線形力学対称システムの DVDFB 制御入力飽和時の安定条件と そのポリトープ表現

高久雄^{一*}・池田裕^{一**}・木田隆^{一***}

Stability Condition under DVDFB Control Input Saturation for Collocated Second-order Linear System and Its Polytopic Description

Yuichi TAKAKU^{*}, Yuichi IKEDA^{**} and Takashi KIDA^{***}

For a class of symmetric systems that consist of a collocated second-order plant and a static output feedback controller, the internal stability and the robustness of the closed-loop system are known to be guaranteed based only on the non-parametric condition in the absence of any input constraint. This study extends this work and investigates the stability of symmetric systems under input saturation. First, we show a stability condition for the system with saturated input. Then from practical reasons, we represent it with a polytopic stability condition. Finally, numerical simulation results are shown to verify the discussions.

Key Words: input saturation, linear symmetric system, stability

1. はじめに

線形化された力学系のダイナミクスは、一般に 2 階の微分方程式で表現することができる。この方程式は、質量、減衰、剛性などの物理パラメータを係数行列としており、それらは正定対称、半正定対称などの特別な構造と定性的性質をもっている。センサとアクチュエータがコロケーション条件を満たすとき、このような制御対象に対して、正定対称なフィードバックゲイン行列をもつ速度と変位の静的な出力フィードバック制御器を適用すると、線形力学対称システムが構成される。線形力学対称システムについては、閉ループ系の内部安定性やモデル誤差に対するロバスト安定性が物理パラメータ値によらずに保証できることが知られている^{1),2)}。そして、この特性を利用した制御器設計法が多く報告されている^{2)~14)}。しかし、これらの対称性を利用した制御器設計法は入力飽和が生じないことを前提としており、入力が飽和する際の安定

性については明らかでない。実際、対称性を利用した制御器である DVDFB 制御器を適用した技術試験衛星きく 8 号の軌道上での姿勢制御実験においては、制御系が発散することはなかったものの、スラストによって生成された外乱が想定以上に大きくなることでリアクションホイールの入力飽和が生じており、安定性保証の観点では課題が見られるという結果が報告されている¹⁵⁾。この課題に対し、入力飽和が発生した場合でも安定性を保証する DVDFB 制御器を設計するのは困難である。しかしながら、設計した DVDFB 制御器を適用したシステムにおいて入力飽和が発生した際の安定判別を行なうことが可能になれば、想定外の大きい外乱が衛星に作用した場合や、アクチュエータの制御入力レベルが設計値より小さかったなどの運用時に生じる諸問題を、システムがどの程度まで許容でき、漸近安定性が保証できるかの見積もりが可能となり、安全性の向上に有効であると考えられる。そこで本稿では、入力飽和を有する線形力学対称システムの安定性について検討する。はじめに、線形力学対称システムについて述べる。つぎに、入力飽和を含む制御器の定式化を行なったのちポリトープ形式を用いた本システムの安定条件を示す。最後に、単純な力学系と宇宙機の姿勢制御に適用したときの数値シミュレーション結果を示す。

2. 線形力学対称システム

本稿ではつぎのような 2 階の微分方程式で記述される線形時不変システムを制御対象とする。

$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = Lu(t) + Fw(t) \quad (1)$$

* 室蘭工業大学もの創造系領域 室蘭市水元町 27-1

** 湘南工科大学工学部 藤沢市辻堂西海岸 1-1-25

*** 電気通信大学大学院情報理工学研究所 調布市調布ヶ丘 1-5-1

* Department of Mechanical, Aerospace, and Materials Engineering, Muroran Institute of Technology, 27-1 Mizumoto-cho, Muroran

** Department of Mechanical Engineering, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Tsujidonishikaigan, Fujisawa

*** Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu

(Received October 23, 2018)

(Revised January 27, 2019)

