多変数関数の近似的逆関数に基づく冗長自由度電気自動車の アクチュエータ配分最適化

—行列に基づく Lagrange inversion の演算—

浅井 徹*・山口 雅弘*・有 泉 亮*

Actuator Distribution Optimization of Electric Vehicles with Redundant Degree of Freedom
Based on Approximate Inverse Transform of Multivariable Functions
—Calculation of Lagrange Inversion Based on Matrix Operations—

Toru ASAI*, Masahiro YAMAGUCHI* and Ryo ARIIZUMI*

In order to design control systems for ULVs (Ultra Lightweight Vehicles) with redundant actuators, a hierarchical control structure has been proposed. In the structure, the force distribution has been determined based on numerical optimizations. To determine the distribution, the inverse of the multivariate nonlinear function is required. This paper propose a method to compute an approximate but explicit inverse via proposing a method to construct the Lagrange inversion based on matrix computations. This is enabled by expanding the function as the power series in terms of the Kronecker products.

Key Words: multivariable control, mechatronics systems, transportation systems

1. はじめに

低炭素社会の要求や高齢化社会を背景として、超小型モビリティの開発が国土交通省から推奨されている¹⁾。また、自動車技術会と計測自動制御学会合同のベンチマーク問題においても、超小型モビリティを想定した問題が出題されている²⁾。このベンチマーク問題では、従来よりも多くのアクチュエータを冗長に有する車両を想定し、それらを活用することで従来車両と同等の操縦安定性を確保することが求められている。

このような車両に対する制御系の設計に対して、階層的に制御系を設計する手法が提案されている^{3)~5)}。階層的な制御系の設計を用いると、モデルや制御則を階層ごとに切り分けて考えることができ、制御系の設計を簡単にすることができる。本研究では文献 4), 5) で提案されている制御系の 2 つの階層について考える。具体的には剛体運動に着目する Layer 0 と、アクチュエータに対する力配分を扱う Layer 1 の 2 階層を考える。Layer 0, Layer 1 を有する制御系の構造を Fig. 1 に示す。

本稿では Layer 1 の制御器に着目する。Layer 1 の制御器

では、Layer 0 で生成された合力、合トルク指令を冗長なアクチュエータを用いて達成することが求められる。その際、指令値達成以上の冗長な自由度は消費電力の最小化や安定余裕の増大などに活用することができる。Layer 1 の本質は、冗長自由度を考慮しながら逆関数を構成することである。しかしながら、対象とする関数は三角関数などを含む非線形なものであり、その逆関数を厳密に構成することは困難である。

従来は、数値最適化に基づいて逆関数がとる値を求めている⁶⁾。しかしながら、このままでは得られた結果を評価することや、性能を改善するための見通しを得ることも困難である。そこで本稿では Lagrange inversion, すなわち関数のテイラー展開に基づいて近似的な逆関数を陽に得ることを考える。一般に多変数関数の Lagrange inversion を陽に書き表わすことは困難である^{7), 8)}。これに対し本稿では、次数を 4 次までに限定し、Lagrange inversion を行列に基づいて陽に書き下す。これにより、指令値を達成することや冗長自由度を活用するための最適化などが容易になることが期待される。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、第 2 章で車両モデルを示す。つぎに、第 3 章で本稿の主結果を示す。第 4 章では主結果の有効性を数値例を用いて検証する。

本論文の記法は標準的なものである。 $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$ はそれぞれ自然数および実数の集合を表わす。 $A \otimes B$ は行列 A と B のクロネッカー積を表わす。すなわち、 $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とすると、

* 名古屋大学大学院工学研究科 名古屋市中種区不老町

* Graduate School of Engineering, Nagoya University, Furocho, Chikusa-ku, Nagoya

(Received May 18, 2017)

(Revised August 14, 2017)

Fig. 1 Structure of hierarchical control system

Fig. 2 Model of Layer 1

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

である。

2. 車両モデル

2.1 Layer 1 のモデル

Layer 1 のモデルは、タイヤ力と車体に作用する力・トルクを記述するものである。想定している車両のうち、Layer 1 に関連する部分を Fig. 2 に示す。\$x\$ 軸、\$y\$ 軸はそれぞれ車両の前後、左右方向を表わし、それぞれ前、左向きを正とする。

タイヤが発生する力はタイヤのスリップ角 (\$\beta_i\$) とスリップ率 (\$\lambda_i\$) によって生じる。ただし、添え字の \$i \in \{fl, fr, rl, rr\}\$ はそれぞれ左前、右前、左後、右後ろのタイヤを指す。一般にタイヤ力とスリップ角、スリップ率の関係は非線形である。しかしながら、スリップ角、スリップ率の絶対値が小さければ、タイヤ力はスリップ角、スリップ率にほぼ比例することが知られている^{9), 10)}。そこで本稿では、タイヤ力の縦方向成分 \$F_{ti}\$、横方向成分 \$F_{si}\$ が次式で与えられるものと仮定する。

