多重周期サンプリングデータに基づくシステム表現と制御方式

可 知 怜 也*・藤 崎 泰 正*

A System Representation and a Control Strategy Based on Multi-rate Sampling Data

Ryoya KACHI* and Yasumasa FUJISAKI*

This paper presents a system representation and a control strategy for a multi-rate linear discrete-time plant. No traditional mathematical model such as transfer function or state equation of the plant is employed. The plant dynamics is represented as a set of basis vectors whose elements are multi-rate sampling data of the plant. Then it is shown that, for a reference signal, a dead-beat control input which minimizes a quadratic performance index can readily be computed by means of a convex optimization defined by the data array.

Key Words: linear discrete-time system, input-output data, multi-rate sampling, system representation, optimal control

1. はじめに

近年、コンピュータの急速な発展に伴い、大量のデータが短時間で処理できるようになった。これにより、産業分野ではビッグデータを有効に活用しようとする動きが活発になっている。さらに、制御分野でも、データを直接用いて制御系を設計するデータ駆動型制御に注目が集まっている。

データ駆動型制御には、大きく分けて、2つのアプローチがある。1つは、データを直接用いて制御器設計または制御器パラメータを設計するアプローチ^{1)~6)}。もう1つは、データを用いて制御入力を直接生成するアプローチ^{7)~9)}である。後者では、システムが生成する入出力信号の振る舞いが、それ自身の空間の基底により記述できることに着目し、いくつかの制御問題に対し、入出力データを並べた配列より操作入力系列を直接求める方法を与えている。

本論文では、データを直接用いて制御入力を生成する研究^{7)~9)}に着目する。このような入出力データに基づくシステム表現と制御方式が、入力信号と出力信号のサンプリングレートが異なる多重周期サンプリングデータを用いる場合に対しても、データ空間の定義を適切に変更すれば可能になることを明らかにする。そして、ある与えられた目標となる振る舞いに有限時間で一致する振る舞いの中で、2次形式評価関数を最小とする制御入力が、入出力データを並べた配列を用いて定義される凸最適化を解くことにより得られることを示す。

現実の場面では、デジタルサーボによるサンプリング周

期の短い制御に対して、ビデオ撮影によるサンプリング周期の長い位置検出を用いる場合など、入力の更新周期と出力の観測周期が必ずしも一致しない場合が多い。そのため、入出力データ空間におけるシステム表現と制御方式が多重周期サンプリングデータに対しても適用できることは、現実問題への応用という意味で、実際有用である。

なお、本論文を通して、 I は適当なサイズをもつ単位行列を表わし、 0 は適当なサイズをもつ零行列を表わす。また、行列 $U \in \mathbb{R}^{s \times t}$ が与えられるとき、 $U^\perp$ を

$$U^\perp \in \mathbb{R}^{(s-r) \times t}, \quad U^\perp U = 0, \quad U^\perp (U^\perp)^T > 0$$

を満たす行列として定義する。ただし、 $\text{rank}(U) = r$ である。

2. 多重周期入出力データに基づくシステムの表現

本章では、多重周期入出力データ空間におけるシステム表現を提案する。まず、多重周期でサンプリングされた入出力データを、適当な長さだけ並べ、多重周期入出力データベクトルを定義する。そして、そのように多重周期入出力データベクトルを構成すれば、従来研究⁸⁾と同じように入出力データ空間を定義でき、その次元も定まることを示す。これにより、多重周期サンプリングデータを用いる場合に対しても、入出力データ空間の基底となる多重周期入出力データベクトルの組により、対象システムのダイナミクスを表現できる。

2.1 入出力データ空間

本論文では、有限次元線形時不変の1入力1出力離散時間システムを対象とする。このシステムは、状態方程式

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \quad (1)$$

* 大阪大学大学院情報科学研究科 吹田市山田丘 1-5

* Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, 1-5 Yamadaoka, Suita

(Received March 28, 2018)

(Revised September 30, 2018)