ここで, $q \in \mathbb{R}^n$ は変位, $u \in \mathbb{R}^m$ は制御入力, $w \in \mathbb{R}^l$ は外乱である. また, $M, D, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はそれぞれ慣性, 減衰, 剛性を表わす行列であり

$$M = M^T > 0, D = D^T \geq 0, K = K^T \geq 0 \quad (2)$$

という性質をもつ¹⁶⁾. $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は制御入力の作用点と方向を表わす行列であり, $F \in \mathbb{R}^{n \times l}$ は外乱の作用点と方向を表わす行列である. 観測量は, アクチュエータとコロケーションされたセンサから

$$y_d(t) = L^T q(t), y_v(t) = L^T \dot{q}(t) \quad (3)$$

と得られるとする. ただし, $y_d(t), y_v(t) \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれ変位と速度の観測出力である. ここで, 条件

$$\text{rank}[D \ K] = n, \text{rank}[D \ L] = n \quad (4)$$

が成り立つと仮定する. これは, (1), (3)式のシステムが可安定, 可検出であることを意味する¹⁷⁾.

そして, 制御対象を安定化する静的出力フィードバック制御器をつぎのように定義する.

$$u(t) = -C_d y_d(t) - C_v y_v(t) \quad (5)$$

ただし, フィードバックゲイン行列 C_d, C_v はそれぞれ

$$C_d = C_d^T > 0, C_v = C_v^T > 0 \quad (6)$$

を満たすものとする. このとき, (1), (3), (5)式から構成される閉ループ系は

$$M\ddot{q}(t) + D_c\dot{q}(t) + K_c q(t) = Fw(t), \quad (7)$$

$$D_c = D + LC_v L^T, K_c = K + LC_d L^T$$

となる. この式において, $w = 0$ でかつ

$$M = M^T > 0, D_c = D_c^T > 0, K_c = K_c^T > 0 \quad (8)$$

を満たすとき, Kelvin-Tait-Chetaev の定理より, 閉ループ系の漸近安定性は常に保証される¹⁾. ここで, (2), (4), (6)式のもとでは, システムの物理パラメータ値によることなく(8)式は常に満たされる¹⁷⁾. したがって, 対称制御器(5)式はモデル誤差に対するロバスト安定性を容易に保証することができるという優位性をもつ.

3. 入力飽和を考慮した対称制御器の定式化

入力飽和が生じ閉ループ系の線形性が保たれないとき, 安定条件(8)式によって閉ループ系の漸近安定性を保証することはできない. 入力飽和を有するシステムの安定条件を新たに導出するため, 入力飽和を考慮した制御器の定式化をまず行なう. そのために, (5)式から得られる制御入力 $u(t)$ をつぎのように表現する.

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n_u} u_i(t) \quad (9)$$

$$u_i(t) = [0 \ \cdots \ 0 \ u_i(t) \ 0 \ \cdots \ 0]^T$$

そして, アクチュエータの性能を考慮した入力を $u_i^{\text{sat}}(t)$ としてつぎのように定義する¹⁸⁾.

$$u_i^{\text{sat}}(t) = [0 \ \cdots \ 0 \ u_i^{\text{sat}}(t) \ 0 \ \cdots \ 0]^T$$

$$u_i^{\text{sat}}(t) = \begin{cases} u_{\max}, & u_i(t) > u_{\max} \\ u_i(t), & u_{\min} \leq u_i(t) \leq u_{\max} \\ u_{\min}, & u_i(t) < u_{\min} \end{cases} \quad (10)$$

ただし, $u_{\max}, u_{\min}$ はそれぞれアクチュエータが出力可能な入力の最大値と最小値を表わす. すると, $u_i(t)$ と $u_i^{\text{sat}}(t)$ の差 $\Delta u_i(t)$ がつぎのように得られる.

$$\begin{aligned} \Delta u_i(t) &= u_i(t) - u_i^{\text{sat}}(t) \\ &= [0 \ \cdots \ 0 \ u_i(t) - u_i^{\text{sat}}(t) \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ &= [0 \ \cdots \ 0 \ \Delta u_i(t) \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ &= U_i(t)u(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし,

$$U_i(t) = \text{diag} \left\{ 0, \dots, 0, \frac{\Delta u_i(t)}{u_i(t)}, 0, \dots, 0 \right\} \quad (12)$$