$$F_{ti} = -D_i \lambda_i, \quad (1)$$

$$F_{si} = -K_i \beta_i \quad (2)$$

ただし、\$D_i\$、\$K_i\$ は比例定数である。

Fig. 2 の関係から、スリップ角 \$\beta_i\$ は以下のように表わされる。

$$\beta_{fl} = \arctan \left(\frac{v_y + l_f \gamma}{v_x - d_l \gamma} \right) - \delta_{fl} \quad (3)$$

$$\beta_{fr} = \arctan \left(\frac{v_y + l_f \gamma}{v_x + d_r \gamma} \right) - \delta_{fr} \quad (4)$$

$$\beta_{rl} = \arctan \left(\frac{v_y - l_r \gamma}{v_x - d_l \gamma} \right) - \delta_{rl} \quad (5)$$

$$\beta_{rr} = \arctan \left(\frac{v_y - l_r \gamma}{v_x + d_r \gamma} \right) - \delta_{rr} \quad (6)$$

ただし、\$v_x\$、\$v_y\$ はそれぞれ車両速度の \$x\$ 軸、\$y\$ 軸方向成分、\$\gamma\$ は車両のヨーレート、\$\delta_i\$ は各タイヤの舵角である。また、\$l_f\$、\$l_r\$ は車両重心から前タイヤ、後タイヤまでの距離、\$d_l\$、\$d_r\$ は車両重心から左タイヤ、右タイヤまでの距離である。

\$F_{ti}\$、\$F_{si}\$ とタイヤが発生する力の \$x\$ 軸方向成分 \$F_{xi}\$、\$y\$ 軸方向成分 \$F_{yi}\$ の関係は以下のとおりである。

$$F_{xi} = F_{ti} \cos \delta_i - F_{si} \sin \delta_i \quad (7)$$

$$F_{yi} = F_{ti} \sin \delta_i + F_{si} \cos \delta_i \quad (8)$$

各タイヤが発生する力を用いると、車両に作用する合力の \$x\$ 方向成分 \$F_x\$、\$y\$ 方向成分 \$F_y\$、合トルク \$T\$ は以下のように与えられる。

$$F_x = F_{xfl} + F_{xfr} + F_{xrl} + F_{xrr} \quad (9)$$

$$F_y = F_{yfl} + F_{yfr} + F_{yrl} + F_{yrr} \quad (10)$$

$$T = -d_l(F_{xfl} + F_{xrl}) + d_r(F_{xfr} + F_{xrr}) + l_f(F_{yfl} + F_{yfr}) - l_r(F_{yrl} + F_{yrr}) \quad (11)$$

スリップ率 \$\lambda_i\$、スリップ角 \$\beta_i\$ から合力 \$F_x\$、\$F_y\$、合トルク \$T\$ までの関係をコンパクトに表現するために、ベクトル \$\phi \in \mathbf{R}^3\$、\$q, p \in \mathbf{R}^8\$ をそれぞれ

$$\phi = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ T \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \end{bmatrix}$$

と定める。ただし、

$$q_x = \begin{bmatrix} F_{xfl} & F_{xfr} & F_{xrl} & F_{xrr} \end{bmatrix}^T, \\ q_y = \begin{bmatrix} F_{yfl} & F_{yfr} & F_{yrl} & F_{yrr} \end{bmatrix}^T, \\ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{fl} & \lambda_{fr} & \lambda_{rl} & \lambda_{rr} \end{bmatrix}^T, \\ \beta = \begin{bmatrix} \beta_{fl} & \beta_{fr} & \beta_{rl} & \beta_{rr} \end{bmatrix}^T$$

である。このとき、(1) ~ (11) 式の関係以下のように表わすことができる。

$$\phi = D_0 q, \quad q = f(p) \quad (12)$$

ただし, f は (1) ~ (8) 式で定義される関数, D_0 は以下の行列である.

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -d_l & d_r & -d_l & d_r & l_f & l_f & -l_r & -l_r \end{bmatrix}$$

Layer 1 の目的は, 与えられた ϕ に対して (12) 式を満足する p を求めることである. ここで, ϕ は 3 次元であるのに対し p は 8 次元であるため, p は冗長な自由度を有する. 一方, p には物理的な制約も存在する. 文献 6) では, (12) 式を満足し, さらにタイヤの負荷の均等化や消費電力の最小化を達成する p を数値最適化に基づいて求めている. しかしながら, このような手法では, 数値的な問題によって (12) 式の等式制約条件が満足されない状況に陥ると最適化が止まってしまう, 最適化によって得られた解が冗長な自由度をどのように利用しているのかわかりにくい, などの問題がある.

このような状況に対して, (12) 式を満足する p の集合を陽にパラメトライズし, そのパラメトリゼーションにあらわれる自由変数を用いて最適化を行えば上記の問題を解決することができる. そこで本論文では, f の近似的な逆関数を陽に与えることによって, (12) 式を満足する p の近似的なパラメトリゼーションを与えることを考える.