で表現できる．ここで $k = 0, 1, 2, \dots$ は離散時刻， $x_k \in \mathbb{R}^n$ は時刻 k における状態， $u_k \in \mathbb{R}$ は時刻 k における入力， $y_k \in \mathbb{R}$ は時刻 k における出力であり， $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ， $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ， $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ は定数行列である．このシステムに従う多重周期サンプリングデータとして，本論文では，入力が周期 p の 0 次ホールドで更新され，出力が周期 q のサンプリングで観測される場合について考える．ここで， p と q は互いに素な整数であり， $T = pq$ をフレーム周期とする．一般に，多重周期の入出力をもつシステムは周期時変システムである．以下では，この T 周期システムが可到達，可観測（つまり， T 周期でリフティングした時不変システムが可到達，可観測）であるとする．また，状態の次元 n は既知であるとし， A は正則であるとする．一方，定数行列 A ， B ， C ， D は未知であるとし，それらの値は用いない．このように，システム構造が既知であり，システムパラメータが未知である状況を考える．そして，このシステムの生成する入出力データが十分に入手できるとし，それらデータに基づくシステム表現や制御方式を考察する．

まず，このシステムの入出力データを，各周期にあわせて，出力を q ステップごとに ℓ 個，入力を p ステップごとに c_ℓ 個ずつ並べてベクトルにまとめ，

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} y_{ip+d} & y_{ip+q+d} & \cdots & y_{ip+(\ell-1)q+d} \\ u_{ip} & u_{ip+p} & \cdots & u_{ip+(c_\ell-1)p} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

のように記述する．ここで， $i = 0, 1, 2, \dots$ ， $0 \leq d \leq q-1$ であり， ℓ と c_ℓ は $(c_\ell-1)p \leq (\ell-1)q+d < c_\ell p$ を満たすように選ばれているとする．つまり， $\bar{z}$ は，離散時刻が $k = ip$ から $k = ip + (\ell-1)q + d$ までの多重周期サンプリングデータのすべてを含むものであり，最初の時刻のデータは入力，最後の時刻のデータは出力であって， $\bar{z}$ には因果的な入出力データしか含まれていない．以下，この $\bar{z}$ を多重周期入出力データベクトルと呼ぶ．また，対象システムが生成しうるすべての $\bar{z}$ の集合を，多重周期入出力データ空間と呼び， $\bar{\mathcal{Z}}$ で表わす．

入出力データの振る舞いはシステムのダイナミクスにより拘束されているので， $\bar{z}$ は $\ell + c_\ell$ 次元の実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{\ell+c_\ell}$ の部分空間に属する．実際，つぎの定理が成り立つ．

定理 1. $\ell > np$ であれば，

$$\dim(\bar{\mathcal{Z}}) = c_\ell + n \quad (3)$$

証明. まず，準備として，対象システムを拘束する状態方程式 (1) の係数行列を用いて，ブロック行列

$$\bar{\mathcal{O}}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA^q \\ \vdots \\ CA^{(k-1)q} \end{bmatrix} A^d \quad (4)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_k =$$

$$\left[\sum_{i=0}^{p-1} A^{i+(c_k-1)p} B \quad \sum_{i=0}^{p-1} A^{i+(c_k-2)p} B \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{p-1} A^i B \right] \quad (5)$$

$$\bar{\Gamma}_k =$$

$$\begin{bmatrix} D_{d,d} & D_{d,d+1} & \cdots & D_{d,d+c_\ell-1} \\ D_{d+1,d} & D_{d+1,d+1} & \cdots & D_{d+1,d+c_\ell-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{d+k-1,d} & D_{d+k-1,d+1} & \cdots & D_{d+k-1,d+c_\ell-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$D_{a,b} = D\chi_{[bp,(b+1)p)}(aq)$$

$$+ \sum_{\gamma=bp}^{(b+1)p-1} CA^{aq-1-\gamma} B\chi_{[0,aq)}(\gamma)$$

$$\chi_{[\alpha,\beta)}(\gamma) = \begin{cases} 1 & (\alpha \leq \gamma < \beta) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (7)$$

を定義する¹⁰⁾．ここで，各行列の添字は，それぞれの行列のブロック数により決まる．

システムに対する状態方程式 (1) による拘束より，任意の多重周期入出力データベクトル $\bar{z}$ と状態 x_{ip} に対して，

$$\begin{bmatrix} I_\ell & -\bar{\Gamma}_\ell \end{bmatrix} \bar{z} = \bar{\mathcal{O}}_\ell x_{ip} \quad (8)$$

が成り立つ．ここで， $\ell > np$ と T 周期システムが可観測， A が正則より， $\text{rank } \bar{\mathcal{O}}_\ell = n$ である．つまり， $\bar{z}$ が決まれば x_{ip} は一意に決まる．したがって，(8) 式から x_{ip} に関する方程式を消去すると， $\bar{z}$ に対する拘束条件のみが残る．具体的には，(8) 式の両側に行列 $\bar{\mathcal{O}}_\ell^\perp \in \mathbb{R}^{(\ell-n) \times \ell}$ をかけると，拘束条件は

$$\bar{\Theta} \bar{z} = 0$$

と表現できる．ただし，

$$\bar{\Theta} = \bar{\mathcal{O}}_\ell^\perp \begin{bmatrix} I_\ell & -\bar{\Gamma}_\ell \end{bmatrix} \quad (9)$$

