ポリトープ型不確かさを有する連続時間線形時不変システムに対するモデル誤差抑制補償器のロバスト性能解析

岡 島 寛*

Analysis of Robust Performance of Model Error Compensator for Polytopic-type Uncertain Continuous-time Linear Time Invariant Systems

Hiroshi OKAJIMA*

Model based control system design has been developed in many fields based on the dynamics of the accurate plant model. The desired control performance of the transient response can not be achieved if the dynamics gap between the plant and its mathematical model is not small. We have proposed a specified compensator to minimize the gap between an actual plant and its nominal model. The proposed compensator is composed of its plant model and an error feedback component. In this paper, we propose a method to analyze error feedback compensation component based on the analysis method using LMIs. Polytopic-type uncertain continuous LTI systems are dealt with in this paper. The robust performance by the model error compensator is analyzed using H_2 and H_∞ indexes. The effectiveness of our analysis method is shown by numerical examples.

Key Words: model error compensator, robust control, H_2 and H_∞ performance, polytopes

1. はじめに

多くの制御システムでは、対象の数理モデルが制御系設計に利用される。モデルの特性はシステム同定法などにより求められ、求められたモデルが対象の動特性を表わすものとみなしてコンピュータ上で制御器が設計される。このとき、数理モデルが対象の特性を高い精度で表わしているならばコンピュータ上で設計された制御器を制御システムに実装することで良好な制御性能を実現できる。しかしながら、製品の個体差や経年変化などでモデルと制御対象との間にダイナミクスのギャップが存在しうする場合や、制御システムが外乱を含む系の場合、高次項を十分に近似できない場合もあり、その

場合には設計された制御器がうまく働かないことになる。

これに対して、著者らはモデル誤差抑制補償器 (MEC) を提案している¹⁾。MEC は制御システムのロバスト化のみに特化している点にその特徴がある。過渡特性を調整するための制御器は別途、既存のさまざまな制御系設計のアプローチによって設計されているものとして、モデル化誤差や外乱の影響を抑制する目的でモデル誤差抑制補償器 (Fig. 1) を付加する。入力 u から出力 y までの入出力特性がモデル P_m に等しくなるよう MEC が補償することで、制御器側から見た見かけ上のモデル化誤差が低減される。これにより、過渡特性の調整を目的とした既存の制御器と MEC とを統合したシステムでは制御系全体でのロバスト性を保ちつつ高い過渡性能も実現できる。

MEC は汎用性が高く、MIMO 系^{2),3)}や非線形系^{3)~5)}、非最小位相系^{6),7)}などのさまざまなクラスの対象に対して適用可能である。実際、系のロバスト化を目的として MEC はさまざまな制御系^{8)~13)}に適用されている。文献 8) では車輪型倒立振り子、文献 9), 10) では福祉用電動ビークル、文献 11), 12) ではスキッドステア型車両に利用されている。さらには、3 慣性系を扱った SICE のベンチマーク問題に適用することでも高いロバスト性能が示されている¹³⁾。

制御システムの部分的なロバスト化を実現する手法としては古くから外乱オブザーバ¹⁴⁾が知られており、高い汎用性が示されている。しかし、外乱オブザーバを構成するためには逆モデルが必要になる。厳密な逆モデルは非線形系や非最小

Fig. 1 Model error compensator

* 熊本大学先端科学研究部 熊本市中央区黒髪 2-39-1

* Faculty of Advanced Science and Technology, Kumamoto University, 2-39-1 Kurokami, Chuo-ku, Kumamoto

(Received June 11, 2019)

(Revised August 24, 2019)

位相系では構成できないことから適用できる制御対象のクラスに限られる。その一方で、MECでは逆モデルが不要であり、入出力数が異なるMIMO系や非線形系、非最小位相系に複雑な拡張なしでの適用が可能であることから広く応用が期待できる。

MECの入力信号部分にフィードフォワード制御器を挿入すると、2自由度制御系の条件付きフィードバック構造¹⁵⁾と等しくなるため、内部構造と実現可能なロバスト性能は2自由度制御系と変わらないという側面もある。しかし、MECではフィードフォワード制御器の構造を線形系に限定したものではなく、非線形フィードバックやモデル予測制御の適用も可能であることなどが特徴として挙げられる。また、誤差補償器 D の設計においては過渡特性に着目せずに設計を進めることができるため、制御システムの内部構造の本質に迫りやすいというメリットもある。

MECでは基本的にはハイゲインフィードバックによって出力に現れるモデル誤差の影響を抑制することを想定しているため、複雑で高次な制御対象でない限りは少ない試行錯誤で誤差補償器 D のゲイン調整をすることができる点にも特徴がある。モデルの詳細に立ち入らなくてもロバスト化ができるという特徴から、ゲイン設計についてはあまり着目しておらず、これまでは議論が多くなかった。