3. 逆関数に基づくパラメトリゼーション

Layer 1 における制御入力 λ, β は (12) 式の条件を満足しなければならない. ここで, 行列 D_1 を

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{l_{pl}}{d^2} & -\frac{l_{pl}}{d^2} & \frac{l_{pl}}{d^2} & -\frac{l_{pl}}{d^2} & \frac{d_{pl}}{d^2} & \frac{d_{pl}}{d^2} & -\frac{d_{pl}}{d^2} & -\frac{d_{pl}}{d^2} \end{bmatrix}$$

とし, $c \in \mathbf{R}^5$ を

$$c = D_1 q \quad (13)$$

と定める. ただし,

$$d_{pl} = d_l + d_r, \quad l_{pl} = l_f + l_r, \\ d = \sqrt{d_{pl}^2 + l_{pl}^2}$$

である. c は

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xfl} - F_{xrl} \\ F_{xfr} - F_{xrr} \\ F_{yfl} - F_{yfr} \\ F_{yrl} - F_{yrr} \\ \frac{l_{pl}}{d^2} F_{xs} + \frac{d_{pl}}{d^2} F_{ys} \end{bmatrix}$$

$$F_{xs} = F_{xfl} - F_{xfr} + F_{xrl} - F_{xrr}$$

$$F_{ys} = F_{yfl} + F_{yfr} - F_{yrl} - F_{yrr}$$

Fig. 3 Forces to push and/or pull the body

であるので, $c_1 \sim c_5$ はそれぞれ以下の内力に対応している.

- 車両左側を前後に引き延ばそうとする力
- 車両右側を前後に引き延ばそうとする力
- 車両前側を左右に引き延ばそうとする力
- 車両後側を左右に引き延ばそうとする力
- Fig. 3 に示す方向で車両を車両中心方向に押し潰そうとする, または, 外向きに引き延ばそうとする力

このとき, (13), (12) 式より次式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} \phi \\ c \end{bmatrix} = D q, \quad D = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここでさらに, 行列 D が正則であることから, (14) 式より次式が成り立つ.

$$q = D^{-1} \begin{bmatrix} \phi \\ c \end{bmatrix} \quad (15)$$

(15) 式は q が ϕ と自由パラメータ c を用いてパラメトライズされることを示している. 以上より, 仮に (12) 式の関数 f の逆関数 f^{-1} を求めることができれば, ベクトル p を

$$p = f^{-1}(q) = f^{-1} \left(D^{-1} \begin{bmatrix} \phi \\ c \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

のように ϕ と c を用いてパラメータ表示することができる.

関数 f は非線形であり, 一般にその逆関数を陽に求めることは困難である. このとき, たとえば f の線形近似を用いれば近似的な逆関数を容易に得ることが可能である. しかしながら, このような方法で得られた逆関数は近似精度が低く, 制御系に誤差をもたらすこととなる.

たとえば, 文献 6) で用いられているモデルにおいて, 自由パラメータ c を 0 とし, f の線形近似に基づく逆関数を用いたときの結果を Fig. 4 ~ Fig. 6 に示す. Fig. 4 ~ Fig. 6 は, ある走行条件での Layer 0 から与えられる指令値と, それに対して実際に出力された値の応答を示したものである.

Fig. 4 F_x Fig. 5 F_y Fig. 6 T

Fig. 4 ~ Fig. 6 より, F_x と F_y において指令値と出力値の間に誤差が生じていることが確認できる。これは、逆関数の精度が低いことから生じているものである。

以上の例から、線形近似では逆関数の近似精度が不十分であることが確認できる。これに対し、テイラー展開の次数を高めれば近似精度が高まることが期待できる。そこでここでは、テイラー展開の有限次数近似に基づいて近似的な逆関数を陽に求めることを考える。

4. 行列に基づく Lagrange inversion の演算

前章までに述べたように、(12) 式の関数 f のテイラー展開に基づいて逆関数を精度よく求めることができれば、近似的にはあるが q のパラメトリゼーションを得ることができる。このような目的に対し、以下の事実が知られている。関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ について、 $\left. \frac{\partial f(p)}{\partial p} \right|_{p=0}$ は正則とする。このとき、逆関数定理¹¹⁾より $p=0$ の近傍で f には逆関数 f^{-1} が存在する。さらに、 f, f^{-1} がともにテイラー展開可能であれば、 f^{-1} のテイラー展開を f のテイラー展開を用いて陽に表現することができる^{7), 8)}。この逆関数表現は Lagrange inversion と呼ばれている。

Lagrange inversion を用いれば逆関数を陽に与えることができる。実際、 $f(0) = 0$ を満足する関数 f に対して

$$f(p) = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{\phi_1(p)} & \cdots & \frac{p_n}{\phi_n(p)} \end{bmatrix}^T$$

を満足する $\phi(p)$ を定義すると、 f の逆関数 f^{-1} は次式で与えられる¹²⁾。

$$f^{-1}(q) = \sum_m \frac{q^m}{\bar{m}!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^m w \phi(w)^m D(w, q; \phi) \right]_{w=0} \quad (17)$$

$$D(w, q; \phi) = \det \left(\delta_{ij} - q_i \frac{\partial \phi_i(w)}{\partial w_j} \right)$$

