状態のロバスト不変集合を用いた外れ値除去機能を有する MCV オブザーバの解析とオブザーバゲイン設計

岡 島 寛*

Analysis and Design of MCV Observer Based on Robust Invariant Set for Overcoming Observed Outputs with Outliers and Noises

Hiroshi OKAJIMA*

This paper dealt with a design method of MCV observer using robust invariant set analysis method. In our previous research, a design method of state observer for output signal with outliers was proposed. In some control systems, adverse effect by outliers is one of the most important topics for solving. To overcome the adverse effect by outliers, we proposed a method to disappear the effect of outliers using median and candidates of estimated state. In this paper, we give an evaluation signal, and analyze the maximum absolute value of the evaluation signal using a robust invariant set. We propose the design method of observer gains to minify the maximum absolute value of the evaluation signal based on LMIs with some variables. It is easy to design the observer gains by our method. The effectiveness of the proposed design method of observer gains is evaluated by numerical simulation.

Key Words: state observer, outliers, MCV observer, robust invariant set, l_∞ norm

1. はじめに

制御対象の状態を用いた制御システムは広く利用されている。一般的に制御対象に取り付け可能なセンサ数に比べて制御システム内部の状態数が多いことから、状態オブザーバ^{1), 2)}が状態を推定する機構として用いられる。コンピュータ内部において、制御対象の数理モデルと対象に印加する入力、観測出力とを利用して挙動をシミュレートすることで制御対象の状態が推定される。状態オブザーバの歴史は長いが現在もなお、制御工学分野にかかわらずさまざまな分野で状態オブザーバに関する研究が進められている^{3)~5)}。

通常、オブザーバを用いる場合はノイズや外乱は想定されているが、さらに観測出力に外れ値が生じる場合には状態の推定精度が大幅に劣化する。たとえば、イメージセンサに基づいた位置推定や、ネットワーク化制御系におけるパケットロスなどが外れ値が生じる例として挙げられ、たとえ外れ値が生じる時間は瞬間的なものであっても制御系に致命的な影響を与える場合がある。外れ値を考慮した状態推定法は従来より研究されている^{6)~10)}。しかし、外れ値を閾值的に処理する手法やゲインを変動させる手法が多く、影響の除去性能

に限界があった。これを踏まえて先行研究¹²⁾では、外れ値への対処を目的として、ある時刻で外れ値が生じても影響を受けた観測出力を無視することが可能な MCV オブザーバを提案した。本オブザーバは、複数時刻での観測値を独立に利用することで複数の状態推定値の候補を導出し、それらの候補値のうち外れ値の影響を受けていない候補をメディアンを用いて選択する手法である。このとき、MCV オブザーバによる推定では、外れ値の影響除去性能は高いものの、複数候補のうちのどの候補が選択されるかは事前にわからないことから定量的評価に基づいたゲイン設計やノイズ除去性能の定量的な評価は難しかった。

そこで本研究では、定量的な評価に基づいた MCV オブザーバのオブザーバゲイン設計問題を考える。具体的には、MCV オブザーバの性能を評価するための評価信号を定義し、その信号値がある一定値以下となることが保証されるようなオブザーバゲインの設計問題を定式化する。ここでは、不変集合^{13)~16)}を利用した制御系設計を行なう。状態の不変集合を考えることで、状態量がどの範囲で動きうるかを知ることができる。たとえば文献 17), 18) では拘束を有するシステムの制御、文献 19), 20) では量子化制御、文献 21), 22) では事象駆動制御においてそれぞれ状態の不変集合を用いた設計論や解析論が展開されている。状態の不変集合としては可到達集合や出力許容集合などが知られており、状態がある集合内に入ると以降の振る舞いにおいてその集合から抜け出せないという性質をもつ集合である。

* 熊本大学先端科学研究部 熊本市中央区黒髪 2-39-1

* Faculty of Advanced Science and Technology, Kumamoto University, 2-39-1 Kurokami, Chuo-ku, Kumamoto

(Received May 13, 2019)

(Revised August 8, 2019)

本論文の構成は以下のとおりである．第2章では，数学的準備としてロバスト不変集合およびメディアンの計算方法について述べる．さらに，制御対象の構造と外れ値の出現頻度に関する定義を行なう．つぎに，第3章において外れ値にロバストな状態オブザーバとして MCV オブザーバの説明を行ない，定量的評価のための評価信号を定義する．さらに，オブザーバ併合系について概説する．第4章では，評価信号に基づいた MCV オブザーバの性能解析として，ロバスト不変集合を用いた解析条件を求める．さらに，解析条件を基にしたオブザーバゲインの設計法を提案する．設計したオブザーバゲインを MCV オブザーバに適用し第5章で数値例による検証を行なう．最後に，第6章で MCV オブザーバに関する考察を与える．