文献1)では、誤差補償器 D に対する安定性条件が導かれている。また、文献16)ではSISO系に対して混合感度問題の枠組みで乗法的な不確かさで与えられるモデル化誤差と観測ノイズを含む系に対して誤差補償器 D の設計が検討されている。駆動データに基づいた誤差補償器 D のゲインチューニングに関する研究も文献17)や文献3)において行なわれている。本論文では、従来の周波数領域に基づく誤差補償器設計とは別のアプローチとして、行列ポリトープ表現に基づいた不確かさを有する制御対象を考え、線形行列不等式(LMI)¹⁸⁾を利用してMECにおけるロバスト性能を解析する手法を提案する。ポリトープ型の不確かさはLMIとの親和性が高く設計論に展開しやすいという面があるのと同時に、物理モデル、数理モデルに基づいてモデル化できる系ではポリトープ表現に基づいた不確かさのモデル化が効果的であるという面があり有用性が高い。たとえば、高度が大幅に変わりうる飛翔体の制御系や、路面摩擦係数が変わるようなビークル、パラメータの経年変動を有する系などにおいては行列ポリトープ表現に基づいた不確かさの取り扱いが有効になってくる。なお、ここで扱う制御対象はMIMOも含んでおり、不確かさだけでなく入力端外乱や観測ノイズも扱うものとする。

LMIはさまざまな制御系解析^{19),20)}や制御系設計^{21)~27)}に幅広く用いられており、多変数の問題を容易に扱えること、LMIとして定式化された問題を連立して解くことにより複数の仕様を同時に解析できるという特徴と高い有用性がある。また、さまざまな性能指標に対する解析条件がLMIとして表現されている。そのため、MECについてLMIに基づいた解析手法を確立することにより、より複雑な系へのMECの適

用や、ロバスト性能の改善に寄与するものと期待される。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、第2章でMECの研究概要について説明し、本論文で対象とする問題を明確化する。さらに、制御対象の不確かさを行列ポリトープにより表現し、制御システムの構成要素を定義する。また、MECの状態方程式表現を求め、MECの構成要素の一部に仮定を設けることでMECの入出力システムがポリトープ型の不確かさを有するシステムとして表現できることを示す。第3章で線形行列不等式を用いたMECのロバスト性能解析手法を示し、誤差補償器設計に関して議論する。第4章において数値例を用いた性能解析を行ない、最後に、第5章においては、MECに用いるノミナルモデルの設定と実現できる性能についての考察を与える。

システム G の H_2 ノルムは次式で与えられる。

$$\|G\|_2 := \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(G(j\omega) * G(j\omega)) d\omega} \quad (1)$$

つぎに、システム G の H_∞ ノルムは次式で与えられる。

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (2)$$

ただし、 $\sigma(\cdot)$ は最大特異値を表わしている。

2. モデル誤差抑制補償器の構成

2.1 MECの研究動機

MECを用いることで統一的な扱いの下で制御システムのロバスト性を議論できる。このことをFig.2に示す3つの制御構造例を用いて示す。図の(a), (b), (c)にそれぞれ示す C は制御器であり、Fig.2(a)はフィードフォワード制御、Fig.2(b)はフィードバック制御、Fig.2(c)は状態フィード

Fig. 2 Various control systems with MEC

バックをそれぞれ表わしている．なお，Fig. 2 (a) において， $C = P_m^{-1}G$ と設定し， C ， G を線形時不変システムとすると 2 自由度系の条件付きフィードバック構造になる．制御器 C の構造としては静的・動的，非線形，むだ時間，時変系などさまざまな枠組みのものを想定している．

通常，制御系を構成する際には，モデルの不確かさや外乱などの P およびそれを取り巻く環境の特性を考慮して制御器 C が設計されることになるのに対し，MEC の適用を前提として制御系を構成する場合には制御対象のモデル P_m のことのみ考えて C を設計すればよい．特に複雑な制御系を構成する場合や，制御器を MPC などによって組む場合，ほかのシステムと協調的に入力信号を決める場合などに MEC を利用する枠組みは有効になる．外乱除去やロバスト性の対応は MEC 内部の誤差補償器 D にすべて任せることになる．一方，誤差補償器 D は C の詳細の構造に立ち入らずに調整することが可能である．

たとえば，制御対象が仮に線形であったとしても有限整定制御を実現するにはむだ時間系や非線形同次システムなどの線形でない制御構造を利用する必要がある．通常の制御系設計の枠組みとして設計を考える場合は，モデル不確かさと有限整定特性とを同時に考慮してコントローラを設計する必要がある．これに対し，MEC を用いれば，モデル P_m に対して線形でない制御器 C を設計し，MEC と併用することでロバスト性を確保しつつ有限整定特性を実装できる．

2.2 MEC を構成するブロックのシステム表現

本論文では，連続時間線形時不変系の制御対象への MEC の構成を考える．現在時刻を t とし，制御対象の動特性は状態方程式として以下のように与えられるものとする．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t) + B_w w_u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_w w_y(t) \quad (4)$$

ここで， A ， B ， B_w ， C ， D_w はそれぞれ対象の動特性を表わす正方行列および入出力数に対応して適切に定められた行列であり，このうち， A ， B ， C はポリトープ型不確かさをもつものとして $\lambda = [\lambda_i]$ および適切な次元をもつ端点行列 A_i ， B_i ， C_i を用いてつぎのように与えられるものとする．

$$A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i, B = \sum_{i=1}^N \lambda_i B_i, C = \sum_{i=1}^N \lambda_i C_i \quad (5)$$

ただし， λ はつぎの集合 $\mathcal{E}$ に属する時不変なパラメータである．

$$\mathcal{E} := \{\lambda \in R^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1\} \quad (6)$$

(3) の制御対象の次数は m_s とし，状態 $x(t) \in R^{m_s}$ ，制御入力 $\tilde{u}(t) \in R^{m_i}$ ，制御出力 $y(t) \in R^{m_o}$ ，入力端外乱 $w_u(t) \in R^{m_{wi}}$ ，観測ノイズ $w_y(t) \in R^{m_{wo}}$ とする．ここでは，任意の $\lambda \in \mathcal{E}$ について可制御可観測を仮定する．