と定義する．ゆえに，

$$\bar{\mathcal{Z}} = \ker \bar{\Theta}$$

がいえる．ここで， $\bar{\mathcal{O}}_\ell^\perp$ が行フルランクであることに注意すれば， $\text{rank } \bar{\Theta} = \ell - n$ であることがわかる．したがって，

$$\begin{aligned} \dim(\bar{\mathcal{Z}}) &= \dim(\ker \bar{\Theta}) \\ &= \ell + c_\ell - \text{rank } \bar{\Theta} = c_\ell + n \end{aligned}$$

であることがわかる． $\square$

したがって， $\ell > np$ であるとするれば， $c_\ell + n$ 本の互いに独立な多重周期入出力データベクトル $\bar{z}_m \in \bar{\mathcal{Z}}$ ($m = 1, 2, \dots, c_\ell + n$) が得られるとき，多重周期入出力データ空間 $\bar{\mathcal{Z}}$ の任意の要素

$\bar{z}$ は、それらの線形結合として一意に表わすことができる。このことは、多重周期入出力データ空間 $\bar{\mathcal{Z}}$ の基底となる多重周期入出力データベクトルの組により、対象システムのダイナミクスを表現できることを意味している。

そこで、多重周期入出力データベクトル $\bar{z}$ を、列としてフレーム周期 T ごとに順に並べていった行列

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} y_{0+d} & y_{T+d} & \cdots & y_{iT+d} & \cdots \\ y_{q+d} & y_{T+q+d} & \cdots & y_{iT+q+d} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ y_{(\ell-1)q+d} & y_{T+(\ell-1)q+d} & \cdots & y_{iT+(\ell-1)q+d} & \cdots \\ u_0 & u_T & \cdots & u_{iT} & \cdots \\ u_p & u_{T+p} & \cdots & u_{iT+p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ u_{(c_\ell-1)p} & u_{T+(c_\ell-1)p} & \cdots & u_{iT+(c_\ell-1)p} & \cdots \end{bmatrix} \quad (10)$$

を考える。定理 1 より、この行列 $\bar{H}$ のランクは高々 $c_\ell + n$ であり、入力が十分に rich であれば、 $\bar{H}$ のランクは $c_\ell + n$ になり、それを越えることはない。つまり、 $\bar{\mathcal{Z}}$ の基底を具体的に選ぶ必要はなく、行列 $\bar{H}$ とそのランク条件により、このシステムのダイナミクスを表現できる。

3. 多重周期入出力データ空間の構造と次元

本章では、前章で議論した多重周期入出力データによるシステム表現に基づく制御方式を考えるにあたり、まずは、多重周期入出力データ空間 $\bar{\mathcal{Z}}$ の部分空間を考察する。

3.1 多重周期可到達データ空間

従来研究⁸⁾にならって、最初の np 個の出力の値と c_{np} 個の入力の値が 0 である多重周期入出力データベクトル

$$\bar{z}_F = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{ip+npq+d} & \cdots & y_{ip+(\ell-1)q+d} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{ip+c_{np}p} & \cdots & u_{ip+(c_\ell-1)p} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

を考える。以下では、多重周期入出力データベクトルの最初の np 個の出力と c_{np} 個の入力をあわせて初期値系列と呼ぶ。また、対象システムが生成しうるすべての $\bar{z}_F$ の集合を、多重周期可到達データ空間と呼び、 $\bar{\mathcal{Z}}_F$ で表わす。

明らかに、 $\bar{\mathcal{Z}}_F$ は $\bar{\mathcal{Z}}$ の部分空間である。このとき、つぎの定理が成り立つ。

定理 2.

$$\dim(\bar{\mathcal{Z}}_F) = c_\ell - c_{np} \quad (12)$$

証明. まず、(11) 式の $\bar{z}_F$ に対応して、

$$\bar{J}_F = \text{blockdiag}\{I_{np}, 0_{\ell-np}, I_{c_{np}}, 0_{c_\ell-c_{np}}\} \quad (13)$$