であり, $u_i(t) = 0$ のときは $\Delta u_i(t)/u_i(t) = 0$ と定義する. 以上から, 入力飽和を考慮した対称制御器はつぎのように表わされる.

$$\begin{aligned} u_{\text{sat}}(t) &= u(t) - \sum_{i \in S} \Delta u_i(t) \\ &= -C_d y_d(t) - C_v y_v(t) \\ &\quad - \sum_{i \in S} U_i(t) (-C_d y_d(t) - C_v y_v(t)) \\ &= -X(t)C_d y_d(t) - X(t)C_v y_v(t) \\ &= -(Q_d(t) + R_d(t))y_d(t) \\ &\quad - (Q_v(t) + R_v(t))y_v(t) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t)^T = I - \sum_{i \in S} U_i(t) \\ Q_d(t) &= Q_d(t)^T = \frac{1}{2} (X(t)C_d + C_d X(t)) \\ R_d(t) &= -R_d(t)^T = \frac{1}{2} (X(t)C_d - C_d X(t)) \\ Q_v(t) &= Q_v(t)^T = \frac{1}{2} (X(t)C_v + C_v X(t)) \\ R_v(t) &= -R_v(t)^T = \frac{1}{2} (X(t)C_v - C_v X(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

であり, S は飽和している入力の番号の集合である. なお, i 番目の入力が飽和しているときは $u_i(t) \neq 0$ かつ $\Delta u_i(t) \neq 0$ であるため, $U_i(t) \neq O$ である. 一方, 入力飽和していないときは $\Delta u_i(t)/u_i(t) = 0$ となることから, $U_i(t) = O$ である. そして, 入力飽和しているときは $0 < \Delta u_i(t)/u_i(t) < 1$ であるので, 行列 $X(t)$ は $X(t) > 0, \forall t > 0$ を満たす. こ

で, (14)式において

$$Q_d(t) > 0, Q_v(t) > 0 \quad (15)$$

が成り立つと仮定する. (15)式を満たす $X(t), C_d, C_v$ の条件については付録 A で議論する. (1), (3)式に対して(5)式の代わりに(14)式を適用すると閉ループ系は $w = 0$ のとき

$$M\ddot{q}(t) + \hat{D}(t)\dot{q}(t) + \hat{K}(t)q(t) = 0 \quad (16)$$

と表わせる. ただし,

$$\begin{aligned} \hat{D}(t) &= D_e(t) + G_e(t), \hat{K}(t) = K_e(t) + N_e(t) \\ D_e(t) &= D_e(t)^T = D + LQ_v(t)L^T > 0 \\ G_e(t) &= -G_e(t)^T = LR_vL^T \\ K_e(t) &= K_e(t)^T = K + LQ_d(t)L^T > 0 \\ N_e(t) &= -N_e(t)^T = LR_dL^T \end{aligned} \quad (17)$$

である.

4. 入力飽和を考慮した安定条件

(16)式の閉ループシステムに関しては, 以下の定理を示すことができる^{19), 20)}.

《定理 1》 以下の 2 つの条件を満たすスカラー定数 α, β が存在すれば, 閉ループ系(16)式は漸近安定である.

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} K_e(t) + \alpha D_e(t) & \beta M \\ \beta M & M \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(t) & \Lambda_{12}(t) \\ \Lambda_{12}(t)^T & -2D_e(t) + 2\beta M \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(t) &= \dot{K}_e(t) + \alpha \dot{D}_e(t) - 2\beta K_e(t) \\ \Lambda_{12}(t) &= N_e(t) + \alpha D_e(t) - \beta D_e(t) - \beta G_e(t) \end{aligned} \quad (20)$$

である.