つぎに，Fig. 1 の MEC に利用するノミナルモデル P_m のダイナミクスをつぎの連続時間線形時不変システムとして与える．

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (7)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (8)$$

ここで， A_m ， B_m ， C_m はそれぞれ対象の動特性を表わす正方行列および入出力数に対応して適切に定められた行列であり，モデルの状態 $x_m(t) \in R^{m_s}$ ，制御入力 $u_m(t) \in R^{m_i}$ ，制御出力 $y_m(t) \in R^{m_o}$ とする．ここで，ノミナルモデルの行列を与える 1 つの方法として (5) において $\lambda_i = 1/N$ ($i = 1, \dots, N$) とし得られる A ， B ， C を A_m ， B_m ， C_m とする方法が挙げられる．これは，制御対象 (3)，(4) における最尤値に相当する．なお，(5) で構成されるシステム行列と別の行列を指定したとしても理論上の問題は生じない．このことを踏まえた MEC のノミナルモデルの設定と性能との関係については後述する．基本的には，制御対象のダイナミクスを最もよく表わしたものをモデル P_m として用いることになる．

ここで， $\Delta A = A - A_m$ ， $\Delta B = B - B_m$ ， $\Delta C = C - C_m$ を考えよう．このとき， ΔA ， ΔB ， ΔC は (5) を用いてつぎのように表わされる．

$$\Delta A = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Delta A_i, \Delta B = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Delta B_i, \\ \Delta C = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Delta C_i$$

ただし， $\Delta A_i = A_i - A_m$ ， $\Delta B_i = B_i - B_m$ ， $\Delta C_i = C_i - C_m$ である．

上記の制御対象 P とノミナルモデル P_m の設定に対して，Fig. 1 で示した MEC を適用する場合を考える．このとき，誤差補償器 D を次式で与える．

$$\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d(y(t) - y_m(t)) \quad (9)$$

$$y_d(t) = C_d x_d(t) + D_d(y(t) - y_m(t)) \quad (10)$$

(9)，(10) において， A_d の構造を制約すれば，たとえば，疑似微分を含む形での PID 制御を構成することも可能である．MEC を適用する場合，制御器 C の出力信号である $u(t)$ を用いてノミナルモデルへの入力は $u_m(t) = u(t)$ ，制御対象への入力は $\tilde{u}(t) = u(t) - y_d(t)$ と与えられる．ただし， $y_d(t)$ が誤差補償のための補償入力である．

2.3 MEC の状態方程式表現と評価信号

ここで，前節の設定に対して MEC の状態方程式表現を考える．ここでは， $e(t) = x(t) - x_m(t)$ を定義し， $\xi(t) = [e(t)^T, x_d(t)^T, x_m(t)^T]^T$ を状態， $v(t) = [w_u(t)^T, w_y(t)^T, u(t)^T]^T$ を入力とすることでつぎの MEC の入出力システムの状態方程式を得る．

$$\dot{\xi}(t) = \bar{A}\xi(t) + \bar{B}v(t) \quad (11)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A - BD_dC & -BC_d & \Delta A - BD_d\Delta C \\ B_dC & A_d & B_d\Delta C \\ 0 & 0 & A_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_w & -BD_dD_w & \Delta B \\ 0 & B_dD_w & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

このとき、MEC 自体の目的が、 y と y_m の差を小さくすることであるため、つぎの評価信号 $z(t)$ を考える。

$$z(t) = Cx(t) - C_mx_m(t) = \bar{E}\xi(t) \quad (14)$$

ただし、 $\bar{E}$ は $\bar{E} = [C, 0, \Delta C]$ で与えられる。ここではさらに、 $v(t)$ から $z(t)$ までの入出力システムを G と表記する。ここで考える評価信号 $z(t)$ は $y(t) - y_m(t)$ とは異なり、 $y(t) - y_m(t)$ から観測ノイズを除いた信号であることに注意する。

さらに、行列ポリトープ表現に基づいた性能解析のためにつぎの行列を定義する。

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i - B_iD_dC_i & -B_iC_d & \Delta A_i - B_iD_d\Delta C_i \\ B_dC_i & A_d & B_d\Delta C_i \\ 0 & 0 & A_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_w & -B_iD_dD_w & \Delta B_i \\ 0 & B_dD_w & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_i = [C_i \quad 0 \quad \Delta C_i] \quad (i = 1, \dots, N)$$

ここで、 $\bar{A}_i$ には (1,1) 要素に B_i と C_i の双線形項が、(1,3) 要素に B_i と ΔC_i の双線形項がそれぞれ含まれている。よって、このままでは行列ポリトープ表現にはならないが、仮に、 $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ もしくは $D_d = 0$ が成り立つ場合には、 $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{E}_i$ および $\lambda \in \mathcal{E}$ を用いて

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{A}_i, \bar{B} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{B}_i, \bar{E} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{E}_i \quad (15)$$