を定義すると、初期値系列が 0 であるという拘束は、

$$\bar{J}_F \bar{z}_F = 0$$

と書けるから、

$$\bar{\mathcal{Z}}_F = \ker \bar{\Theta} \cap \ker \bar{J}_F$$

がいえ。つぎに、(8) 式の行列を

$$\bar{\Theta}_\ell = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{np} \\ \bar{\Theta}_{\ell-np} A^{npq} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_\ell = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{np} & 0 \\ \bar{\Theta}_{\ell-np} \bar{C}_{np} & \bar{\Gamma}_{\ell-np} \end{bmatrix}$$

のように、ブロック行列に書き直す。いま、 T 周期システムが可観測、 A が正則より、 $\bar{\Theta}_{np}$ は列フルランクなので、

$$\bar{\Theta}_\ell^\perp = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{np}^\perp & 0 \\ -\bar{\Theta}_{\ell-np} A^{npq} \bar{\Theta}_{np}^\perp & I_{\ell-np} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

と選ぶことができる。これを、(9) 式に代入すれば、 $\bar{\Theta}$ を

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & I_{\ell-np} & * & * \end{bmatrix}$$

と書くことができる。ここで、 $*$ は計算結果により決まる適当な行列である。これより、 $\bar{J}_F$ が単位行列のブロックを含むことに注意すれば、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{J}_F \end{bmatrix} = \ell + c_{np}$$

であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned} \dim(\bar{\mathcal{Z}}_F) &= \dim(\ker \bar{\Theta} \cap \ker \bar{J}_F) \\ &= \ell + c_\ell - \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{J}_F \end{bmatrix} = c_\ell - c_{np} \end{aligned}$$

である。□

3.2 多重周期可制御データ空間

さらに、上記のものとは対照的な、最後の np 個の出力の値と c_{np} 個の入力の値が 0 の多重周期入出力データベクトル

$$\bar{z}_P = \begin{bmatrix} y_{ip+d} & \cdots & y_{ip+(\ell-np-1)q+d} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{ip} & \cdots & u_{ip+(c_\ell-c_{np}-1)p} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

を考える。以下では、多重周期入出力データベクトルの最後の np 、 c_{np} 個の入出力時系列を最終値系列と呼ぶ。また、対象システムが生成しうるすべての $\bar{z}_P$ の集合を、多重周期可制御データ空間と呼び、 $\bar{\mathcal{Z}}_P$ で表わす。

明らかに、 $\bar{\mathcal{Z}}_P$ も $\bar{\mathcal{Z}}$ の部分空間である。このとき、つぎの定理が成り立つ。

定理 3.

$$\dim(\bar{\mathcal{Z}}_P) = c_\ell - c_{np} \quad (16)$$

証明. まず, (15) 式の $\bar{z}_P$ に対応して,

$$\bar{J}_P = \text{blockdiag}\{0_{\ell-np}, I_{np}, 0_{c_\ell-c_{np}}, I_{c_{np}}\} \quad (17)$$

を定義すると, 前節の証明と同様に,

$$\bar{Z}_P = \ker \bar{\Theta} \cap \ker \bar{J}_P$$

がいえる. つぎに, (8) 式の行列を

$$\bar{O}_\ell = \begin{bmatrix} \bar{O}_{\ell-np} \\ \bar{O}_{np} A^{(\ell-np)q} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_\ell = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{\ell-np} & 0 \\ \bar{O}_{np} \bar{C}_{\ell-np} & \bar{\Gamma}_{np} \end{bmatrix}$$

のように, ブロック行列に書き直す. いま, T 周期システムが可観測, A が正則より, $\bar{O}_{np} A^{(\ell-np)q}$ は列フルランクなので,

$$\bar{O}_\ell^\perp = \begin{bmatrix} I_{\ell-np} & -\bar{O}_{\ell-np} (\bar{O}_{np} A^{(\ell-np)q})^+ \\ 0 & (\bar{O}_{np} A^{(\ell-np)q})^\perp \end{bmatrix},$$

とおくことできる. これを, (9) 式に代入すれば, $\bar{\Theta}$ を

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} I_{\ell-np} & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

と書くことができる. ここで, $*$ は計算結果により決まる適当な行列である. また, この行列の 2 行 3 列目のブロックが 0 となるのは,

$$(\bar{O}_{np} A^{(\ell-np)q})^\perp (\bar{O}_{np} A^{(\ell-np)q}) A^{-(\ell-np)q} \bar{C}_{\ell-np} = 0$$

となるからである. これより, $\bar{J}_P$ が単位行列のブロックを含むことに注意すれば,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{J}_P \end{bmatrix} = \ell + c_{np}$$

であることがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} \dim(\bar{Z}_P) &= \dim(\ker \bar{\Theta} \cap \ker \bar{J}_P) \\ &= \ell + c_\ell - \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_j \\ \bar{J}_P \end{bmatrix} = c_\ell - c_{np} \end{aligned}$$

である. $\square$

3.3 可到達データ空間と可制御データ空間の共通部分

以上に基づいて, ある与えられた初期値系列と最終値系列をつなぐ振舞いについて考える. まず, つぎの定理が成り立つ.