ただし、

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & \cdots & m_n \end{bmatrix}, \quad \bar{m} = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$q^m = \prod_{i=1}^n q_i^{m_i}$$

である。(17) 式は f の逆関数を級数展開によって与えている。(17) 式からわかるように、Lagrange inversion では m 階微分の対象となる関数自体が m に依存する。このように、Lagrange inversion の計算は煩雑である。

そこで本論文では、 $f(p)$ を p のクロネッカー積に関するべき級数で表現することにより、行列演算に基づいて Lagrange inversion を求めることを考える。特に本論文では、 p のクロネッカー積に関するべき級数表現と Lagrange inversion の関係を示す基礎的な結果を与える。ただし、本論文の結果はあくまでも基礎的な結果であり、逆関数の一般次数の係数を見通しよく求めることまではできていない。しかしながら、数次の近似であっても実用的には十分であることは多い。そこで本論文では基礎的な結果とともに 4 次までの Lagrange inversion を陽に与えることを考える。

関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ は一般性を失うことなく $f(0) = 0$ を満足し、さらに以下のように p のクロネッカー積に関するべき級数展開が可能とする。

$$f(p) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot \otimes^k p \quad (18)$$

ただし, $F_k \in \mathbf{R}^{n \times n^k}$ であり, $\otimes^k p$ ($k=1, 2, \dots$) は次式で定義されるものである.

$$\begin{aligned} \otimes^1 p &= p, \quad \otimes^k p = (\otimes^{k-1} p) \otimes p \quad (k=2, 3, \dots) \\ p &= [p_1 \ p_2]^T \text{ のとき } \otimes^2 p, \otimes^3 p \text{ を具体的に書き下すと} \\ \otimes^2 p &= [p_1^2 \ p_1 p_2 \ p_1 p_2 \ p_2^2]^T \\ \otimes^3 p &= [p_1^3 \ p_1^2 p_2 \ p_1 p_2^2 \ p_1 p_2^2 \ p_1 p_2^2 \ p_2^3]^T \end{aligned} \quad (19)$$

$$(20)$$

である. (19), (20) 式からもわかるように, 与えられた f に対して (18) 式の表現は一意ではない. 実際, 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} S_2 \cdot \otimes^2 p &= \otimes^2 p \\ S_2 &= \text{diag} \left(1, \begin{bmatrix} 1 - \sigma_1 & \sigma_1 \\ 1 - \sigma_2 & \sigma_2 \end{bmatrix}, 1 \right) \end{aligned}$$

が成り立つので, 任意の $p \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$F_2 \cdot \otimes^2 p = (F_2 S_2) \cdot \otimes^2 p$$

が成り立つ. 本論文では, べき級数展開の各項 $F_k \cdot \otimes^k p$ がとる値に着目するので, F_k が一意に定まらないことは問題にはならない. また, $\otimes^k p$ が p の通常の意味での k 次のべき乗を冗長に表現していることから, $f(p)$ が p に関して通常の意味でのべき級数に展開できれば, (18) 式のクロネッカー積に関するべき級数展開は常に可能である.

関数 $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ のべき級数展開がそれぞれ (18) 式のように与えられていたとき, f と g の和, および f と g の合成関数もべき級数で表現することが可能である. 実際,

$$\begin{aligned} f(p) + g(p) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot \otimes^k p + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cdot \otimes^k p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (F_k + G_k) \cdot \otimes^k p \\ f(g(q)) &= \sum_{k=1}^{\infty} H_k \cdot \otimes^k q \end{aligned} \quad (21)$$

である. ただし, H_k ($k=1, 2, \dots$) は次式で定義される行列である.

$$H_k = \sum_{\ell=1}^k F_\ell \hat{H}_{\ell,k} \quad (22)$$

$$\hat{H}_{\ell,k} = \begin{cases} G_k & (\ell=1) \\ 0_{n \times n} & (\ell \geq 2, k=1) \\ \sum_{m=1}^{k-1} G_m \otimes \hat{H}_{\ell-1, k-m} & (\ell \geq 2, k \geq \ell) \end{cases} \quad (23)$$

このとき特に $\ell \geq 2, k=1, \dots, \ell-1$ に対して

$$\hat{H}_{\ell,k} = 0_{n \times n^k} \quad (24)$$

成り立つ. また, $\ell \geq 1$ に対して

$$\hat{H}_{\ell,\ell} = \otimes^\ell G_1 \quad (25)$$

も成り立つ. (21) ~ (25) 式の証明を付録に示す.

以降では f の逆関数のべき級数展開を求めることを考える. そのために, まず $\det F_1 \neq 0$ を仮定する. ここではさらに, 逆関数もべき級数展開が可能であると仮定する. すなわち,

$$f^{-1}(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_k \cdot \otimes^k q$$

とする. ただし, $\bar{F}_k \in \mathbf{R}^{n \times n^k}$ である.