とすることができ、MEC の動特性を行列ポリトープを用いた状態方程式表現として与えることができる。

ここで、対 $(\bar{A}, \bar{B})$ を含むシステム G は外乱やノイズだけでなく、入力 u の影響も受けることがわかる。

3. LMI を用いた MEC のロバスト性能解析

ここでは、前章で得た MEC の状態空間表現を利用して LMI を用いて MEC のロバスト性能解析を行なう。まずは、ポリトープ型の不確かさがなくのとし、入力端外乱 $w_u(t)$ および観測ノイズ $w_y(t)$ が評価信号 $z(t)$ に与える影響を H_2 , H_∞ の2つの指標について解析する。さらに、入力端外乱 $w_u(t)$ および観測ノイズ $w_y(t)$ に加えてポリトープ型不確かさを有する系に対する解析手法を与える。最後に、誤差補償器 D の設計について議論する。

3.1 入力端外乱と観測ノイズを有する MEC の性能解析

本節では、ポリトープ型の不確かさのない、すなわち、 $A = A_m$, $B = B_m$, $C = C_m$ の場合を想定し、MEC において入力端外乱 $w_u(t)$ および観測ノイズ $w_y(t)$ が評価信号 $z(t)$ に与える影響を H_2 性能および H_∞ 性能の観点から LMI を

用いて解析する。 $\Delta A = 0$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ であることから、次式のように状態方程式を得る。

$$\dot{\xi}(t) = \bar{A}\xi(t) + \bar{B}v(t) \quad (16)$$

$$z(t) = \bar{E}\xi(t) \quad (17)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_s & 0 \\ 0 & A_m \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_s & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{E}_s & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

ただし、 $\bar{A}_s$, $\bar{B}_s$, $\bar{E}_s$ は次式で与えられる。

$$\bar{A}_s = \begin{bmatrix} A_m - B_mD_dC_m & -B_mC_d \\ B_dC_m & A_d \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\bar{B}_s = \begin{bmatrix} B_w & -B_mD_dD_w \\ 0 & B_dD_w \end{bmatrix}, \bar{E}_s = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

このとき、(16), (17) のシステムの行列要素 (18) に着目すると、(2,2) 要素のノミナルモデル P_m が $z(t)$ には影響を与えないことがわかる。したがって、つぎのシステムの特性的のみ考えればよい。

$$\dot{\xi}_s(t) = \bar{A}_s\xi_s(t) + \bar{B}_sv_s(t) \quad (22)$$

$$z(t) = \bar{E}_s\xi_s(t) \quad (23)$$

ここで、 $\xi_s(t) = [e(t)^T, x_d(t)^T]^T$, $v_s(t) = [w_u(t)^T, w_y(t)^T]^T$ である。以上より、入力 $v_s(t)$ から $z(t)$ までの入出力システムを $G_s(s)$ としてロバスト性能解析を行なう。

ここではまず、システム G_s の H_2 性能について考える。パーセバルの定理を利用することで $\|G_s\|_2$ は

$$\|G_s\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{trace}(g_s(t)^T g_s(t)) dt} \quad (24)$$

と書くことができる。ただし、 $g_s(t)$ はシステム G_s のインパルス応答行列であり $g_s(t) = \bar{E}_s \exp(\bar{A}_s t) \bar{B}_s$, ($t \geq 0$) で与えられる。このとき、 H_2 ノルムはシステムの各入力チャネルに対するインパルス応答の L_2 ノルムの二乗和を考え、その平方根を評価していることに相当する。

$\|G_s\|_2$ が小さいほど G_s への入力である $w_u(t)$ および $w_y(t)$ が $z(t)$ に及ぼす影響が小さい。 G_s の H_2 ノルムを $\bar{A}_s$, $\bar{B}_s$, $\bar{E}_s$ を含む LMI として表現すると、与えられた $\gamma_2 > 0$ について $\|G_s\|_2$ を特徴付ける LMI はつぎのように与えられる。

$$Q_s > 0, Z_s > 0, \text{trace}\{Z_s\} < 1 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_s Q_s + Q_s \bar{A}_s^T & Q_s \bar{E}_s^T \\ \bar{E}_s Q_s & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} Z_s & \bar{B}_s^T \\ \bar{B}_s & Q_s \end{bmatrix} > 0$$

上記の LMI を満たす解 Q_s , Z_s が得られた場合には次式を満足する。

$$\|G_s\|_2 \leq \gamma_2 \quad (26)$$

よって、(25) の LMI 条件を満足するうち最小の γ_2 を見つけ

ることで H_2 ノルムの観点から G_s の性能を解析できる. (25) では γ_2 を変数としても LMI となるため容易に γ_2 の最小値を求めることができる.

つぎに, システム G_s の H_∞ 性能について考える. H_∞ ノルムはシステム G_s のボードゲイン線図におけるピーク値に一致する. 与えられた γ_∞ について, $\|G_s\|_\infty$ を特徴付ける LMI はつぎのように与えられる.

$$X_s > 0, \begin{bmatrix} \bar{A}_s X_s + X_s \bar{A}_s^T & X_s \bar{E}_s^T & \bar{B}_s \\ \bar{E}_s X_s & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ \bar{B}_s^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

上記を満たす解 X_s が得られた場合には次式を満足する.

$$\|G_s\|_\infty \leq \gamma_\infty \quad (28)$$

H_2 ノルムに基づく性能解析と同様, LMI 条件を満足するうち最小の γ_∞ を見つけることができれば, H_∞ ノルムの観点から G_s の性能を解析できる.