(証明) リアプノフ関数として

$$V(q(t), \dot{q}(t), t) = x_q(t)^T \Gamma(t) x_q(t) \quad (21)$$

を考える. その微分を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{V}(q(t), \dot{q}(t), t) &= V_x(t) + x_q(t)^T \dot{\Gamma}(t) x_q(t) \\ &= x_q(t)^T \Lambda(t) x_q(t) \end{aligned} \quad (22)$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} x_q(t) &= [q(t)^T \dot{q}(t)^T]^T \\ V_x(t) &= \dot{x}_q(t)^T \Gamma(t) x_q(t) + x_q(t)^T \Gamma(t) \dot{x}_q(t) \end{aligned} \quad (23)$$

である. したがって, $\Gamma(t) > 0$ かつ $\Lambda(t) < 0$ のとき $V > 0$ かつ $\dot{V} < 0$ となり(16)式は漸近安定となる. $\square$

得られた条件式(18), (19)および(15)式は時間 t の関数であり, そのまま, すべての $t > 0$ においてその成否を確認す

ることは困難である. そこで, ここでは時変行列をポリトープ形式で表現する. $U(t)$ を

$$U(t) = \sum_{i \in S} U_i(t) \quad (24)$$

と定義すると, すべての入力飽和するとき $U(t)$ は m 個のスカラー変数パラメータを対角要素にもつ. したがって, $\Delta u_i(t)/u_i(t)$ の最大値および最小値を利用することによりポリトープ形式でつぎのように表現できる.

$$U(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) U_{pi}, \delta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) = 1 \quad (25)$$

ただし, $\sigma = 2^m$ は端点数を表わす. これより,

$$\begin{aligned} X(t) &= I - \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) U_{pi} = \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) X_i \\ D_e(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) D_{ei}, G_e(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) G_{ei} \\ K_e(t) &= \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) K_{ei}, N_e(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) N_{ei} \end{aligned} \quad (26)$$

を得る. これらより, つぎの定理を得る.

《定理 2》 以下の 2 つの条件を満たすとき, 閉ループ系(16)式は漸近安定である.

$$\Gamma_i > 0 \quad (27)$$

$$\Psi_i \pm \rho_1(\Gamma_1 - \Gamma_{\sigma}) \pm \dots \pm \rho_{\sigma-1}(\Gamma_{\sigma-1} - \Gamma_{\sigma}) < 0 \quad (28)$$

ただし, (28)式左辺の正負符号は正と負のすべての組み合わせを考慮することを意味しており,

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \begin{bmatrix} K_{ei} + \alpha D_{ei} & \beta M \\ \beta M & M \end{bmatrix} \\ \Psi_i &= \begin{bmatrix} -2\beta K_{ei} & \Lambda_{i12} \\ \Lambda_{i12}^T & -2D_{ei} + 2\beta M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Lambda_{i12} = N_{ei} + \alpha D_{ei} - \beta D_{ei} - \beta G_{ei}$$

$$i = 1, 2, \dots, \sigma$$

である. また, ρ_i は

$$|\dot{\delta}_i(t)| \leq \rho_i \quad (30)$$

と $\delta_i(t)$ の変化率 $|\dot{\delta}_i(t)|$ の上界値を表わす.

(証明) (26)式の関係を用いて $\Gamma(t)$ は

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) \Gamma_i \quad (31)$$

と表わせる. また,

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} -2\beta K_e(t) & \Lambda_{12}(t) \\ \Lambda_{12}(t)^T & -2D_e(t) + 2\beta M \end{bmatrix} \quad (32)$$

と定義すると,

$$\Lambda(t) = \Psi(t) + \dot{\Gamma}(t) \quad (33)$$

と書ける．(26)式より $\Psi(t)$ は

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) \Psi_i \quad (34)$$

と表わせる．さらに， $\dot{\Gamma}(t)$ は(31)式より

$$\dot{\Gamma}(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} \dot{\delta}_i(t) \Gamma_i \quad (35)$$

と表わせる．(31)，(33)，(34)，(35)式より，(18)，(19)式の安定条件式のポリトープ形式が

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) \Gamma_i > 0 \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \delta_i(t) \left(\Psi_i + \sum_{j=1}^{\sigma} \dot{\delta}_j(t) \Gamma_j \right) < 0 \quad (37)$$