2. 数学的準備

2.1 ロバスト不変集合

本節では，以下の離散時間線形システムを考える．

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \quad (1)$$

ただし， $A \in R^{n_{inv} \times n_{inv}}$ ， $B \in R^{n_{inv} \times m_{inv}}$ である．ここで，(1) のシステムについて不変集合を特徴付ける目的でつぎの定義を考える．

【定義1】 集合 $\mathcal{X}$ が離散時間システムの対 (A, B) の不変集合であることを

$$x \in \mathcal{X}, w^T w \leq 1 \rightarrow Ax + Bw \in \mathcal{X} \quad (2)$$

が成り立つことと定義する．

ここで定義した不変集合はロバスト不変集合の一種であり，外乱を任意に固定して得られる系に対する不変集合である．不変集合は外乱 w に対する原点からの状態可到達集合を含み，可到達集合を外側から近似する集合として利用することが可能である．

このとき，文献13) では以下の定理が与えられている．ただし， $\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径であり，最大固有値の絶対値を表わしている．

《定理1》 離散時間システムの対 (A, B) において， $A \in R^{n_{inv} \times n_{inv}}$ ， $B \in R^{n_{inv} \times m_{inv}}$ が与えられているものとする．さらに， $w^T w \leq 1$ が成り立つものとする．このとき，楕円体 $\{x \in R^{n_{inv}} : x^T P x \leq 1\}$ がこの対のロバスト不変集合であるための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} A^T P A - (1 - \alpha)P & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B - \alpha I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3)$$

を満たす $\alpha \in [0, 1 - \rho(A)^2]$ が存在することである．

定理1の条件を満たすようなシステムを設計することで楕円体 $\{x \in R^{n_{inv}} : x^T P x \leq 1\}$ が不変集合となる．あるシステムを解析する場合，不変集合は一意に定まるものではなく，より小さな不変集合で近似することが制御性能の見積もり精度の向上や制御目的の達成の上で重要である．不変集合を求

める方法はほかにも存在する^{14), 16)}が，後述の設計論への展開のしやすさを考えて本論文では定理1の利用を考える．

2.2 メディアン

メディアンとは，データを大きさの順に並べたとき，全体の中央に位置する値のことを指す．データの数が偶数個の場合は，中央に位置する2つの数の平均値をとることで求められる． n が奇数であると仮定すると，与えられたスカラデータの組 $x(i), i = 0, \dots, n-1$ について，その値を小さい順に並び替えたものを $\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(n)$ としたとき，中央値 x_m はつぎのように求まる．

$$x_m = \tilde{x}\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (4)$$

中央値の計算にかかる計算コストは大きくないため，メディアンは幅広い分野で利用されている．ここではメディアンを実装するフィルタを $\text{med}[\cdot]$ と表記し次式で表わす．

$$x_m = \text{med}[x(0), x(1), \dots, x(n-1)] \quad (5)$$

3. 問題設定

3.1 制御対象

本論文では，離散時間線形時不変系を扱う．現在時刻を k とし，制御対象の動特性は状態方程式として以下のように与えられるものとする．

$$x_p(k+1) = Ax_p(k) + B_u u(k) + B_d d_u(k) \quad (6)$$

$$y(k) = Cx_p(k) + Dd_y(k) + y_{out}(k) \quad (7)$$

ここで， A, B_u, B_d, C, D はそれぞれ対象の動特性を表わす正方行列および入出力数に対応して適切に定められた行列であり，制御対象の次数を m_s とする．状態 $x_p(k) \in R^{m_s}$ ，制御入力 $u(k) \in R^{m_i}$ ，制御出力 $y(k) \in R^{m_o}$ とし，プロセスノイズ $d_u(k) \in R^{m_i}$ ，観測ノイズ $d_y(k) \in R^{m_o}$ とする．また制御対象が可検出であるものと仮定する．ここでは制御対象の初期状態 $x_p(0) = 0$ とし，時刻 $k = 0$ 以前の入力およびノイズはそれぞれ $u(k) = 0, d_u(k) = 0, d_y(k) = 0$ と与えられているものと仮定する． d_u および d_y はそれぞれ，各要素の絶対値の最大値が1以下であるものとする．