また, システム G_s の H_∞ ノルムは L_2 ゲインに等しいことから次式が得られる.

$$\|G_s\|_\infty = \sup_{v_s \in L_2, \|v_s\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|v_s\|_2} \quad (29)$$

ここでは, H_2 指標, H_∞ 指標による MEC のロバスト性能解析を扱ったが, このほか, インパルス応答のピーク値 (十分条件) や, 極配置 (必要十分条件) に関する解析条件も LMI として書かれており¹⁸⁾, これらの LMI 条件を用いて上記で設定したシステム G_s を解析することは可能である.

3.2 ポリトープ型不確かさを有するシステムに対する MEC のロバスト性能解析

ここでは (11), (14) で与えられるシステム G について, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ もしくは $D_d = 0$ が成り立つとの仮定の下で $v(t)$ から $z(t)$ までの入出力システム G について考える. 第 2.3 節で示したように, この仮定の下では MEC の入出力システムもポリトープ表現されることから解析が容易になる.

まず, 端点行列 $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{E}_i)$ について H_2 指標の解析問題を考えると以下のように与えられる.

$$Q > 0, Z > 0, \text{trace}\{Z\} < 1, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^T & Q \bar{E}_i^T \\ \bar{E}_i Q & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} Z & \bar{B}_i^T \\ \bar{B}_i & Q \end{bmatrix} > 0$$

ここで, 便宜上 (30) の LMI 条件をすべてまとめて

$$\Phi_i < 0 \quad (31)$$

と表記する. ここで, 仮にすべての i について $\Phi_i < 0$ の条件を満足する Q および Z を見つけることができれば $\lambda_i \geq 0$ であることから

$$\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi_i \right) < 0 \quad (32)$$

が成り立つ. ここでさらに, (15), (30), (32) より, 任意の

$\lambda \in \mathcal{E}$ について $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ であることから (32) を書き下すとシステム G についてつぎの LMI が得られる.

$$Q > 0, Z > 0, \text{trace}\{Z\} < 1, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T & Q\bar{E}^T \\ \bar{E}Q & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} Z & \bar{B}^T \\ \bar{B} & Q \end{bmatrix} > 0$$

このとき, システム $G(s)$ に関して (33) で与えられた γ_2 を用いて次式が成り立つ.

$$\|G\|_2 \leq \gamma_2 \quad (34)$$

つぎに H_∞ 性能解析について述べる. 端点行列について H_∞ 指標の解析問題を考えるとつぎのようになる.

$$X > 0, \begin{bmatrix} \bar{A}_i X + X \bar{A}_i^T & X \bar{E}_i^T & \bar{B}_i \\ \bar{E}_i X & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ \bar{B}_i^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

ここで, (35) の LMI 条件をまとめて $\Psi_i < 0$ とすると, H_2 性能解析と同様にすべての i について $\Psi_i < 0$ を満足する $X > 0$ を見つけることができれば $\lambda_i \geq 0$ であることから

$$\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \Psi_i \right) < 0 \quad (36)$$

が成り立ち, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ および (15), (35), (36) からつぎの LMI が成り立つ.

$$X > 0, \begin{bmatrix} \bar{A}X + X\bar{A}^T & X\bar{E}^T & \bar{B} \\ \bar{E}X & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ \bar{B}^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

このとき, システム $G(s)$ に関して, (37) で与えられた γ_∞ を用いて次式が成り立つ.

$$\|G\|_\infty \leq \gamma_\infty \quad (38)$$

以上のように, ポリトープ型の不確かさを有する制御対象について MEC のロバスト性能解析手法を LMI により与えた.

なお, ここで示したポリトープ型不確かさを有する系に対する解析手法は Z, Q および X を共通のものを使用していることから十分条件の一種であり解析結果が保守的になる可能性があることに注意する必要がある. ここで, 各式からわかるように, ポリトープ型の不確かさが $z(t)$ に与える影響は $w_u(t), w_y(t)$ だけでなく入力 $u(t)$ の大きさにも依存することがわかる.

上記の手法では, 共通の行列を用いていることで十分条件による解析になっているが, (6) で与えられる集合を分割し, 分割された領域ごとに共通の行列を設定して解析した上で, それらの中での最大値を求めればより保守性が低い (すなわち, より小さな上界値となる) γ_2 や γ_∞ を求めることができる. 分割を細かくすれば計算機負荷とのバランスの中でいくらでも保守性を下げた解析を行なうことが可能になる.

また, 別のアプローチとして領域内のさまざまな λ_i に対してそれぞれ解析値を求め, その最悪値を調べれば, これに

よって（上界を与えるものとはならないため性能の保証は与えないものの、実用的な意味での）性能を見積もることもできる．このような形で性能を見積もる場合には解析に要する演算量は共通の行列を用いる場合に比べて格段に大きくなるが、性能をより高い精度で見積もるという観点からは保守性が小さく、かつ $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ もしくは $D_d = 0$ が成り立つという第2.3節で設定した仮定も不要になる．

3.3 誤差補償器の設計に関する検討

前節までは、与えられた誤差補償器に対してロバスト性能を解析する手法を示した．本節では得られた解析条件に基づいて誤差補償器 D を設計する方法について検討する．

まず、ポリトープ型の不確かさのないケースについて考える．第3.1節で提示した入力端外乱と観測ノイズを有する系に対する解析条件は、モデル誤差がない場合には単一フィードバック系のものと一致する．よって、 H_2 指標および H_∞ 指標に基づいて誤差補償器 D を設計する場合、 $\bar{A}_s$, $\bar{B}_s$, $\bar{E}_s$ で構成されるシステム行列が、単一フィードバック系に対する出力フィードバック制御の構造と同じ構造になっている．