と求められる．ここで， $\delta_i(t)$ の変化率 $|\dot{\delta}_i(t)|$ が有界で，その上界値が(30)式で与えられると仮定する．このとき， $\delta_i(t) \geq 0$ であるから(36)，(37)式の十分条件が

$$\Gamma_i > 0 \quad (38)$$

$$\Psi_i \pm \rho_1 \Gamma_1 \pm \cdots \pm \rho_{\sigma} \Gamma_{\sigma} < 0 \quad (39)$$

と得られる．さらに，(25)式より

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \dot{\delta}_i(t) = 0 \quad (40)$$

であるから

$$\dot{\delta}_{\sigma}(t) = - \sum_{j=1}^{\sigma-1} \dot{\delta}_j(t) \quad (41)$$

を得る．そして，(30)式より

$$|\dot{\delta}_{\sigma}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\sigma-1} |\dot{\delta}_j(t)| \leq \sum_{j=1}^{\sigma-1} \rho_j \quad (42)$$

が成り立つので，(39)式の十分条件として(28)式が得られる．以上より，(27)，(28)式を満足するときシステム(16)式は漸近安定である．□

ここで，(30)式の仮定は，制御入力の変動率の大きさに制約を与えるもので，制御アクチュエータに過大な性能を要求しないという観点で現実的かつ実用的なものである．したがって，この仮定より得られる十分条件も実用的範囲にとどまるものである．

5. 数値シミュレーション

5.1 バネ-マス-ダンパシステム

数値例として，(1)式の係数行列がつぎのように与えられた力学システムを考える．

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

制御器

$$\begin{aligned} C_d &= \begin{bmatrix} 0.638 & -0.0835 \\ -0.0835 & 0.637 \end{bmatrix} \\ C_v &= \begin{bmatrix} 3.24 & -0.318 \\ -0.318 & 3.74 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

を用い，制御入力の更新間隔を 0.01 sec としたときのインパルス外乱応答のシミュレーションを行なった．外乱 $w(t)$ は 0 sec から 0.01 sec の間 $w(t) = [10 \ 10]^T$ が加わるものとする．変位 $q(t)$ の結果を **Fig. 1**，制御入力の結果を **Fig. 2** に示す．このとき，入力の制約は入力飽和しないときの最大入力 0.4 N の 1/20 という厳しい制約としてつぎのように定めた．

$$u_{\max} = 0.02 \text{ N}, u_{\min} = -0.02 \text{ N} \quad (45)$$

この結果より入力飽和が生じても安定であることが確認できる．また，Fig. 2 より $t_s = 0.01 \text{ sec}$ から $t_f = 7.51 \text{ sec}$ まで飽和していることが確認できる．変位と入力の結果より

$$0 \leq \frac{\Delta u_1(t)}{u_1(t)} \leq 0.913, 0 \leq \frac{\Delta u_2(t)}{u_2(t)} \leq 0.948 \quad (46)$$

を得た．これより， $U(t)$ を

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{i=1}^4 \delta_i(t) U_{pi} \\ U_{p1} &= \begin{bmatrix} 0.913 & 0 \\ 0 & 0.948 \end{bmatrix}, U_{p2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.948 \end{bmatrix} \\ U_{p3} &= \begin{bmatrix} 0.913 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U_{p4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

と表わし， $\alpha = \beta = 0.05$ ， $\rho_1 = \rho_2 = 1$ として(27)，(28)式の行列の固有値計算を行なった．このとき(27)式の最小固有値 0.0289，(28)式の最大固有値 -2.48×10^{-3} となり安定条件を満足した．

5.2 宇宙機モデル

きく 8 号の数値モデル²¹⁾を利用した数値シミュレーション結果を示す．きく 8 号の姿勢運動モデルは太陽電池パドルの角度に依存するが，本シミュレーションでは 45 deg で一定と仮定する．すると，この運動方程式は(1)式の形で表現される．そして，制御器には文献 22) で示されている，外乱抑制性能を最適化する次式のものを用いる．