一般に, 逆関数 f^{-1} を厳密に求めることは困難である. そこで本論文では, ある有限の次数まで f^{-1} のべき級数展開を求める, すなわち, 近似的な逆関数を求めることを考える.

ここで, 以降の記述を簡略にするために, 以下の作用素を定義する.

【定義】 (18) 式のようにべき級数展開される関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を考える. このとき, 自然数 $\ell \in \mathbf{N}$ に対し, $[f]_\ell, [f]_\ell, [f]_\ell$ はそれぞれ以下の関数を表わす.

$$\begin{aligned} [f]_\ell(p) &= \sum_{k=1}^{\ell} F_k \cdot \otimes^k p \\ [f]_\ell(p) &= F_\ell \cdot \otimes^\ell p \\ [f]_\ell(p) &= \sum_{k=\ell}^{\infty} F_k \cdot \otimes^k p \end{aligned}$$

以下の補題は近似的な逆関数を求めるための礎となるものである.

【補題 1】 集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 上で関数 $f, g, h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ のべき級数展開が (18) 式のように与えられたものとする. さらに $\det F_1 \neq 0$ を仮定する. このとき, 任意の $\ell \in \mathbf{N}$ に対して, 以下の主張が成立する.

• 任意の $k=1, \dots, \ell$ に対して

$$\forall q \in X \quad [f \circ g]_k(q) = [f \circ h]_k(q) \quad (26)$$

が成り立つための必要十分条件は, 任意の $k=1, \dots, \ell$ に対して次式が成り立つことである.

$$\forall q \in X \quad G_k \cdot \otimes^k q = H_k \cdot \otimes^k q \quad (27)$$

(証明) 十分性は自明であるので, 必要性のみを証明する.

$\ell \in \mathbf{N}$ が任意に与えられたものとし, k に関する数学的帰納法に基づいて証明を行なう. まず, $k=1$ に対して (26) 式が成り立つとする. すなわち,

$$\forall q \in X \quad F_1 G_1 q = F_1 H_1 q$$

が成り立つとする. 仮定より, $\det F_1 \neq 0$ であるので, $k=1$ に対して (27) 式が成り立つ.

つぎに, ある ℓ に対して定理の主張が成り立つものとする. さらに, $k = 1, \dots, \ell + 1$ に対して (26) 式が成り立つと仮定する. このとき, あきらかに $k = 1, \dots, \ell$ に対して (26) 式が成り立つので, 仮定より $k = 1, \dots, \ell$ に対して (27) 式が成り立つ.

ここで, $f(p)$, $g(q)$ をそれぞれ

$$f(p) = F_1 \cdot p + [f]_2(p)$$

$$g(q) = [g]_\ell(q) + G_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q + [g]_{\ell+2}(q)$$

と書くと, 任意の $q \in X$ に対して

$$[f \circ g]_{\ell+1}(q) = F_1 \cdot G_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q + [[f]_2 \circ g]_{\ell+1}(q)$$

が成り立つ. $[f]_2(p)$ は p の 2 次以上の項からなる級数であることから,

$$[[f]_2 \circ g]_{\ell+1}(q) = [[f]_2 \circ [g]_\ell]_{\ell+1}(q)$$

が成り立つ. よって,

$$[f \circ g]_{\ell+1}(q) = F_1 \cdot G_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q + [[f]_2 \circ [g]_\ell]_{\ell+1}(q) \quad (28)$$

が成り立つ. 同様にして,

$$[f \circ h]_{\ell+1}(q) = F_1 \cdot H_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q + [[f]_2 \circ [h]_\ell]_{\ell+1}(q) \quad (29)$$

も成り立つ.

仮定より,

$$[f \circ g]_{\ell+1}(q) = [f \circ h]_{\ell+1}(q)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} F_1 \cdot G_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q + [[f]_2 \circ [g]_\ell]_{\ell+1}(q) \\ = F_1 \cdot H_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q + [[f]_2 \circ [h]_\ell]_{\ell+1}(q) \end{aligned} \quad (30)$$

が成り立つ. ここで, $k = 1, \dots, \ell$ に対して (27) 式が成り立つので,

$$[g]_\ell(q) = [h]_\ell(q) \quad (31)$$

である. よって, (31), (30) 式より

$$F_1 \cdot G_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q = F_1 \cdot H_{\ell+1} \cdot \otimes^{\ell+1} q$$

が成り立つ. さらに, $\det F_1 \neq 0$ であったので, $k = \ell + 1$ に対して (27) 式が成り立つ. 以上より, $k = 1, \dots, \ell + 1$ に対して (27) 式が成り立つ.

$\ell \in \mathbf{N}$ は任意であったので, 補題が成り立つ. $\square$

補題 1 は $f(g(q)) = q$ の ℓ 次までの項に基づいて g を求めれば, ℓ 次までの意味で g が f^{-1} に一致することを保証している.

補題 1 を用いると, (18) 式のようにべき級数展開される f に対して, その逆関数を行列演算に基づいて陽に与えること

ができる.