誤差補償器 D の次数を制御対象の次数と一致させるフルオーダーの構造に限定した場合、たとえば文献19), 20)などで γ_2 および γ_∞ の値を最小化する誤差補償器 D を設計することができる．詳しくは、たとえば文献18)の定理6.2, 定理6.3などに設計法が記載されている．

一方、第3.2節ではポリトープ型の不確かさを有する系に対するMECの性能解析条件を与えており、誤差補償器 D を設計変数とした場合には双線形行列不等式 (BMI) となる．

LMI ベースの解析手法に基づいた設計の1つのアプローチとしては、変数に関するイタレーションに基づいた設計が1つの有力な手法として挙げられる．たとえば、補償器 D を設計した上で共通行列に基づいた解析を行ない、共通行列を固定した上で D を設計変数とみなしたLMIを解くことによって、その繰り返しで γ_2 や γ_∞ が小さくなるよう補償器 D を逐次的に求めることができる．

このほか、LMI 求解問題において解析条件に基づいて設計条件を求める多くの研究がなされている^{21)~27)}ことから、これらの手法を応用することが設計の1つのアプローチとなる．

また、設計すべきパラメータ数が過度に多くなければ、性能評価は本論文の解析手法を用いた上でPSO（粒子群最適化）などに代表されるメタヒューリスティクス手法に基づいてパラメータを設計するというアプローチも考えられる．

4. 数 値 例

ここでは数値例によりMIMOの制御対象に対してMECの解析例を示す．まず、 $N = 4$ として、(3), (4), (5)の制御対象はつぎのように与えられているものとする．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1.6 & 2 \\ 0 & 1 & -4.8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.4 & -1 & 1 \\ 0 & -2.4 & 2 \\ 0 & 1 & -5.2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1.2 & 1 \\ 0 & -2 & 2.2 \\ 0.2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.8 & 1 \\ 0 & -2 & 1.8 \\ -0.2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2.6 & 5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1.4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ -0.8 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ -1.2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_w = 0.1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (39)$$

つぎに、ノミナルモデルのシステム行列 A_m , B_m , C_m を次式で与える．

$$A_m = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

ここで与えたノミナルモデルは $\lambda_i = 0.25$ ($i = 1, \dots, 4$) とする制御対象のポリトープ表現の中心値に相当する．さらに、誤差補償器 D は次式のように与える．

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -40 & -6 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 20 & 5 \end{bmatrix}, D_d = \begin{bmatrix} 100 & -1 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (43)$$

以上の設定に対して、ここでは H_∞ 指標に基づく性能解析を行なう．このとき、LMI 求解問題は可解であり、 G に対して(35)のLMI制約を $i = 1, \dots, 4$ について連立して γ_∞ の最小化を行なうことにより $\gamma_\infty = 0.0780$ を得た．よって、システム G について次式が成り立つ．

$$\|G\|_\infty \leq 0.0780 \quad (44)$$

ここで扱った数値例は端点行列の数が4であり、 $\sum(\lambda_i) = 1$ の制約があることから探索空間は広くない．そこで、第3.2節で示した保守性を下げるための2つ目のアプローチとして、グリッドサーチで8000通り (20^3) の λ_i の組について最悪値を探索したところ下界値 γ_∞ の推定値として0.0409を得た．

一方、制御対象とノミナルモデルとが一致する、すなわち不確かさに関して $\Delta A = 0$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ が成り立つ場合には(27)の制約下で γ_∞ の最小化をすることでシステム行列 $G_s(s)$ の H_∞ ノルムは $\gamma_\infty = 0.0192$ となる．この結果

として、システム G_s について次式が成り立つ。

$$\|G_s\|_{\infty} \leq 0.0192 \quad (45)$$

ここでは示していないが、(25), (26) および (33), (34) による H_2 最適化問題についても LMI 最適化問題を解くことで容易に解析できる。

5. MEC のノミナルモデルに関する考察

本章では、MEC 内部のノミナルモデル P_m の設定方法について考察する。まず、制御対象のポリトープ表現を求めるにあたり、最尤値としてモデル（ノミナルモデル）を同定などによって求め、それを基準とした摂動などを解析することによりそのノミナルモデルを含む形で係数行列の範囲を見積もりポリトープモデルを求めるという方法がモデリングの自然な流れである。この結果として得られるポリトープ表現されたモデルは、端点の行列を用いてシステムを表現されるものである。一方で、本論文で示しているノミナルモデル P_m は、制御系のノミナルの性能を設計するために用いるモデルを指している。

著者らによる MEC の先行研究では、不確かさを有するシステムのノミナルモデルを設定する場合、中央値となるモデル (λ_i がすべて同じ値となるような値に相当、最尤値) を選択することが通常と考えであるものとしてモデル選択を行っていた。

他方、MEC を用いたピークルの制御系などで実機検証^{10), 11)}を行なった場合において、必ずしも最も確からしいモデルをノミナルモデルとして用いた際の制御結果（特にロバスト性）が良い結果を与えるわけではなかった。このとき、本来であれば、制御対象のポリトープを用いた表現の導出時に利用されるノミナルモデルと、本論文の MEC において設定するノミナルモデルとは独立したモデルであることから、誤差補償器だけでなく、ノミナルモデルの設定によっても制御性能やロバスト性能が左右される可能性がある。