Fig. 1 Time history of the displacements

Fig. 2 Time history of the control inputs (spring-mass-damper system)

$$C_d = \begin{bmatrix} 9.66 \times 10^1 & -4.31 \times 10^{-4} & 2.51 \times 10^{-2} \\ -4.31 \times 10^{-4} & 9.65 \times 10^1 & -6.55 \times 10^{-4} \\ 2.51 \times 10^{-2} & -6.55 \times 10^{-4} & 9.65 \times 10^1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$C_v = \begin{bmatrix} 1.26 \times 10^3 & -1.48 \times 10^0 & -8.65 \times 10^{-1} \\ -1.48 \times 10^0 & 1.17 \times 10^3 & -1.14 \times 10^0 \\ -8.65 \times 10^{-1} & -1.14 \times 10^0 & 1.27 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

入力制約値はきく8号の最大トルク 0.04 Nm の半分というより厳しい制約として次式のように定め、時刻 $t \in [0 \ 400][\text{sec}]$ の間すべての軸に 0.05 deg の目標姿勢角度を与えるステップ目標値応答のシミュレーションを実施した。

$$u_{\max} = 0.02 \text{ Nm}, u_{\min} = -0.02 \text{ Nm}. \quad (49)$$

姿勢角の時間履歴を Fig. 3, 制御入力履歴を Fig. 4 に示す。入力飽和が4回生じるが安定であることが確認できる。Table 1 に入力飽和の開始時刻と終了時刻を示す。姿勢角と制御入力の結果より

$$0 \leq \frac{\Delta u_1(t)}{u_1(t)} \leq 0.784, 0 \leq \frac{\Delta u_2(t)}{u_2(t)} \leq 0.792 \quad (50)$$

$$0 \leq \frac{\Delta u_3(t)}{u_3(t)} \leq 0.794 \quad (51)$$

Table 1 Time of input saturation

Number of times	start(t_s)[s]	end(t_f)[s]
1st	0	64.8125
2nd	75.0625	191
3rd	211.8125	232.875
4th	239.75	270.125

Fig. 3 Time history of the attitude angles

Fig. 4 Time history of the control inputs (spacecraft model)

を得た。これより、 $U(t)$ を

$$U(t) = \sum_{i=1}^8 \delta_i(t) U_{pi} \quad (52)$$

と表わし、 $\alpha = \beta = 0.001$, $\rho_1 = \rho_2 = 10^{-4}$ として(27), (28)式の行列の固有値計算を行なった。このとき(27)式の最小固有値 0.0489, (28)式の最大固有値 -2.84×10^{-4} となり安定条件を満足した。

6. おわりに

本稿では、入力飽和が生じるときの線形力学対称システムの安定性について検討し、ポリトープ形式を利用した安定条件を示した。そして、数値シミュレーションによって安定条件が満たされたときに入力飽和が生じてシステムが安定となることを確認し、その有用性を示した。本手法を用いるこ