ここで，(7) の $y(k)$ には一般的な線形時不変システムとは異なり信号 $y_{out}(k)$ が含まれている．信号 $y_{out}(k)$ は外れ値を特徴付ける信号であり，外れ値が生じていない時刻では $y_{out}(k) = 0$ であるものとする．特に， $y_{out}(k) = 0, \forall k$ が成り立つ場合は外れ値がないシステムを意味する． $y_{out}(k)$ は外れ値による観測値と本来の観測値とのズレ量を表わしており，たとえば外れ値が生じるタイミングで $y_{out}(k) = -Cx_p(k) - Dd_y(k)$ とした場合には $y(k) = 0$ となるようなパケットロス表現することができる．観測値やノイズと区別するため，ここでは外れ値が生じた時刻 k で $y_{out}(k)$ の絶対値はほかの信号に比べて十分に大きな値であるものとする．

3.2 外れ値の観測頻度

本節では，外れ値の観測頻度に関する仮定を設ける．本論

文では、時間区間 $[k, \dots, k + F_1]$ について、すべての k に対して時間区間内で外れ値が生じる回数の最大数を F_2 とする。このことを (7) の $y_{out}(k)$ を用いて表わすと、任意の時間区間 $[k, \dots, k + F_1]$ について、 $y_{out} \neq 0$ となる回数の最大数が F_2 回であることに対応する。本論文では先行研究¹²⁾と同様に $F_1 \geq 2F_2 + 1$ が成り立つものとして議論を展開する。

3.3 MCV オブザーバ

ここでは、先行研究¹²⁾で提案した MCV オブザーバを概説する。通常のオブザーバでは時刻 k の観測値を利用して時刻 $k + 1$ の状態推定を行なうため、一度でも観測信号 $y(k)$ に外れ値が生じると以降の時刻で適切な推定ができなくなる。これに対して、次式

$$n \leq F_1, \quad 2F_2 + 1 \leq n \quad (8)$$

を満たす整数 n を設定し、本論文では n 個の状態推定値の候補を考える。MCV オブザーバを構成するにあたり、通常の線形時不変系における可検出性だけでなく (6) について (C, A^i) がすべての $i (i = 1, \dots, n)$ について可検出である必要がある。

現在時刻 k での状態推定値を $x_{mcv}(k)$ とすると、現在時刻 k から $i (i = 0, \dots, n - 1)$ ステップ前の時刻での状態推定値 $x_{mcv}(k - i)$ および観測出力 $y(k - i)$ を利用することで、各 i ごとにつぎのように状態推定値の候補 $\hat{x}_i(k + 1)$ を設定する。

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(k + 1) = & (A^{i+1} - L_i C)x_{mcv}(k - i) + L_i y(k - i) \\ & + \sum_{j=0}^i A^j B_u u(k - j) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $L_i (i = 0, \dots, n - 1)$ は状態推定値の候補ごとのオブザーバゲインである。ここでは初期推定値を $x_{mcv}(-i) = 0 (i = 0, 1, \dots, n - 1)$ とする。状態推定値の候補の更新式を示している (9) より、 $\hat{x}_i(k + 1)$ はそれぞれ時刻 $(k - i)$ での観測出力 $y(k - i)$ のみを用いていることに注意する。さらに、 $e_i(k) = x_p(k) - \hat{x}_i(k)$ および $e_{mcv}(k) = x_p(k) - x_{mcv}(k)$ とすると、(6), (9) を用いてつぎの誤差システムを与えることができる。

$$\begin{aligned} e_i(k + 1) = & (A^{i+1} - L_i C)e_{mcv}(k - i) - L_i D d_y(k - i) \\ & + \sum_{j=0}^i A^j B_d d_u(k - j) \end{aligned} \quad (10)$$

本論文では、外れ値の有無を判別し、状態推定値の候補の中から 1 つを選択する目的のためにつぎの信号 $\epsilon_i(k)$ を定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k) = & y(k - i) - C A x_{mcv}(k - i - 1) \\ & - C B_u u(k - i - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

このとき、 $\epsilon_i(k)$ は $x_{mcv}(k - i - 1)$ と $u(k - i - 1)$ が既知であり、 $y(k - i)$ が観測された信号である。信号 $\epsilon_i(k)$ は $e_{mcv} = x_p - x_{mcv}$ を用いてつぎのように表わすこともできる。

Fig. 1 Block diagram of MCV observer with outliers

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k) = & C A e_{mcv}(k - i - 1) + D d_y(k - i) \\ & + C B_d d_u(k - i - 1) + y_{out}(k - i) \end{aligned} \quad (12)$$