そこで、 P_m の変更による性能変化を解析する目的で数値シミュレーションを行なう。具体的には、第4章の数値例におけるノミナルモデル P_m をさまざまに変更し、 H_{∞} 性能がモデル P_m の変更に対してどのように変化するかを解析する。制御対象と誤差補償器 D は前章と同じものを用いる。モデル P_m は制御対象の行列ポリトープを利用してつぎのように与える。

$$A_m = \sum_{i=1}^4 \lambda'_i A_i, B_m = \sum_{i=1}^4 \lambda'_i B_i, C_m = \sum_{i=1}^4 \lambda'_i C_i \quad (46)$$

なお、前章の数値例においては、モデルのダイナミクスをポリトープの中心としていたため、 $\lambda'_i = 0.25$ ($i = 1, \dots, 4$) に対応する。ここでは、グラフ上で視覚的に見やすくする目的で (46) の λ'_i についてつぎの制限された平面を考える。

$$\lambda'_1 = \alpha_1, \lambda'_2 = 0.5 - \alpha_1, \lambda'_3 = \alpha_2, \lambda'_4 = 0.5 - \alpha_2$$

Fig. 3 γ by various nominal model P_m

ここで、 $\alpha_1 \in [0, 0.5], \alpha_2 \in [0, 0.5]$ から選択する。これは、 $\lambda'_1 + \lambda'_2 = 0.5, \lambda'_3 + \lambda'_4 = 0.5$ に制約した上で解析することを意味し、必ず $\sum_{i=1}^4 \lambda'_i = 1$ を満足する。 α_1, α_2 を変えることで P_m を変更すると $\bar{A}_i$ のパラメータ行列が変わることから当然 γ_{∞} の値も変わる。解析で得た γ_{∞} を縦軸にしてさまざまな P_m について3次元プロットした場合の結果（軸をそれぞれ $\lambda'_1 - \lambda'_2, \lambda'_3 - \lambda'_4, \gamma_{\infty}$ としている）を Fig. 3 に示す。

図において、グラフの中央、すなわち $\lambda'_1 - \lambda'_2 = 0, \lambda'_3 - \lambda'_4 = 0$ となる点がポリトープの中心であり、前章と同じく $\gamma_{\infty} = 0.0780$ となっている。ここで提示した α_1 および α_2 のレンジでの γ_{∞} 最小化においては、 $\lambda'_1 - \lambda'_2 = -0.5, \lambda'_3 - \lambda'_4 = -0.5$ の点が最も評価値 γ_{∞} が小さくなっていることがわかる。このとき Fig. 3 から、必ずしも不確かさの中央的、中心的振る舞いをするモデルが制御の点では良いノミナルモデルになるとは限らないことが示唆される。十分条件に基づいた解析法から得られた結果ではあるものの、中央値となる振る舞いをするノミナルモデルが最も良いとは限らないことが視覚的にわかりやすい結果を得たといえる。なお、グリッドサーチによって $\sum_{i=1}^4 \lambda'_i = 1$ を満たすポリトープ内を探索したところ γ_{∞} の最小値は $\gamma_{\infty} = 0.0495$ であり、最大値は $\gamma_{\infty} = 0.840$ であった。以上の結果からは、ノミナルモデルの設定で性能が大きく左右されることがわかる。

ここで、上記は十分条件に基づいた解析で保守性を含むことから、 $\gamma_{\infty} = 0.0495$ となった点について、第4章と同様に全 8000 点に対するグリッドサーチ（各点ごとの LMI による解析）を行なった結果、下界値の推定値として 0.0264 を得た。この値は、第4章で示した最尤値となるモデルをノミナルモデルとしたケース（0.0409）よりも小さな値となっている。

MEC においては、第2章で示したように別途ノミナルモデルに対して設計するという形で過渡性能とロバスト性能の設計が分離されている。特に過渡性能が逆モデルに基づいて構成できるようなケースでは、ノミナルモデルの差に起因する過渡特性の差は生じないため、ここで得た Fig. 3 の結果はノミナルモデルの変更に起因する制御性能の差を直接的に表わしているものと捉えることができる。

以上を踏まえると、先行研究ではモデリング^{28), 29)}の際に得られたノミナルモデルをそのまま MEC に利用していたが、

必ずしも最尤値となるモデルを MEC のノミナルモデルとして設定して制御することが良いとは限らないことがわかる。

6. おわりに

本論文では、行列ポリトープ表現を用いた制御対象に対してモデル誤差抑制補償器のロバスト性能解析手法を示した。まず、行列ポリトープ表現を用いた制御対象に対して MEC の状態方程式表現を求め、 ΔB_i , D_d , ΔC_i のうちどれかが零であれば、MEC の入出力システムが行列ポリトープの形で表現されることを示した。また、LMI に基づいた性能解析手法を適用することで、MEC に対するロバスト性能を H_2 および H_∞ 指標に基づいて解析できることを示し、その保守性に関する検討を行なった。さらに、解析条件に基づいた誤差補償器の設計指針について述べた。最後に、数値例を通して MEC の解析を行ない、その有効性を示すと共に、MEC におけるノミナルモデルとしては必ずしも中央値（最尤値）が良いとは限らないことを示した。