定理 4. $\ell \geq 2np + nq$ であれば,

$$\dim(\bar{Z}_F \cap \bar{Z}_P) = c_\ell - 2c_{np} - n \quad (18)$$

である.

証明. まず, (13) 式の $\bar{J}_F$, (17) 式の $\bar{J}_P$ を用いて,

$$\bar{Z}_C = \bar{Z}_P \cap \bar{Z}_F = \ker \bar{\Theta} \cap \ker \bar{J}_P \cap \ker \bar{J}_F$$

がいえる. つぎに, (6) 式の行列を

$$\bar{\Gamma}_\ell = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{np} & 0 & 0 \\ \bar{O}_{\ell-2np} \bar{C}_{np} & \bar{\Gamma}_{\ell-2np} & 0 \\ \bar{O}_{np} \bar{A}^{(\ell-2np)q} \bar{C}_{np} & \bar{O}_{np} \bar{C}_{\ell-2np} & \bar{\Gamma}_{np} \end{bmatrix}$$

のように, ブロック行列に書き直す. (14) 式の $\bar{O}_\ell^\perp$ より, (9) 式の $\bar{\Theta}$ を

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & I_{\ell-2np} & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & * & * & \bar{O}_{np} \bar{C}_{\ell-2np} & * \end{bmatrix}$$

と書くことができる. ここで, $*$ は計算結果により決まる適当な行列である. また, T 周期システムが可観測かつ可到達, A が正則であることと, $\ell \geq 2np + nq$ であることより, この行列の 3 行 5 列目のブロック行列は

$$\text{rank}(\bar{O}_{np} \bar{C}_{\ell-2np}) = n$$

である. これより, $\bar{J}_F$ と $\bar{J}_P$ が単位行列のブロックを含むことに注意すれば,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{J}_P \\ \bar{J}_F \end{bmatrix} = \ell + 2c_{np} + n$$

であることがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} \dim(\bar{Z}_C) &= \dim(\ker \bar{\Theta} \cap \ker \bar{J}_P \cap \ker \bar{J}_F) \\ &= \ell + c_\ell - \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_j \\ \bar{J}_P \\ \bar{J}_F \end{bmatrix} = c_\ell - 2c_{np} - n \end{aligned}$$

である. $\square$

定理 1, 2, 3 より, 定理 4 の仮定が満たされるならば,

$$\begin{aligned} \dim(\bar{Z}_F + \bar{Z}_P) &= \dim(\bar{Z}_F) + \dim(\bar{Z}_P) - \dim(\bar{Z}_F \cap \bar{Z}_P) \\ &= \dim(\bar{Z}) \end{aligned}$$

が成り立つ. これは,

$$\bar{Z} = \bar{Z}_F + \bar{Z}_P$$

であることを意味している.

そこで, 定理 4 の仮定が満たされるときの多重周期入出力データ空間 $\bar{Z}$ を

$$\bar{Z} = \bar{Z}_{IP} \oplus \bar{Z}_{TF} \oplus \bar{Z}_C$$

と分解する. ここで,

$$\bar{Z}_C = \bar{Z}_F \oplus \bar{Z}_P$$

である. また, $\bar{Z}_{IP}$, $\bar{Z}_{TF}$ はそれぞれ

$$\bar{Z}_F = \bar{Z}_{TF} \oplus \bar{Z}_C, \quad \bar{Z}_P = \bar{Z}_{IP} \oplus \bar{Z}_C$$

となる部分空間であり, それらの次元は, 定理 2, 3, 4 より

$$\dim(\bar{\mathcal{Z}}_{TF}) = c_{np} + n, \quad \dim(\bar{\mathcal{Z}}_{IP}) = c_{np} + n$$