(12) の右辺に注目すると、 $y_{out}(k - i) \neq 0$ の場合、すなわち、外れ値が生じた場合には、 $y_{out}(k - i)$ の値の影響は $e_{mcv}(k - i - 1)$, $d_y(k - i)$, $d_u(k - i - 1)$ の影響より大きくなる。このことから、 $\epsilon_i(k)$ の大きさに着目すれば $y(k - i)$ が外れ値を含む観測値か否かを判別できると期待される。ここで、 $2F_2 + 1 \leq n$ となる n を選択していることを考えれば、 $\epsilon_i(k)$ のうち外れ値の影響を受ける、すなわち、 $y_{out} \neq 0$ となる候補の数は F_2 個以下である。このことから、 n 個の $\epsilon_i(k)$, $(i = 0, \dots, n - 1)$ の中央値となる i_* について、 $\epsilon_{i_*}(k)$ は外れ値を含まない、すなわち、 $y_{out} = 0$ となることがわかる。よって、本論文の MCV オブザーバでは状態推定値の候補 $x_i(k + 1)$ から 1 つを選択する目的で信号 $\epsilon_i(k)$ を利用する。

以上の設定に対して、MCV オブザーバのアルゴリズムをつぎのように与える。

Algorithm 1 MCV observer

```

loop
  1. すべての  $i$  について (9) を用いて  $\hat{x}_i(k + 1)$  を計算し、(11)
     により  $\epsilon_i(k)$  を求める。
  2. メディアン計算により
      $i_* = \arg_i \text{med} \{ \{ \epsilon_i(k) \}_{i=0, \dots, n-1} \}$ 
     を求める。
  3.  $x_{mcv}(k + 1) = \hat{x}_{i_*}(k + 1)$  と設定する。
end loop

```

文献 12) では、 $\|\hat{x}_i(k + 1)\|$ に対するメディアンを計算することで外れ値の影響除去を行なったが、本論文では、より外れ値の影響のみを抽出する目的で $\epsilon_i(k)$ を設定した。MCV オブザーバにより外れ値を含む推定値候補が除去されることは、文献 12) で数値例を通して示している。

本論文では、MCV オブザーバの推定誤差を用いたつぎの評価信号 $z_e(k)$ を用いた評価を考える (Fig. 1)。

$$z_e(k) = E e_{mcv}(k) \quad (13)$$

E は評価信号を特徴付けるベクトルである。以降では、信号 $z(k)$ の最大値 $\|z_e(k)\|_\infty$ に着目したオブザーバゲイン L_i の設計論を展開する。

4. ロバスト不変集合を用いたオブザーバゲイン設計

本章では、誤差システム (10) に対して定理 1 に基づいた解析と設計を行なう。すべての候補 $\hat{x}_i$ について、共通の不変集合を求めることを考える。共通の不変集合を設定することで、任意の i の選択について誤差システムの状態 e_{mcv} は不変集合内に留まる。よって、仮にすべての候補 $\hat{x}_i$ に対する共通不変集合を求めることができれば、この集合は MCV オブザーバの誤差システムに対しても不変集合となる。

本章では、次式

$$e_{mcv}^T P e_{mcv} \leq 1 \quad (14)$$

を満足する状態集合 ($P > 0$) を考え、これを利用したゲイン設計を考える。まず、 $i = 0, \dots, n-1$ について次式が成り立つものと仮定する。

$$e_{mcv}(k-i)^T P e_{mcv}(k-i) \leq 1 \quad (15)$$

このとき、すべての i について次式

$$e_i(k+1)^T P e_i(k+1) \leq 1 \quad (16)$$

が成り立つための条件を考える。仮に (16) がすべての $i = 0, \dots, n-1$ について成り立つとすると、 $e_i(k+1)$ の中から 1 つ $e_{mcv}(k+1)$ が選択されることにより

$$e_{mcv}(k+1)^T P e_{mcv}(k+1) \leq 1 \quad (17)$$

が成り立つことから (14) が不変集合の 1 つとなる。これを踏まえ、ここではまず L_i がすべての i について与えられているものとし、不変集合の解析条件を求めるために定理 1 を用いることでつぎの補題を与える。

[補題 1] ノイズについて $\|d_u(k)\|_\infty \leq 1$ かつ $\|d_y(k)\|_\infty \leq 1$ がすべての時刻 k で成り立つ場合を考える。このとき与えられた $P > 0$ および L_i について、以下の条件