今後の課題として、第5章で示したノミナルモデルの設定に起因する性能差に関する研究が挙げられる。

謝辞 本研究は科研費基盤 C(16K06419) の助成を受けたものである。有益な助言をいただきました AE 並びに査読者の皆様に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) H. Okajima, H. Umei, N. Matsunaga and T. Asai: A design method of compensator to minimize model error, *SICE JCMSI*, **6-4**, 267/275 (2013)
- 2) 梅井, 岡島, 松永, 浅井: モデル誤差抑制補償器の多入出力システムに対する設計, *システム制御情報学会論文誌*, **27-2**, 67/72 (2014)
- 3) 遠藤, 関口, 野中: モデル誤差補償器のオンライン調整法, *計測自動制御学会論文集*, **55-3**, 156/163 (2019)
- 4) 岡島, 西村, 松永: モデル誤差抑制補償に基づく非線形システムのフィードバック線形化, *計測自動制御学会論文集*, **50-12**, 869/874 (2014)
- 5) 岡島, 松永: モデル誤差抑制補償器に基づくロバスト経路追従制御, *システム制御情報学会論文誌*, **29-10**, 466/468 (2016)
- 6) 岡島, 一政, 松永: 非最小位相系に対するモデル誤差抑制補償器の設計, *計測自動制御学会論文集*, **51-11**, 794/801 (2015)
- 7) G. Ichimasa, H. Okajima, K. Okumura and N. Matsunaga: Model error compensator with parallel feed-forward filter, *SICE JCMSI*, **10-5**, 468/475 (2017)
- 8) 岡島, 奥村, 松永: モデル誤差抑制補償器を用いた車輪型倒立振子のロバスト速度補償, *電気学会論文誌 (C)*, **139-3**, 219/226 (2019)
- 9) 丸野, A.T. Zengin, 岡島, 松永, 中村: モデル誤差補償による福祉用前輪駆動型パーソナルビークル STAVi の操縦特性の改善, *機械学会論文集 C 編*, **79-808**, 4721/4733 (2013)
- 10) 菅野, 壇, 岡島, 松永: モデル誤差抑制補償器による福祉用パーソナルビークルのロバストな屋内隊列走行システムの走行評価, *機械学会論文集 C 編*, **82-840**, 15-00690 (2016)
- 11) 宮本, 田中, 岡島, 松永: PID 制御を用いたモデル誤差抑制補償器と拡張カルマンフィルタによるスキッドステア型車両の操縦支援制御, *電気学会論文誌 C 編*, **136-5**, 642/649 (2016)
- 12) 松永, 坂本, 田中, 岡島: モデル誤差抑制補償器を用いた SSV 型パーソナルビークルの操縦支援制御系の設計と屋外走行評価, *機械学会論文集 C 編*, **84-858**, 17-00349 (2018)
- 13) 藤岡, 岡島, 松永: モデル誤差抑制補償器と周波数整形型終端状態制御の併用による 3 慣性ベンチマーク問題の一解法, *計測自動制御学会論文集*, **50-12**, 861/868 (2014)
- 14) 大西公平: 外乱オブザーバによるロバスト・モーションコントロール, *日本ロボット学会誌*, **11-4**, 6/13 (1993)
- 15) 杉江, 吉川: 2 自由度制御系の基本構造とそのサーボ問題への応用, *計測自動制御学会論文集*, **22-2**, 156/161 (1986)
- 16) 奥村, 岡島, 松永: センサノイズ環境下でのモデル誤差抑制補償器の設計, *システム制御情報学会論文誌*, **30-4**, 153/155 (2017)
- 17) T. Sano and S. Yamamoto: A data-driven tuning method for model error compensator, *Proc. SICE Annual Conference 2018*, 1199/2002 (2018)
- 18) 蛸原義雄: LMI によるシステム制御, 森北出版 (2012)
- 19) T. Asai, S. Hara and T. Iwasaki: Simultaneous parametric uncertainty modeling and robust control synthesis by LFT scaling, *Automatica*, **36-10**, 1457/1467 (2000)
- 20) S.P. Boyd and L. Vandenberghe: *Convex Optimization*, Cambridge University Press (2004)
- 21) C.W. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Trans. Automatic Control*, **42-7**, 896/911 (1997)
- 22) I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda: LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, **8-8**, 669/686 (1998)
- 23) Y. Ebihara, T. Hagiwara and T. Shimomura: Multiobjective state-feedback control design with non-common LMI solutions: Change of variables via affine functions, *Proc. American Control Conference*, 848/853 (2001)
- 24) T. Shimomura, M. Takahashi and T. Fujii: Extended-space control design with parameter-dependent Lyapunov functions, *Proc. of IEEE Conference on Decision and Control*, 2157/2162 (2001)
- 25) D.C.W. Ramos and P.L.D. Peres: An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **47-4**, 675/678 (2002)
- 26) J. Dong and G-H. Yang: Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties, *IEEE Trans. Automatic Control*, **52-10**, 1930/1936 (2007)
- 27) 下村 卓: 線形行列不等式の非共通解を用いた多目的制御系設計, *計測と制御*, **41-11**, 811/818 (2002)
- 28) 相良, 秋月, 中溝, 片山: システム同定, コロナ社 (1981)
- 29) 足立修一: システム同定の基礎, 東京電機大学出版局 (2009)

[著 者 紹 介]

岡 島 寛 (正会員)

2002 年大阪大学工学部応用理工学科中退（飛び級）。2004 年大阪大学大学院工学研究科博士前期課程修了。2007 年同博士後期課程修了。熊本大学自然科学研究科助教、2015 年同准教授となり現在に至る。車両運動制御、ロバスト制御などの研究に従事。博士（工学）。IEEE などの会員。