である。つまり、任意の多重周期入出力データベクトル $\bar{z}$ は、それと同じ初期値系列をもち最終値系列が 0 の要素 $\bar{z}_{IP} \in \bar{\mathcal{Z}}_{IP}$ 、それと同じ最終値系列をもち初期値系列が 0 の要素 $\bar{z}_{TF} \in \bar{\mathcal{Z}}_{TF}$ 、初期値系列と最終値系列が共に 0 の要素 $\bar{z}_C \in \bar{\mathcal{Z}}_C$ を用いて、

$$\bar{z} = \bar{z}_{IP} + \bar{z}_{TF} + \bar{z}_C$$

と一意に表わせる。

このように、定理 4 は初期値系列と最終値系列をつなぐ振る舞いの自由度を表わしている。つまり、定理 4 の次元が正となれば、自由度をもつ初期値系列と最終値系列をつなぐベクトル $\bar{z}_C$ が存在することになる。このことを利用すれば、本章で述べるように、多重周期入出力データに基づくシステム表現の枠組みで、有限時間最適制御を解くことができる。

なお、以上の本節の結果において $p = q = 1$, $c_\ell = \ell$, $d = 0$ とすれば、単一周周期入出力データを対象とした従来研究⁸⁾に一致する。つまり、多重周期入出力データを対象とする本論文の結果は、従来研究の自然な拡張となっている。

4. 有限時間最適制御入力の入出力データからの直接構成

以上の多重周期入出力データ空間の各部分空間の解析結果に基づき、制御入力の入出力データから直接構成する方法について検討する。本章では 2 次形式評価関数に基づく有限時間最適制御を取り上げるが、以下の考察で明らかになるように、入出力データ空間における凸最適化として定式化できる制御仕様であれば、同様に扱うことができる。なお本章では、記述を簡単化するため、 $d = 0$ の場合を例に考察する。

4.1 有限時間最適制御

制御開始時刻 $iT + c_{np}p - (j-1)p$ より前に、対象システムは、すでに何らかの操作をしており、その結果として、初期値系列が決まっているとする。ここで、 j は $1 \leq j \leq q$ を満たすある整数である。このとき、有限時間最適制御は、時刻 $iT + (\ell - np)q$ から $iT + (\ell - 1)q$ までのシステムの出力と時刻 $iT + (c_\ell - c_{np})p$ から $iT + (c_\ell - 1)p$ までの入力を与えられた最終値系列に一致させ、2 次形式評価関数

$$\bar{J} = \sum_{i=0}^{N_1/q} \bar{v}_i (y_i^R - y_{iq})^2 + \sum_{k=0}^{N_2/p} \bar{w}_k (u_k^R - u_{kp})^2 \quad (19)$$

を最小化するような制御入力を求める問題と考えることができる。ここで、 $y_i^R \in \mathbb{R}$, $u_k^R \in \mathbb{R}$ はそれぞれ出力と入力の目標信号であり、 $\bar{v}_i \geq 0$, $\bar{w}_k \geq 0$ はそれぞれ y_{iq} , u_{kp} の目標値からの誤差に対する重み、 N_1 は制御終了時刻、 N_2 は制御入力の更新終了時刻である。

そこで、定理 4 の成り立つような ℓ が与えられたとし、行列 $\bar{H}$ を、既知データのみを含む列からなる行列 $\bar{D}^P$ と未知データを含む列からなる行列 $\bar{D}^F$ に分けて考える。すなわち、時刻 $iT + c_{np}p - (j-1)p - 1$ までのデータが既知であるので、

$(f-1)T + (\ell-1)q \leq iT + c_{np}p + (j-1)p - 1 < fT + (\ell-1)q$ を満たす $f \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{D}^P & \bar{D}^F \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}^P = \begin{bmatrix} y_0 & y_T & \cdots & y_{(f-1)T} \\ y_q & y_{T+q} & \cdots & y_{(f-1)T+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{(\ell-1)q} & y_{T+(\ell-1)q} & \cdots & y_{(f-1)T+(\ell-1)q} \\ u_0 & u_T & \cdots & u_{(f-1)T} \\ u_p & u_{T+p} & \cdots & u_{(f-1)T+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{(c_\ell-1)p} & u_{T+(c_\ell-1)p} & \cdots & u_{(f-1)T+(c_\ell-1)p} \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}^F =$$

$$\begin{bmatrix} y_{fT} & y_{(f+1)T} & \cdots & y_{(h-1)T} \\ y_{fT+q} & y_{(f+1)T+q} & \cdots & y_{(h-1)T+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{fT+(\ell-1)q} & y_{(f+1)T+(\ell-1)q} & \cdots & y_{(h-1)T+(\ell-1)q} \\ u_{fT} & u_{(f+1)T} & \cdots & u_{(h-1)T} \\ u_{fT+p} & u_{(f+1)T+p} & \cdots & u_{(h-1)T+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{fT+(c_\ell-1)p} & u_{(f+1)T+(c_\ell-1)p} & \cdots & u_{(h-1)T+(c_\ell-1)p} \end{bmatrix}$$