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P \bar{A}_i - (1 - \alpha_i) P & \bar{A}_i^T P \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P \bar{A}_i & \bar{B}_i^T P \bar{B}_i - \alpha_i I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (18)$$

$$\alpha_i \in [0, 1 - \rho(\bar{A}_i)^2] \quad (19)$$

をすべての i について満足するとき、ロバスト不変集合が次式で与えられる。

$$e_{mcv}(k)^T P e_{mcv}(k) \leq 1 \quad (20)$$

ただし、 $\bar{A}_i$ および $\bar{B}_i$ は次式で与えられる。

$$\bar{A}_i = A^{i+1} - L_i C \quad (21)$$

$$\bar{B}_i = [B_d, AB_d, \dots, A^i B_d, L_i D] \sqrt{\ell} \quad (22)$$

$$\ell = m_i(i+1) + m_o \quad (23)$$

(証明) ここでは、すべての i について (18), (19) を満たす P および L_i が求まった場合を考え、 $e_{mcv}(k-i)^T P e_{mcv}(k-i) \leq 1$ ($i = 0, \dots, n-1$) に対して時刻 $k+1$ で $e_{mcv}(k+1)^T P e_{mcv}(k+1) \leq 1$ が成り立つことを示す。

Fig. 2 Relationship between invariant ellipsoid and sector region using γ

1) $P e_{mcv}(k+1) \leq 1$ が成り立つことを示す。 $e_{mcv}(k+1)$ は $e_i(k+1)$, ($i = 0, \dots, n-1$) から選択されることから、すべての i について $e_i(k+1)^T P e_i(k+1) \leq 1$ が成り立つことを示せばよい。

ここで定理 1 において、外生信号 w に対するロバスト不変集合が行列不等式条件として特徴付けられている。定理 1 では外生信号が $w^T w \leq 1$ を満たすことを想定しているのに対し、本論文では各ノイズ信号についてその最大値と最小値が設定されている。線形空間における 2 ノルムと ∞ ノルムの単位球の違い²³⁾に着目した上でここでの外生信号の数を ℓ とすると、 ∞ ノルムのノイズ信号に $\sqrt{\ell}$ 倍した信号に対して解析を行なうことで $w^T w \leq 1$ を用いた定理 1 に基づく解析が可能となる。定理 1 を適用する際にノイズ信号を $1/\sqrt{\ell}$ 倍し、 $\sqrt{\ell}$ 倍した B 行列を考えればよい。この点に注意すると、状態推定値の候補に関して推定誤差 $e_i(k+1)$ は (10) によって与えられるため、つぎの対 $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$ を考える。ただし、 $\bar{B}_i$ は

$$\bar{B}_i = [B_d, AB_d, \dots, A^i B_d, L_i D] \sqrt{\ell} \quad (24)$$

で与えられ、 $\bar{A}_i$ は $\bar{A}_i = (A^{i+1} - L_i C)$ で与えられるものとする。以上により、定理 1 により対 $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$ に対して (18), (19) を満たす P および L_i が求まった場合において、すべての i について $e_i(k+1)^T P e_i(k+1) \leq 1$ が成り立つとわかる。

以上の議論により、 $e_{mcv}(k+1)$ は $e_i(k+1)$, ($i = 0, \dots, n-1$) から選ばれることから $e_{mcv}(k+1)^T P e_{mcv}(k+1) \leq 1$ が成り立つ。よって、題意は示せた。

□

このとき、補題 1 の不等式条件は、 α を固定し、 α に関する条件の成立の有無を考えなければ $P > 0$ に関して LMI に帰着される。ここでさらに、 $e_{mcv}(k)$ および (13) で定義した $z_e(k)$ について、つぎの不等式条件を考える (Fig. 2)。

$$e_{mcv}(k)^T P e_{mcv}(k) \geq \frac{1}{\gamma^2} z_e(k)^T z_e(k) \quad (25)$$

ただし、 γ は変数である。この不等式条件が任意の e_{mcv} について成り立つための必要十分条件はつぎのように与えられる。

$$\begin{bmatrix} P & E^T \\ E & \gamma^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (26)$$

仮に、(26) の不等式条件を満足する $\gamma (> 0)$ が求められたと

き, (13) で定義された $z_e(k)$ について (25) と (20) より

$$z_e^T z_e \leq \gamma^2 \quad (27)$$

が成り立つ. 本論文においては z_e がスカラであるため (27) は z_e の値が γ 以下であることを意味している. 以上より, (26) および補題 1 の条件を満足する最小の γ を見つけることができれば与えられた MCV オブザーバについて $z_e(k)$ を用いた定量的な評価が可能となることを踏まえ, つぎの定理が導かれる.

