す仮想入力 $v \in [-1, 1]^n$ を入力とし高々 n 個のパルスを出力するパルス生成器を用意する。生成器では、与えられた v を(7)によって $\hat{v}$ と $\tilde{v}$ に分解し、(8)により決まるタイミングによってそれぞれ正のパルス群、負のパルス群を定義した後に、それらのパルス群の和を系(6)への入力パルス群とする。

Step 4 このパルス生成器を制御対象の前に直列に置くことで、仮想入力 v から(6)のサンプル点上の状態 $x(kT)$, $k =$

Fig. 4 Pulses generator for exact transformation to multi-input linear system

0, 1, ... までの伝達特性は、多入力線形系

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + w^0 \sum_{i=1}^n P_i v^i \quad (9)$$

のそれと等価になる。

(注意) 仮想入力 0 から決まるパルス群タイミング $\mathbf{a}(0)$ は各パルスの立ち上がりとしち下がり相殺するようなもので、パルスが制御区間上にない状況に等しい。上のパルス生成器は、 $\hat{v} = 0$ と $\tilde{v} = 0$ の一方が成り立つ場合には正負どちらかの高々 $[n/2]$ 個のパルスのみをつくりだす。また、両方成り立つ場合（すなわち、 $v = 0$ のとき）はパルスを生成しない。
(注意) 多入力線形系 (9) において第二項がつくりだす像は平行体の選び方（すなわち P_i の選び方）に直接依存する。特に、平行体を大きく（小さく）構成することは (9) の入力項の像も大きく（小さく）なることを意味する。操作量が生むベクトルの大きさと方向の選択可能範囲を増やして系への影響度を高めるという意味においては、平行体はその体積が大きくなるように選ぶべきである。

4. 適用例

ここでは、Fig. 5 に示す単相インバータ回路における負荷電圧 V_c の目標交流電圧追従制御を試みる。回路のパラメータは Table 1 に与えた。スイッチの切り替えにより生成される電圧 v_{inv} が制御対象に対する入力であり、その瞬時値は $\{-E, 0, E\}$ のいずれかである。Fig. 5 の鎖線内の回路は以下で記述できる。

$$x = \begin{bmatrix} V_c \\ \dot{V}_c \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -1/CR \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix}.$$

目標交流信号は、

Fig. 5 Single-phase bridge inverter circuit diagram

Table 1 Parameters of the inverter

Parameters	Value
Sampling interval T	1.2 ms
Reference sine wave	50 Hz, 35 V
DC bus voltage $E(=w^0)$	40 V
Load resistance R	2 Ω
LC filter inductance L	0.53 mH
LC filter capacitance C	800 μ F
Initial condition $(V_c(0), \dot{V}_c(0))$	(15 V, 0 V/s)

Fig. 6 Control system using proposed pulses generator

$$V_c^{\text{ref}}(t) = 35 \sin(100\pi t) \text{ [V]},$$

$$\dot{V}_c^{\text{ref}}(t) = 3500\pi \cos(100\pi t) \text{ [V/s]}$$

である。

この系は可制御な二次系であり、共役な複素数でその虚部の大きさはナイキスト角周波数より小さい。したがって、 $I(\Delta)$ の像は $\mathbb{E}^2$ 内の凸体である。提案法では、この凸体の中に平行四辺形を構成して多入力線形系へ変換則を導出するが、実は Fig. 2 と Fig. 3 の例が、このインバータ系に対する変換則となっている。前章で導入したパルス生成器 (Fig. 4) を Fig. 6 のように適用すると、仮想入力 v からサンプル点上の状態 x への伝達特性は

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + w^0 [P_1 \ P_2] v_k, v_k \in [-1, 1]^2$$

にしたがう。 P_1, P_2 が独立であるので、 $[P_1 \ P_2]$ が正則であることを利用して、以下のデッドビート特性を達成する制御則を採用する。

$$v_k = \frac{[P_1 \ P_2]^{-1}}{w^0} (x_{k+1}^{\text{ref}} - e^{AT}x(kT)),$$

$$x_{k+1}^{\text{ref}} = [V_c^{\text{ref}}((k+1)T) \ \dot{V}_c^{\text{ref}}((k+1)T)]^T.$$

ここで、比較のために、先行研究^{12), 13)}の方法によって得られる単入力線形モデルを用いた制御系を導入しておく。ただし、単入力系では周期 T ごとのデッドビート特性を得ることはできないので、サンプリング周期を半分の 0.6 ms ($=: T$) とした離散化モデルを考え、マルチレートサンプリング制御を試みることにす

Fig. 7 Simulation results: solid lines mean the reference signals; circles (o), pluses (+), and triangles (▼) mean the time serieses when the proposed method with the multi-input model, multi-rate-sampling control with exactly linearized single-input model, and multi-rate-sampling control with the approximately linearized single-input model is applied, respectively