とで、システムを運用する前に入力飽和に対する安定性について検討することが可能になると考えられる。

参考文献

- 1) E.E. Zajac: The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions, *J. Astron. Sci.*, **11**-2, 46/49 (1964)
- 2) J.C. Willems: Realization of System with Internal Passivity and Symmetry Constraints, *J. Franklin Institute*, **301**-6, 605/621 (1976)
- 3) S.M. Joshi: Robust Properties of Collocated Controllers for Flexible Spacecraft, *AIAA J. Guidance and Control*, **9**-1, 85/91 (1986)
- 4) 黒滝, 長塩, 木田: コロケーション条件を満たすジャイロシステムの出力フィードバックによるロバスト安定化と LMI による最適設計, 計測自動制御学会論文集, **48**-10, 952/960 (2013)
- 5) S.M. Joshi: On the Stability of Collocated Controllers in the Presence of Uncertain Nonlinearities and Other Perils, *JPL Publication*, **3**, 83/98 (1985)
- 6) M.J. Balas: Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures, *AIAA J. Guidance and Control*, **2**-3, 252/253 (1979)
- 7) A. Arbel and N.K. Gupta: Robust Colocated Control for Large Flexible Space Structures, *AIAA J. Guidance and Control*, **4**-5, 480/486 (1981)
- 8) Y. Fujisaki, M. Ikeda and K. Miki: Robust Stabilization of Large Space Structures via Displacement Feedback, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **46**-12, 1993/1996 (2001)
- 9) Y. Kobayashi, M. Ikeda and Y. Fujisaki: Stability of Large Space Structures Preserved under Failures of Local Controllers, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **52**-2, 318/322 (2007)
- 10) Y. Bai and K.M. Grigoriadis: H_∞ Collocated Control of Structural Systems: An Analytical Bound Approach, *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics*, **28**-5, 850/855 (2005)
- 11) M. Meisami-Azad, J. Mohammadpour-Velni and K.M. Grigoriadis: Explicit Solutions for Collocated Structural Control with Guaranteed H_2 norm Performance Specifications, *Smart Materials and Structures*, **18**-3, 213/222 (2009)
- 12) T. Nagashio, T. Kida, T. Ohtani and Y. Hamada: Design and Implementation of Robust Symmetric Attitude Controller for ETS-VIII Spacecraft, *Control Engineering Practice*, **18**-12, 1440/1451 (2010)
- 13) K. Igawa and Y. Kobayashi: Decentralized Robust Optimal Control of Large Flexible Space Structures by Fourth Order Local Proper Controllers Using Displacement Output, *Trans. Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan*, **14**-ists30, 95/103 (2016)
- 14) Y. Takaku, T. Nagashio and T. Kida: Static Output Feedback Controller Design for Linear Time-Varying Second-Order System with Space Application, *Proc. SICE Annual Conference 2014*, 2041/2046 (2014)
- 15) T. Nagashio, T. Kida, Y. Hamada and T. Ohtani: Robust Two-Degrees-of-Freedom Attitude Controller Design and Flight Test Result for Engineering Test Satellite-VIII Spacecraft, *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **22**-1, 157/168 (2014)
- 16) P.W. Likins: Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles, *JPL Technical Report*, 32-1239 (1970)
- 17) M. Ikeda, M. Koujitani and T. Kida: Optimality of Direct Velocity and Displacement Feedback for Large Space Structures with Collocated Sensors and Actuators, *12th*

IFAC World Congress, **VI**, 91/94 (1993)

- 18) 佐伯, 和田, 土屋: 飽和時の応答を考慮したアンチwindアップ制御器の設計, 計測自動制御学会論文集, **35**-6, 754/761 (1999)
- 19) R. Okano, T. Kida and T. Nagashio: Asymptotic Stability of Second-Order Linear Time-Varying System, *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics*, **29**-6, 1472/1476 (2006)
- 20) 高久, 木田: 線形時変力学系の LMI を用いた静的出力フィードバック制御の L_2 ゲイン性能最適設計, 計測自動制御学会論文集, **50**-10, 739/745 (2014)
- 21) Y. Hamada, T. Ohtani, T. Kida and T. Nagashio: Synthesis of a linearly interpolated gain scheduling controller for large flexible spacecraft ETS-VIII, *Control Eng. Pract.*, **19**-6, 611/625 (2011)
- 22) 長塩, 木田, 濱田, 大谷: きく 8 号 (ETS-VIII) のロバスト姿勢制御系設計—DVDFB の特徴を活かした二自由度制御系の適用—, 計測自動制御学会論文集, **44**-6, 499/507 (2008)

付 録

A. (15) 式の仮定を満たす行列 $X(t)$, C_d , C_v の条件について

定義より $X(t)$ は対角行列, C_d は正定対称行列であるから $X(t)$, C_d はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} X(t) &= \text{diag} \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \\ 0 < x_i(t) &\leq 1 \\ C_d &= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 1})$$