《定理 2》 ノイズについて $\|d_u(k)\|_\infty \leq 1$ かつ $\|d_y(k)\|_\infty \leq 1$ がすべての時刻 k で成り立つ場合を考える. このとき与えられた L_i について, 以下の条件

$$\begin{bmatrix} P & E^T \\ E & \gamma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \alpha_i \in [0, 1 - \rho(\bar{A}_i)^2] \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P \bar{A}_i - (1 - \alpha_i)P & \bar{A}_i^T P \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P \bar{A}_i & \bar{B}_i^T P \bar{B}_i - \alpha_i I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (29)$$

をすべての i について満足する γ および $P > 0$ が存在するとき, Algorithm 1 の MCV オブザーバを用いたシステムの評価信号 z_e に関して

$$|z_e(k)| \leq \gamma, \forall k \quad (30)$$

が成り立つ.

(証明) (28), (29) が成り立てば, 補題 1 より

$$e_{mcv}(k)^T P e_{mcv}(k) \leq 1 \quad (31)$$

となる. さらに, (28) の 1 つ目の不等式条件が成り立つことから, (25) を満足すること, $z_e(k)$ がスカラであることに注意すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} |z_e(k)|^2 &= \frac{1}{\gamma^2} e_{mcv}(k)^T E^T E e_{mcv}(k) \\ &\leq e_{mcv}(k)^T P e_{mcv}(k) \leq 1 \end{aligned} \quad (32)$$

よって $|z_e(k)| \leq \gamma$ となり, 定理 2 が成り立つ. $\square$

ここで, α_i を固定して LMI 問題として γ の最小化を行ない, 最適値を与える α_i を見つければよい. このとき, $\alpha_i \in [0, 1 - \rho(\bar{A}_i)^2]$ を満たすか否かは非常に重要である. しかし, α_i の探索範囲は $[0, 1]$ であることから探索は難しいことではなく, たとえば文献 13) でも探索法を示している.

つぎに定理 2 で特徴づけた解析手法に基づいて設計問題に展開する. 定理 1 に基づいて動的量子化器の設計条件を導出している文献 19), 20) などと同様に, 定理 2 における (28) の不等式制約に Schur の補題を適用し, さらに, $Y_i = -PL_i$ と変数変換を施すことでつぎの問題を与えることができる.

[問題 1] すべての i について以下を満足する最小の γ , および P, Y_i を求めよ.

$$\begin{bmatrix} P & E^T \\ E & \gamma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \alpha_i \in [0, 1 - \rho(\bar{A}_i)^2]$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha_i)P & 0 & (PA^{i+1} + Y_i C)^T \\ 0 & \alpha_i I & (P\bar{B}_i)^T \\ PA^{i+1} + Y_i C & P\bar{B}_i & P \end{bmatrix} \geq 0$$

このとき, 解析条件を与える定理 2 と同様に問題 1 の行列不等式は α_i を固定すれば LMI とみなすことができる. そのため, 解析と同様に α_i を固定して LMI 問題として γ の最小化を行ない, γ の最適値を与える α_i を見つけられればよい. 問題 1 を解いて得られた結果からオブザーバゲインは $L_i = -P^{-1}Y_i$ と求めることができ, 評価信号 $z_e(k)$ について $|z_e(k)| \leq \gamma$ を満足する.

(注意 1) 問題 1 において, 不変集合を楕円体を用いて外側から近似しているため, 可到達集合との間に大幅な乖離が生じた場合には解析や設計により求めた γ と実際の最大信号値との間にギャップが生じる可能性がある. また, (21) で定めたように, $\sqrt{\ell}$ を掛けることにより, プロセスノイズと観測ノイズ集合を含むノイズ集合を定義し, 解析および設計を考えている. この値が大きい場合には制御問題としての保守性の原因となりうることに注意する. $\blacksquare$

5. 数値シミュレーション

本章では, 本論文で MCV オブザーバに対して提案したオブザーバゲイン設計法の有効性を検証する. $F_1 = 5, F_2 = 1$ とする. このとき (8) の条件を満足するよう $n = 3$ とした場合について数値例を示す. 制御対象のパラメータはつぎのように設定する.

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & -0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.1 \\ -0.3 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -0.8 \\ 1.4 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, D = 0.01$$

また, 評価信号 (13) を特徴付ける行列 E は $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ と設定した. ここでは, 問題 1 を解く目的で, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ を 1 から 0.03 刻みで 30 通りづつのパターンとして固定し, 計 30³ 回 (5 分程度の演算時間) の LMI 問題を求解した. その上で, 条件を満足する解のうち γ が最小のものを求めた. その結果, 得られたオブザーバゲインを以下に示す.