《定理 1》 集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 上で関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ のべき級数展開が (18) 式で与えられ, さらに $\det F_1 \neq 0$ が成り立つものとする. また, f^{-1} もべき級数展開が可能とする. このとき,

$$g(q) = \sum_{k=1}^4 G_k \cdot \otimes^k q$$

とすると, 任意の $q \in X$ に対して

$$[f^{-1}]_4(q) = g(q) \quad (32)$$

$$[f \circ g]_4(q) = [g \circ f]_4(q) = q \quad (33)$$

が成り立つ. ただし

$$G_1 = F_1^{-1} \quad (34)$$

$$G_2 = -F_1^{-1} F_2 \cdot \otimes^2 G_1 \quad (35)$$

$$G_3 = -F_1^{-1} (F_2 \tilde{G}_{2,3} + F_3 \cdot \otimes^3 G_1) \quad (36)$$

$$G_4 = -F_1^{-1} (F_2 \tilde{G}_{2,4} + F_3 \tilde{G}_{3,4} + F_4 \cdot \otimes^4 G_1) \quad (37)$$

$$\tilde{G}_{2,3} = G_1 \otimes G_2 + G_2 \otimes G_1 \quad (38)$$

$$\tilde{G}_{2,4} = G_1 \otimes G_3 + G_3 \otimes G_1 + G_2 \otimes G_2 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{3,4} = G_1 \otimes G_1 \otimes G_2 + G_1 \otimes G_2 \otimes G_1 \\ + G_2 \otimes G_1 \otimes G_1 \end{aligned} \quad (40)$$

である.

(証明) まず, (32) 式を示す. 簡単な計算から, (21) 式の各係数 $\hat{H}_{\ell,k}$ が以下のように与えられることを確かめることができる.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1,2} = G_2, \quad \hat{H}_{1,3} = G_3, \quad \hat{H}_{1,4} = G_4, \\ \hat{H}_{2,3} = \tilde{G}_{2,3}, \quad \hat{H}_{2,4} = \tilde{G}_{2,4}, \\ \hat{H}_{3,4} = \tilde{G}_{3,4} \end{aligned}$$

これと, (21) ~ (25), (34) ~ (40) 式より

$$[f \circ g]_1(q) = q, \quad [f \circ g]_k(q) = 0 \quad (k = 2, 3, 4)$$

が成り立つ. これは (33) 式の $[f \circ g]_4(q) = q$ が成り立つことも意味する. よって補題 1 より, $k = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$[f^{-1}]_k(q) = [g]_k(q) \quad (41)$$

が成り立つ. (41) 式は (32) 式を意味する.

(33) 式の $[g \circ f]_4(q) = q$ が成り立つことは, クロネッカー積の公式¹³⁾を用いて直接計算することによって確かめることができる. $\square$

定理 1 は f の 4 次までの Lagrange inversion が, (34) ~ (40) 式の行列演算で陽に与えられることを示している.

前述したように, クロネッカー積によるべき級数表現は一意ではない. よって, (32) 式の右辺も, 一つの表現を与えているに過ぎない. しかしながら, 任意の $q \in X$ に対して (32) 式の両辺は等しいので, (32) 式右辺を用いて逆関数の値を 4 次

までの精度で計算することが可能である。

(32) 式より近似的にはあるが逆関数を求めることができるので、これを (16) 式の逆関数として用いることで (近似的な意味ではあるが) q のパラメトリゼーションを得ることができる。

(34) ~ (40) 式の結果は, (21) ~ (25) 式を用いて $(f \circ g)(q)$ を書き下し, (33) 式において q の各次数ごとに係数が等しいと仮定することにより得ることができる。この方針に従って計算や証明を行えば, 4 次だけでなく任意の指定された次数の近似式を得ることは不可能ではない。しかしながら, 次数が高くなるに従って式が複雑になり, その作業は必ずしも容易ではない。本論文では提案手法の考え方やメリットを明確にするために, とりあえず 4 次までの近似式を導出した。同じ作業を繰り返すことでより高次の (煩雑な) 近似式を導出することは, あまり生産的ではないと考えられる。より統一的に, かつ見通しよく一般の次数の近似式を得ることは今後の課題である。

5. 数 値 例

4 章の Lagrange inversion では, べき級数展開を打ち切る次数によって近似精度が変化する。そこで以下ではまず, 簡単な数値例を用いて次数による近似精度の差異を確認する。

ここでは, 以下の関数 $\mathcal{N} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を考える。

$$F = \mathcal{N}(x) = \begin{bmatrix} -D x_1 \cos(a - x_2) + K x_2 \sin(a - x_2) \\ -D x_1 \sin(a - x_2) - K x_2 \cos(a - x_2) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$D = 1.5 \times 10^4, \quad K = 4.0 \times 10^4, \quad a = 0.2$$