る。まず, $I(\Delta)$ 内^(注3)で線分 $\{I(0,1)v\}_{v \in [0,1]}$ を選び, 単入力系 $x((k'+1)T) = e^{AT}x(k'T) + w^0 I(0,1)v_{k'}$, $v_{k'} \in [-1,1]$ を用意する。そして, 2 段の発展方程式

$$\begin{aligned} x((k'+2)T) \\ = e^{AT}x(k'T) + w^0 [e^{AT}I(0,1)I(0,1)] \begin{bmatrix} v_{k'} \\ v_{k'+1} \end{bmatrix}, \\ k' = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

を考える。実は $I(0,1)$ の選択による厳密線形化がゼロ次ホールド離散化に相当していて連続時間系の可制御性を保存することから, 上式入力項の行列は正則となっている。そこで, 先と同様に

$$\begin{bmatrix} v_{k'} \\ v_{k'+1} \end{bmatrix} = \frac{[e^{AT}I(0,1)I(0,1)]^{-1}}{w^0} (x_{k'+2}^{\text{ref}} - e^{AT}x(k'T)),$$

(注3) $I(\Delta)$ はサンプリング周期に依存することに注意されたい。

Fig. 8 Simulation results: the top figure shows the pulses as the control input to the plant, where in order to make it easy to compare the two methods, the heights of the pulses are made different. The high ones are the pulses produced by the proposed method with the multi-input model, and low ones the multi-rate-sampling control with the exactly linearized single-input model. The middle and bottom figures show the enlarged views of the top figure

$$x_{k'+2}^{\text{ref}} = [V_c^{\text{ref}}((k'+2)T) \quad \dot{V}_c^{\text{ref}}((k'+2)T)]^T$$

によって操作量を与えることにする。この方法は, 単入力系に対するマルチレートサンプリング制御であり, 制御周期 T 内に 2 つのパルスを必要とする。

さらに, パルス中心を制御区間の中心に固定し, デューティ比のみを可変とした従来の方法とも比較することにする。従来の方法では, 系 (2) の入力項をデューティ比ゼロ周りで線形近似した

$$x((k'+1)T) = e^{AT}x(k'T) + w^0 T e^{AT/2} b v_{k'}, v_{k'} \in [-1,1]$$

を制御系設計に用いる⁹⁾。ここで $v_{k'}$ はデューティ比そのものである。この単入力モデルに対し上のマルチレートサンプリング制御を適用することにする。

数値実験結果を **Fig. 7** に示す。実線は参照入力, 丸記号 (o) は提案法を用いた場合の状態の遷移, プラス記号 (+) と三角記号 (▼) は, それぞれ厳密線形化単入力モデルと近似線形化単入力モデルを用いてマルチレートサンプリング制御を適用した際の状態遷移を示している。いずれも参照軌道に追従できているが, 追従誤差を比べると, 厳密線形化モデルを用いたほうが近似線形化モデルを用いた場合より誤差を小さくできていることがわかる。

また, **Fig. 8** は, 厳密線形化した多入力モデルと単入力モ

デルを用いた場合において、制御対象に加えられたパルス群を示している。なお、結果を比較しやすくするために、パルスの高さを変えて図示しているが、実際には同じ $\pm 40\text{ V}$ の電圧が印加されている。提案法に注目すると、ほとんどの制御区間でパルスは1つのみである（つまり、仮想入力 $\hat{v}$ と $\check{v}$ が同時に0以外の値をとることはまれである）ことがわかる。一方、単入力モデルの場合には、周期 T ごとのデッドビート特性を達成するためにマルチレートサンプリング制御を導入したが、Fig. 8 のように必然的に各周期に2つのパルスが配置される。このように、提案法は厳密線形化の達成のみでなく、スイッチング周波数を低く抑えるという目的においても有意性があるといえる。

5. おわりに

本論文では、制御区間におけるパルスの幅だけでなく、数や配置を可変にしたPWM型入力系を扱い、サンプル点上の振る舞いを記述する離散時間系の入力項のベクトル値集合が凸体であるという性質を用いて、非線形特性を有する離散時間系を状態空間の次元と同じ数の入力をもつ多入力線形系に変換する方法を提案した。また、変換先の線形系の入力行列は正則となるので、全状態量に対する参照軌道が与えられればその軌道にサンプル点上で誤差なく追従できるパルス群を与えることができることを、具体的な適用例を通して紹介した。なお、提案法では制御区間に最大で n 個（ n はシステムの次数）のパルスを用いるが、数値実験はほとんどの制御区間において n よりも少ない数のパルスで十分であることを示していた。これは、パルス生成のためにスイッチング周波数を低く抑えることに有意な性質と捉えることができる。