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0.775 \\ 0.617 \\ 0.843 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 0.767 \\ 0.516 \\ 0.526 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.743 \\ 0.414 \\ 0.243 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = 0.36, \alpha_1 = 0.54, \alpha_2 = 0.75 \quad (33)$$

このとき, γ の最適値 γ_{opt} は次式のように求まった.

$$\gamma_{opt} = 1.71 \quad (34)$$

この結果, 任意の $|d_u(k)| \leq 1, |d_y(k)| \leq 1$ を満たすノイズに対して, 上記のゲインを適用した MCV オブザーバでは

Fig. 3 Noise and outliers in observed output

Fig. 4 State of traditional state observer and actual state

Fig. 5 State of MCV observer and actual state

Fig. 6 State error between estimated and actual state

$|z_e(k)| \leq 1.71$ を満たすこととなる。

ここでは、外れ値に加えて入力と出力にノイズがある場合のシミュレーションを行なう。プロセスノイズ $d_u(k)$ および観測ノイズ $d_y(k)$ はその値の範囲が ± 1 となるようランダムに与えている。入力を

$$u(k) = \sin(0.01k) \quad (35)$$

とし、時刻 $k = 100, 300, 500$ で $y = 0$ 、時刻 $k = 200, 400$ でそれぞれ $y(200) = -10000$ 、 $y(400) = 10000$ となる外れ値の設定の下でシミュレーションを行なった。Fig. 3 に観測出力 $y(k)$ を示す。 k が 100 の倍数のときに外れ値によって値が飛んでいることがわかる。この観測信号を用いて同一次元オブザーバ（従来手法、(9) の $\hat{x}_0(k+1)$ の更新式に相当）および MCV オブザーバ（提案手法）で状態推定した結果がそれぞれ Fig. 4 および Fig. 5 である。各図において破線と実線がそれぞれ状態推定値と状態の真値を示している。従来手法では Fig. 3 で外れ値となったタイミングで推定値が大幅に変動しており正しく推定できていないのに対し、制御対象の状態と提案手法による推定値が図中ではほとんど重なっており、 $e_{mcv}(k)$ は Fig. 6 に示すように小さな値となっていることが確認できる。

また、Fig. 7 は $z_e(k)$ の推移を示しており、 $|z_e(k)| \leq 1.71$ を常に満たしている、すなわち、(27) を満足していることが確認できる。

Fig. 7 Evaluation signal z_e

6. 考 察

6.1 外れ値の観測頻度と性能の関係

ここでは、外れ値の観測頻度と性能との関係について考察する。状態推定値の候補数 n は、 $n \geq 2F_2 + 1$ で与えられる。このとき、 F_2 の値が大きいと n は大きく設定することになる。他方、問題 1 では、 α_i を固定することで $(n+1)$ 本の LMI を連立して解くことで L_i を求めている。このとき、リアプノフ行列 P を共通に取ることに起因して、 n が増えるほど同時に満たすべき制約式が増えることになり、結果として γ の値が大きくなる可能性がある。

6.2 状態の初期値

本論文では、制御対象の初期状態を $x_p(0) = 0$ とし、MCV オブザーバの初期推定値として $x_{mcv}(-i) = 0$ ($i =$

$0, 1, \dots, n-1$) と設定している. さらに, 制御入力 $u(k)$ およびノイズ $d_u(k)$, $d_y(k)$ の $k=0$ 以前の値を 0 と設定している. これらの仮定は, MCV オブザーバの初期値応答において

$$e_{mcv}(k)^T P e_{mcv}(k) \leq 1 \quad (36)$$

を満たすことを目的とした仮定である. そのため, 制御対象の初期状態 $x_p(0)$ および $x_{mcv}(-i) = 0$ ($i = 0, \dots, n-1$) であることは必ずしも必要ではなく, (36) を $k = 0, -1, -2, \dots, -n+1$ で満たしていれば (30) を満足する.

また, 仮に上記の条件を満足していなかった場合でも, 初期値応答の影響がなくなる程度に十分な時間が経過すれば, それ以後の時刻で $|z_e(k)| \leq \gamma$ を満たすことになるため, オブザーバとしての機能を十分に果たすことになる.

7. おわりに

本論文では, 複数の候補ベクトルのメディアンを利用して外れ値の影響を除去しつつ状態推定する MCV オブザーバに対し, 定量的な評価に基づいたゲイン設計手法を提案した. 評価信号を設定し, 設定した評価信号の最大値を評価するための解析条件を不変集合を利用して導出した. また, 求めた解析手法に基づいて評価信号の最大値を最小化する問題としてオブザーバゲイン設計問題を扱った. 一部の 변수を固定すると LMI 条件になり, 容易にゲインを求めることができることから, 本論文で提案した設計問題を解くことは難しい. 提案した設計問題からオブザーバゲインを求め, 評価信号の値が所定の値以下となることを数値シミュレーションで確認し, 提案法の有効性を示した. 数値シミュレーションでは外れ値を含む観測信号を利用していることから, 外れ値が生じてもその影響を除去する MCV オブザーバとして機能していることも併せて確認している.