このとき $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \Big|_{x=0}$ は正則である。

Lagrange inversion の精度を確認するために, まず x_1 を $\bar{x}_1 = -0.01$ に固定する。そのうえで, 各 x_2 に対して

$$\Delta x = x - (\mathcal{N}^{-1} \circ \mathcal{N})(x) \quad (42)$$

を評価する。ただし, $\mathcal{N}^{-1}$ は本論文で提案する Lagrange inversion に基づく近似逆関数である。

得られた $\Delta x_1, \Delta x_2$ の絶対値を, それぞれ Fig. 7, Fig. 8 に示す。Fig. 7, Fig. 8 より, 次数が増えるごとにおおむね誤差が小さくなっていることがわかる。

つぎに Lagrange inversion による誤差を走行シミュレーションによって確認する。走行条件は加速円旋回とする。これは半径 50 m の半円形カーブにおいて, 停止状態から 5 秒間で 60 km/h まで加速しながら旋回し, その後一定速度で旋回する走行条件である。この走行条件の概略を Fig. 9 に示す。シミュレーションでは Table 1 で与えるパラメータを用いた。

Fig. 7 $|\Delta x_1|$

Fig. 8 $|\Delta x_2|$

Fig. 9 Accelerating and turning

ベンチマーク問題で与えられている走行条件, 車両モデル, 規範モデルなどから, Layer1 への指令値 $F_{xref}, F_{yref}, T_{ref}$ を求めることができる。つぎに, これらの指令値に対して, $c = 0$ とすることで Layer1 の出力 F_x, F_y, T を求める。その上で, 指令値 $F_{xref}, F_{yref}, T_{ref}$ と Layer1 の出力 F_x, F_y, T との差,

$$\Delta F_x = F_{xref} - F_x$$

Table 1 Value of parameter

Parameter	Symbol	Value
Weight [kg]	M_v	510
gravitational acceleration [m/s ²]	g	9.8
Yaw Moment of Inertia [kgm ²]	I	170
Wheel base [mm]	L	2000
Width [mm]	W	1190
Weight Balance (Front:Rear)	$l_f : l_r$	1:1
Weight Balance (Left:Right)	$d_l : d_r$	1:1
Cornering Stiffness [N/rad]	K_i	40000
Driving Stiffness [N/rad]	D_i	15000
Coefficient of static friction [-]	μ_i	0.6

Fig. 10 ΔF_x **Fig. 11** ΔF_y

$$\Delta F_y = F_{yref} - F_y$$

$$\Delta T = T_{ref} - T$$

を求める．Lagrange inversion の次数を 1 次 ～ 4 次まで変化させたときの ΔF_x , ΔF_y , ΔT の絶対値を、それぞれ **Fig. 10** ～ **Fig. 12** に示す．Fig. 10 ～ Fig. 12 より、逆写像の次数を大きくすると、おおむね誤差が小さくなることが確認できる．

つぎに、提案手法をアクチュエータ配分最適化に用いた結果を示す．最適化は文献 6) に示した消費電力最小化および車両安定性指標最大化の双方に基づいて行なった．文献 6) で用

Fig. 12 ΔT **Fig. 13** F_{fl} **Fig. 14** F_{fr} **Fig. 15** F_{rl} **Fig. 16** F_{rr}

いた車両安定性指標はタイヤ摩擦限界からの余裕を示す指標である．

Fig. 13 ～ **Fig. 16** は最適化の結果得られた各タイヤ力を示したものである．文献 6) の結果と同じく、タイヤ力を見る限り両者に大きな違いは見られない．**Fig. 17** ～ **Fig. 21** は

Fig. 17 c_1 Fig. 18 c_2 Fig. 19 c_3 Fig. 20 c_4 Fig. 21 c_5

最適化によって得られたフリーパラメータの値を示したものである。これらの図から、車両安定性指標を最大化した場合よりも消費電力を最小化した場合のほうが、車両の内力が小さいことが確認できる。このことは、消費電力最小化がタイヤ力の相殺を小さくすることで達成されていることを示唆している。このように、本論文のパラメトリゼーションを用いることで、車両運動には表われない内力を陽かつ容易に考慮することが可能となる。

6. おわりに

本論文では多変数関数のクロネッカー積のべき級数展開を考えることによって、行列演算に基づいて Lagrange inversion を構成する手法を提案した。この手法を用いることにより、近似的にはあるが冗長自由度電気自動車のアクチュエータの自由度を陽にパラメトライズすることが可能となった。数値シミュレーションを用いて提案手法の有効性も確認した。

本論文では冗長自由度電気自動車を対象に挙げたが、逆関数の構成については、広く一般に応用が可能である。本論文では4次までの逆関数を陽に示した。実用的にはこれで十分な場合も多いが、より高次の近似逆関数を見通しよく求める手法については今後の課題である。