そして, 行列 $X(t)C_d + C_dX(t)$ の (i, j) 要素および (j, i) 要素は以下になる。

$$\begin{aligned} (X(t)C_d + C_dX(t))_{(i, j)} &= (X(t)C_d + C_dX(t))_{(j, i)} \\ &= (x_i + x_j)c_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = i, i+1, \dots, n$$

C_d が対角行列の場合, $X(t)C_d + C_dX(t)$ も対角行列となり, かつ $0 < x_i(t) \leq 1$, $C_d > 0$ であるから $X(t)C_d + C_dX(t) > 0$ は満たされる。 C_d が対角行列でない場合は, Schur complement を用いて $X(t)C_d + C_dX(t) > 0$ の必要十分条件を求めることができる。たとえば, $n = 2$ の場合 $X(t)C_d + C_dX(t) > 0$ の必要十分条件は以下になる。

$$c_{11}c_{22} - \frac{(x_1(t) + x_2(t))^2}{4x_1(t)x_2(t)}c_{12}^2 > 0 \quad (\text{A. 3})$$

ここで $x_1(t) \leq x_2(t)$, $x_1(t) = \mu x_2(t)$ ($0 < \mu \leq 1$) とおくと, (A.3) 式は次式のようにになる。

$$c_{11}c_{22} - h(\mu)c_{12}^2 > 0, h(\mu) = \frac{(1+\mu)^2}{4\mu} \quad (\text{A. 4})$$

関数 $h(\mu)$ を **Fig. A.1** に示す。この結果から $\mu = x_1(t)/x_2(t)$ が 1 に近いほど, $h(\mu)$ の値が小さくなることがわかる。したがって, $c_{11} \gg c_{12}$, $c_{22} \gg c_{12}$ であり, x_1 と x_2 の値に大

Fig. A.1 Function $h(\mu)$

きな差がなければ (A.3) 式は満たされる。

この考察から、任意の行列サイズ n における、 $X(t)C_d + C_dX(t) > 0$ の必要条件を推測する。1 つめの必要条件はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} c_{ii} >> c_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n, \quad k = j + 1, j + 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

(A.5) 式は C_d の対角要素が非対角要素と比べて十分大きければ $Q_d(t) > 0$ が満たされることを意味する。これは、宇宙機においてはロール・ピッチ・ヨー軸が宇宙機の慣性主軸であるかあるいはそれに近く、各軸をほぼ独立して制御している状況に対応しており、通常の人衛星ではおおむね満たされるものである。2 つめの必要条件は、 $x_i(t)$ の値のばらつきが小さいことである。 $x_i(t)$ の値は、 $\Delta u_i(t) = u_i(t) - u_i^{\text{sat}}$ に依存しており、 $\Delta u_i(t)$ の絶対値が大きいと $x_i(t)$ も大きくなる。 $x_i(t)$ の値のばらつきを抑えるためには、 $|\Delta u_i(t)|$ が小さくなることが望ましいといえる。これは、物理的には、宇宙機に対するミッション要求に対して、リアクションホイールなどの制御アクチュエータの能力が著しく低くはないという状況に対応している。これらの条件は $X(t)C_v + C_vX(t) > 0$ についても同様である。

[著 者 紹 介]

高 久 雄 一 (正会員)

2015 年電気通信大学大学院情報理工学研究科博士後期課程修了。博士 (工学)。同年室蘭工業大学機械航空創造系学科助教 (現職)。日本航空宇宙学会の会員。

池 田 裕 一 (正会員)

2006 年電気通信大学大学院電気通信学研究科博士後期課程修了。博士 (工学)。同年釧路工業高等専門学校助手、2007 年同助教、2009 年信州大学工学部助教、2016 年湘南工科大学講師、現在に至る。システム制御情報学会、日本機械学会、IEEE などの会員。

木 田 隆

1973 年東京大学工学部計数工学科卒業。同年科学技術庁航空宇宙技術研究所 (現・宇宙航空研究開発機構: JAXA) 研究員。96 年電気通信大学機械制御工学科 (現・知能機械工学科) 教授。現在、電気通信大学名誉教授。博士 (工学)。