と置く。

このとき、定理 4 より $\bar{D}^F$ の列数を適当にとれば、最終値系列を一致させることができる。すなわち、制御開始時刻から $c_\ell - 2c_{np}$ 個の入力が変数として含まれるように $\bar{D}^F$ の列数を適当な長さにとれば入出力を与えられた最終値系列に一致させることができる。よって、 $h \in \mathbb{N}$ を $(h-1)T + (\ell-1)q \leq iT + (\ell-1)q < hT + (\ell-1)q$ を満たすように選ぶ。このような h の選択は常に可能である。

このとき、 $f \geq c_\ell + n$ であり、時刻 $iT + c_{np}p - (j-1)p$ までの入力が十分に rich であるとき、定理 1 より、ランク条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{D}^P & \bar{D}^F \end{bmatrix} = \text{rank } \bar{D}^P = c_\ell + n$$

が成り立つ。この条件は、等価的に、行列不等式

$$\exists \delta > 0, \quad \delta \bar{D}^P (\bar{D}^P)^T \geq \bar{D}^F (\bar{D}^F)^T$$

として表現することができる⁹⁾。これを制約条件とし、制御仕様を定める目的関数と組み合わせれば、操作入力系列を入出力データから直接求めることのできるアルゴリズムになる。

このように、有限時間最適制御は、行列不等式を制約条件とする最適化

$$\min \bar{J} \quad \text{s.t.} \quad \delta \bar{D}^P (\bar{D}^P)^T \geq \bar{D}^F (\bar{D}^F)^T \quad (20)$$

として定式化することができる。決定変数は $\bar{D}^F$ に含まれる未知の入出力データおよび δ であるので、凸最適化となり、適当な数値計算により解くことができる。

Fig. 1 Input signal

4.2 数値例

この数値例で対象とするのは、

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.13 & -0.071 \\ 0.062 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} -0.16 & -0.18 \end{bmatrix} x_k + 1.42u_k$$

で表わされる次数が $n = 2$ のシステムである。以下ではこのシステムの入出力データが $p = 2$, $q = 3$ で多重周期サンプリングされているとし、制御を行なう。

いま、時刻 261 までに、対象システムにランダムに加えられた入力の時系列 (Fig. 1) とそれにより発生した出力の時系列が与えられたとし、これら多重周期入出力データから、直接、有限時間最適制御のための操作入力を計算してみよう。ここで、最終値系列ベクトルには対象システムの定常状態を選ぶこととし、その出力の目標値を

$$y_{306} = 3.000, y_{309} = 3.000, y_{312} = 3.000, y_{315} = 3.000$$

とする。

まず、多重周期入出力データベクトルの個数を、定理 1 を満たし得るように $\ell = 22$, $c_\ell = 32$ に選び、上述の得られた入出力データを行列 $\bar{H}$ に代入する。いま、時刻 261 までの入出力データが与えられているので、制御開始時刻を $iT + c_{np}p + (j-1)p = 262$ とする。つまり、 $i = 42$, $c_{np} = 5$, $j = 1$ である。このとき $\bar{H}$ の列のうち最初の $c_\ell + n = 34$ 本の列は、既知のデータのみを含み、互いに独立になるので、これを $\bar{D}_P$ とすることができる。すなわち、 $(f-1)T + \ell q \leq 262 < fT + \ell q$ を満たす f は $f = 34$ となる。また、 $(h-1)T + \ell q \leq 315 < hT + \ell q$ を満たす h は $h = 43$ となり、列数が 9 本の $\bar{D}_F$ が構成される。

そこで (19) 式の評価関数 $\bar{J}$ における重み係数をそれぞれ

$$\bar{v}_i = 10 \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{w}_k = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

に選び、入力の目標信号を $u_k^R = u_{(k-1)p}$ (ただし、 $u_0^R = 0$) とし、前章で説明した凸最適化問題を解けば、最適な操作入力系列が得られる。