参考文献

- 川路茂保: オブザーバ理論とその応用, 電気学会論文誌 (D), **100-7**, 630/635 (1988)
- D. Luenberger: An introduction to observers, *IEEE Trans. Automatic Control*, **16-6**, 596/602 (1971)
- 桂, 大西: バイラテラル制御による力覚の伝達と再現, 電気学会論文誌 (D), **123-11**, 1371/1376 (2003)
- 米澤, 関口, 野中: キャスタ型オドメータに対する積分型拡張 Luenberger オブザーバ, 計測自動制御学会論文集, **53-12**, 633/643 (2017)
- 延命, 藤本, 堀: 原子間力オブザーバに基づく高速フォースカーブ測定, 電気学会論文誌 (D), **137-10**, 753/759 (2017)
- I.C. Schick and S.K. Mitter: Robust recursive estimation in the presence of heavy-tailed observation noise, *The Annals of Statistics*, **22-2**, 1045/1080 (1994)
- S. Sarkka and A. Nummenmaa: Recursive noise adaptive Kalman filtering by variational Bayesian approximations, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **54-3**, 596/600 (2009)
- B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M.I. Jordan and S.S. Sastry: Kalman filtering with intermittent observations, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **49-9**, 1453/1464 (2004)
- Y. Kaneda, Y. Irizuki and M. Yamakita: Design method of robust Kalman filter via l_1 regression and its application for vehicle control with outliers, *Proc. 38th Ann. Conf. IEEE Ind. Electron. Soc.*, 2210/2215 (2012)
- K. Suyama: Reliable observer-based control using vector-value decision by majority, *Proc. 38th IEEE Conf. Dec. Contr.*, 4486/4492 (1999)
- 中村, 長井, 杉本: 外れ値を伴う環境下での切替え型オブザーバによる状態推定, 計測自動制御学会論文集, **47-2**, 81/89 (2011)
- 岡島, 金田, 田村, 松永: メディアンを用いた外れ値やデータ欠落にロバストな状態推定オブザーバ, 計測自動制御学会論文集, **55-4**, 245/251 (2019)
- 新銀, 太田: 離散時間システムに対する最適な不変集合—有界入力に対する可到達集合の近似—, 計測自動制御学会論文集, **40-8**, 842/848 (2004)
- 平田, 太田: 精度を保証した線形離散時間系の状態可到達集合推定, 計測自動制御学会論文集, **39-6**, 585/589 (2003)
- 渡辺, 内田, 藤田: 2次システムに対する状態可到達集合の解析, 計測自動制御学会論文集, **34-11**, 1590/1595 (1998)
- J.J. Martinez: Minimal RPI sets computation for polytopic systems using the bounded-real lemma and a new shrinking procedure, *IFAC-PapersOnLine*, **48-26**, 182/187 (2015)
- 平田, 小木曾: 拘束条件を考慮したリファレンスガバナの実現, システム制御情報学会論文誌, **14-11**, 554/559 (2001)
- T. Hu, Z. Lin and B.M. Chen: Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation, *Systems & Control Letters*, **45-2**, 97/112 (2002)
- 澤田, 新: 離散値入力型 SISO システムに対する不変集合解析に基づく動的量子化器設計, システム制御情報学会論文誌, **23-11**, 249/256 (2010)
- H. Okajima, K. Sawada and N. Matsunaga: Dynamic quantizer design under communication rate constraints, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **61-10**, 3190/3196 (2016)
- W. Wu, S. Reimann, D. Gorges and S. Liu: Event-triggered control for discrete-time linear systems subject to bounded disturbance, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **26-9**, 1902/1918 (2015)
- 山本, 市原: 状態および入力に関する誤差評価に基づく事象駆動制御系に対するロバスト不変集合解析, 自動制御連合講演会論文集, SaB3-1 (2017)
- 太田快人: システム制御のための数学 (1) —線形代数編—, コロナ社 (2000)

[著者紹介]

岡島 寛 (正会員)

2002 年大阪大学工学部応用理工学科中退 (飛び級). 2004 年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了. 2007 年同博士後期課程修了. 熊本大学自然科学研究科助教, 2015 年同准教授となり現在に至る. 車両の運動制御, 量子化制御, 内部モデルを陽に利用した制御系設計などの研究に従事. 博士 (工学). IEEE, システム制御情報学会, 電気学会, 電子情報通信学会の会員.