本論文では導出された多入力線形系について、仮想入力の飽和に関する対策は全く議論していない（インバータの数値実験では入力飽和にかからなかった）。本提案法に限らずPWM型入力をともなう制御には入力飽和の問題がともなうので、制御系設計において留意しなければならない。

謝辞 本研究を遂行するにあたり議論いただいた宇都宮大学大学院・薄井竣介氏に感謝します。本研究の一部はJSPS科研費JP17K14698, JP16K14282の助成を受けたものです。

参 考 文 献

- 1) 浅井 徹: PWM (Pulse width modulation) 型制御入力に基づく制御, システム/制御/情報, **56-9**, 486/491 (2012)
- 2) S. Mariéthoz, S. Almér, M. Bâja, A.G. Beccuti, D. Patino, A. Wernrud, J. Buisson, H. Cormerais, T. Geyer, H. Fujioka, U.T. Jönsson, C.Y. Kao, M. Morari, G. Papafotiou, A. Rantzer and P. Riedinger: Comparison of hybrid control techniques for buck and boost DC-DC converters, IEEE Trans. Control Syst. Technol., **18-5**, 1126/1145 (2010)
- 3) V.M. Kuntsevich and Y.N. Chekhovoi: Fundamentals of non-linear control systems with pulse-frequency and pulse-width modulation, Automatica, **7-1**, 73/81 (1971)
- 4) L. Hou and A.N. Michel: Stability analysis of pulse-width-modulated feedback systems, Automatica, **37-9**, 1335/1349 (2001)
- 5) S. Almér, U. Jönsson, C.-Y. Kao and J. Mari: Stability analysis of a class of PWM systems, IEEE Trans. Autom. Control, **52-6**, 1072/1078 (2007)
- 6) 富田, 浅井: PWM 型制御入力に基づく安定化制御, 計測自動制御学会論文集, **42-2**, 129/138 (2006)
- 7) H. Fujioka, C.-Y. Kao, S. Almér and U. Jönsson: Robust tracking with H_∞ performance for PWM systems, Automatica, **45-8**, 1808/1818 (2009)
- 8) F.R. Delfeld and G.J. Murphy: Analysis of pulse-width-modulated control systems, IRE Trans. Autom. Control, **6-3**, 283/292 (1961)
- 9) 河村篤男: PWM インバータで駆動されるパワーエレクトロニクスシステムの線形サンプル値モデルの導出, 電気学会全国大会講演集, 636/637 (1987)
- 10) K.P. Gokhale, A. Kawamura and R.G. Hoft: Dead beat microprocessor control of PWM inverter for sinusoidal output waveform synthesis, IEEE Trans. Ind. Appl., **IA-23-5**, 901/910 (1987)
- 11) H. Fujimoto, Y. Hori and S. Kondo: Perfect tracking control based on multirate feedforward control and applications to motion control and power electronics: A simple solution via transfer function approach, Power Conversion Conference, 196/201 (2002)
- 12) 鈴木, 平田: PWM 制御系の入力変換による厳密線形化, 計測自動制御学会論文集, **52-4**, 205/212 (2016)
- 13) 鈴木, 平田: 低サンプリングレート PWM 型入力系の厳密線形化: 正パルスのみを用いた制御系設計, 電気学会メカトロニクス制御研究会, **MEC-16-021**, 19/25 (2016)
- 14) M. Suzuki and H. Hirata: Exact linearization of second-order PWM-type input systems: Star-shaped input-value sets, IEEE International Workshop on Advanced Motion Control (2018) (to appear)
- 15) 鈴木, 平田: 高次 PWM 型入力系の厳密線形化: 入力値集合の特性, 自動制御連合講演会予稿集, 1096/1099 (2016)

[著 者 紹 介]

鈴木 雅 康 (正会員)

2010 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。同年東京工業大学特別研究員・科学技術振興機構研究員, 2013 年より宇都宮大学助教。偏微分方程式系や非線形系の制御, ネットワーク同定, 制御応用の研究に従事。博士 (工学)。IEEE, システム制御情報学会, 日本機械学会, 電気学会, 電子情報通信学会の会員。

平 田 光 男 (正会員)

1996 年千葉大学大学院自然科学研究科修了。同年千葉大学助手, 2004 年宇都宮大学助教授, 2007 年同准教授, 2013 年同教授現在に至る。博士 (工学)。2002~2003 年カリフォルニア大学バークレイ校機械工学科客員研究員。ロボスタ制御, ナノスケールサーボ制御, およびそれらの産業応用に関する研究・教育に従事。システム制御情報学会, 電気学会, 日本機械学会, IEEE の会員。