実際に、凸最適化問題 (20) を解いて得られた操作入力は

$$u_{262} = 1.920, \quad u_{264} = 1.937, \quad u_{266} = 1.942,$$

Fig. 2 Controlled output and reference signal

$$\begin{aligned} u_{268} &= 1.959, & u_{270} &= 1.990, & u_{272} &= 2.007, \\ u_{274} &= 2.036, & u_{276} &= 2.075, & u_{278} &= 2.110, \\ u_{280} &= 2.145, & u_{282} &= 2.180, & u_{284} &= 2.215, \\ u_{286} &= 2.244, & u_{288} &= 2.278, & u_{290} &= 2.309, \\ u_{292} &= 2.340, & u_{294} &= 2.371, & u_{296} &= 2.397, \\ u_{298} &= 2.434, & u_{300} &= 2.476, & u_{302} &= 2.508, \\ u_{304} &= 2.552, & u_{306} &= 2.552, & u_{308} &= 2.552, \\ u_{310} &= 2.552, & u_{312} &= 2.552, & u_{314} &= 2.552 \end{aligned}$$

となった。この操作入力系列を対象システムに加えたときの出力の振る舞いを Fig. 2 に示す。ここで、実線は出力、点線は出力の目標信号、一点鎖線は制御開始時刻である。このように、意図通りの対象システムの定常状態を実現できる。

5. おわりに

本論文では、単一周周期入出力データについて考察されてきた入出力データ空間におけるシステム表現と制御方式^{7),8)}が、入出力データベクトルを適当に定義し直すことにより、多重周期入出力データへも適用可能であることを明らかにした。なお、本文中ではノイズの取り扱いについて議論しなかったが、入出力データ配列表現に適当な重み行列を導入すれば⁹⁾、ノイズを考慮したアルゴリズムへも拡張できる。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP26420416, JP17K06494 により援助を受けた。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) K. Furuta and M. Wongsaisuan: Discrete-time LQG Dynamic Controller Design Using Plant Markov Parameters, *Automatica*, **31**-9, 1317/1324 (1995)
- 2) 河村嘉顕: 入出力データから最適レギュレータを構成する基礎的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **24**-11, 1216/1218 (1988)
- 3) H. Hjalmarsson, M. Gevers, S. Gunnarsson and O. Lequin: Iterative feedback tuning: Theory and applications, *IEEE Control Systems Magazine*, **18**-4, 26/41 (1998)
- 4) M.C. Campi, A. Lecchini and S.M. Savaresi: Virtual reference feedback tuning: A direct method for the design of feedback controllers, *Automatica*, **38**-8, 1337/1346 (2002)
- 5) G. Shi and R.E. Skelton: Markov Data-Based LQG Control, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 551/559 (2000)

- 6) 相馬, 金子, 藤井: 一回の実験データを用いた制御器パラメータチューニングの新しいアプローチ—Fictitious Reference Iterative Tuning の提案, システム制御情報学会論文誌 **11-12**, 528/536 (2004)
- 7) M. Ikeda, Y. Fujisaki and N. Hayashi: A Model-less Algorithm for Tracking Control Based on Input-Output Data, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **47-3**, 1953/1960(2001)
- 8) 藤崎泰正: 入出力データ空間におけるシステム表現と制御方式, 計測と制御, **44-2**, 92/96 (2005)
- 9) Y. Fujisaki and M. Ikeda: Data-Driven Tracking Control Insensitive to Noise, Preprints of the 18th IFAC World Congress, 11435/11440 (2011)
- 10) J. Wang, T. Chen and B. Huang: Multirate Sampled-Data Systems: Computing Fast-Rate Models, *Journal of Process Control*, **14-1**, 79/88 (2004)

=====

[著 者 紹 介]

可 知 怜 也

2016 年大阪大学工学部応用自然科学科卒業 (応用物理学科目)。同年大阪大学大学院情報科学研究科博士前期課程情報数理学専攻に入学し、現在に至る。動作データに基づくシステム制御の数理に関する研究に従事。

藤 崎 泰 正 (正会員)

1988 年神戸大学大学院工学研究科修士課程システム工学専攻修了。同年 (株) 神戸製鋼所電子技術研究所研究員, 91 年神戸大学工学部助手, 96 年同助教授などを経て, 2010 年大阪大学大学院情報科学研究科教授となり, 現在に至る。制御工学の教育と研究に従事。博士 (工学)。2006 年度計測自動制御学会賞論文賞, 2011 年度計測自動制御学会著述賞受賞。システム制御情報学会, IEEE, 日本鉄鋼協会などの会員。

=====