参考文献

- 1) http://www.mlit.go.jp/jidosha/jidosha_fr1.000043.html
- 2) http://cig.ees.kyushu-u.ac.jp/benchmark_JSAE_SICE/
- 3) 服部義和：制駆動力と操舵をどう制御するのか？, 計測と制御, **45**-3, 191/196 (2006)
- 4) 後藤, 浅井：階層構造を有する電気自動車の車両運動特性安定化制御系～下位層の動特性に対するゲインスケジュールド設計～, 第1回制御部門マルチシンポジウム, PS-34 (2014)
- 5) 後藤, 浅井：冗長自由度を有する電気自動車の階層的な車両運動特性安定化制御系設計, 2014年度自動車技術会春季大会, 16-14 (2014)
- 6) M. Yamaguchi, T. Asai, Y. Hayakawa and R. Ariizumi: Force Distribution Optimization of Electric Vehicles with Redundant Degree of Freedom, SICE Annual Conference 2016, We1A.2 (2016)
- 7) I.J. Good: The generalization of Lagrange's expansion and the enumeration of trees, Proc. Comb. Phil. Soc., **61**, 499/517 (1965)
- 8) M. Gessel: A Combinatorial Proof of the Multivariable Lagrange Inversion Formula, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **45**-2, 178/195 (1987)
- 9) 安部正人：自動車の運動と制御第2版, 東京電機大学出版局 (2012)
- 10) 野崎博路：基礎自動車工学, 東京電機大学出版局 (2008)
- 11) ラング：続解析入門, 岩波書店 (1981)
- 12) N.G. de Bruijn: The Lagrange-Good Inversion Formula and Its Application to Integral Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **92**-2, 397/409 (1983)
- 13) K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall (1995)

《付 録》

A. (21) ～ (25) 式の証明

まず、次式

$$h_\ell(q) = \otimes^\ell(g(q)) \quad (\ell = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.1})$$

で定められる $h_\ell: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ が q のべき級数展開で書けることを示す. $h_1(q) = g(q)$ であるので, $\ell = 1$ のときには明らかに成立する. このとき,

$$\hat{H}_{1,k} = G_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

とすると,

$$h_1(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{H}_{1,k} \cdot \otimes^k q$$

である.

つぎに, ある $\ell \geq 2$ に対して $h_{\ell-1}(q)$ がべき級数展開で書けたとする. すなわち, ある係数列 $\hat{H}_{\ell-1,k} \in \mathbf{R}^{n \times n^k}$ ($k = 1, 2, \dots$) が存在して

$$h_{\ell-1}(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{H}_{\ell-1,k} \cdot \otimes^k q$$

が成り立つとする. このとき,

$$h_\ell(q) = G(q) \otimes h_{\ell-1}(q)$$

であることから,

$$\hat{H}_{\ell,k} = \begin{cases} 0_{n,n} & (k = 1) \\ \sum_{m=1}^{k-1} G_m \otimes \hat{H}_{\ell-1,k-m} & (k \geq 2) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

とすると

$$h_\ell(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{H}_{\ell,k} \cdot \otimes^k q$$

が成り立つ.

(24) 式を ℓ に関する帰納法を用いて示す. (A.2) 式より (24) 式は $\ell = 2$ のとき成り立つ. また, 与えられた $\ell \geq 2$ に対して $k = 1, \dots, \ell - 1$ で (24) 式が成り立つとする. このとき, (A.2) 式より

$$\hat{H}_{(\ell+1),1} = 0_{n \times n}$$

である. さらに, $k = 2, \dots, \ell$ に対して

$$\hat{H}_{(\ell+1),k} = \sum_{m=1}^{k-1} G_m \otimes \hat{H}_{\ell,k-m} = 0_{n \times n^k}$$

も成り立つ. よって, (24) 式が成り立つ.

最後に (25) 式を示す. (A.2) 式より

$$\hat{H}_{\ell,\ell} = \sum_{m=1}^{\ell-1} G_m \otimes \hat{H}_{\ell-1,\ell-m}$$

である. ここで, (24) 式より $m = 2, \dots, \ell - 1$ に対して $\hat{H}_{\ell-1,\ell-m} = 0$ が成り立つので,

$$\hat{H}_{\ell,\ell} = G_1 \otimes \hat{H}_{\ell-1,\ell-1}$$

が成り立つ. $\hat{H}_{1,1} = G_1$ であることから (25) 式が成り立つ.

以上の結果と

$$f(g(q)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} F_\ell \cdot \otimes^\ell(G(q))$$

であることから (21) 式が成り立つ. $\square$

[著者紹介]

浅井 徹 (正会員)

1996 年東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了. 同年日本学術振興会特別研究員. 99 年大阪大学大学院工学研究科助手, 2002 年同研究科講師, 2005 年同研究科助教授, 2007 年同研究科准教授, 2015 年名古屋大学大学院工学研究科准教授となり, 現在に至る. IEEE, システム制御情報学会, 日本鉄鋼協会の会員. 博士 (工学).

山口 雅弘

2016 年名古屋大学工学部機械航空工学科卒業. 同年名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻修士入学で現在に至る.

有泉 亮 (正会員)

2015 年京都大学大学院工学研究科博士課程修了. 2014 年日本学術振興会特別研究員, 2015 年名古屋大学大学院工学研究科助教となり現在に至る. 移動ロボット, 統計的最適化の研究に従事. IEEE, 日本ロボット学会, 日本機械学会の会員.