非局所境界条件に無駄時間を含む 1 階双曲型システムに対するオブザーバ

誤差システムの L^2 -安定性

佐野 英樹*・若生 将史*・丸山 颯天*

Observer for a First-order Hyperbolic System with Time Lag in Nonlocal Boundary Condition
 L^2 -stability of Error System

Hideki SANO*, Masashi WAKAIKI* and Hayate MARUYAMA*

This note is concerned with the problem of designing observers for a first-order hyperbolic system that has a time lag in the nonlocal boundary condition. In our previous work, an infinite-dimensional observer could be constructed for the system by using a backstepping approach, and it was shown that the classical solution of the error system could be finite-time stabilized. In this note, we focus on the L^2 -stability of the error system and prove that the operator describing the error system generates a nilpotent semigroup on the augmented L^2 -space. As a result, the function space to which the initial value of the error system belongs is enlarged.

Key Words: first-order hyperbolic system, time lag, observer, backstepping, semigroup

1. はじめに

本稿では、非局所境界条件に無駄時間を有する 1 階双曲型システムに対するオブザーバ設計にかかわる問題を取り上げる。たとえば、線形化された Kermack-McKendrick モデル¹⁾において潜伏期間を考慮したモデルは、このクラスに含まれる。筆者らによる先の研究²⁾では、誤差システムの古典解の安定性について論じた。しかしながら、誤差システムの初期値がある強い条件を満たしていなければならないという仮定は実際的ではない。そこで本稿では、文献 2) の概要を述べた後に、作用素半群の理論^{3)~5)}を用い、誤差システムの L^2 -安定性について論じる。

なお、文献 6) では局所境界条件のもとで、あるクラスの双曲型システムに対してオブザーバ設計法が与えられたが、筆者らの研究^{2), 7)}とは境界条件および、そこに含まれる無駄時間の有無が異なる。また、入力無駄時間を有する双曲型システムの安定化問題は文献 8) で扱われている。

2. バックステッピング・オブザーバ

領域 $(0, L)$ 上で定義され、非局所境界条件に無駄時間 $\tau > 0$ を含むつぎの 1 階双曲型システムを考えよう。

$$\begin{cases} u_t(t, x) = -u_x(t, x) - \gamma(x)u(t, x) \\ u(t, 0) = \int_0^L \tilde{\beta}(x)u(t - \tau, x)dx \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\gamma \in C[0, L]$, $\tilde{\beta} \in C^1[0, L]$ は非負関数とし、 $\tilde{\beta}$ は $\tilde{\beta}(0) = 0$ を満たしているとする。無駄時間要素は輸送方程式で表わされるので、(1) 式はつぎのカップリングされた双曲

型方程式と等価になる。

$$\begin{cases} u_t(t, x) = -u_x(t, x) - \gamma(x)u(t, x) \\ u(t, 0) = v(t, 0) \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, L] \\ v_t(t, x) = v_x(t, x) \\ v(t, \tau) = \int_0^L \tilde{\beta}(x)u(t, x)dx \\ v(0, x) = v_0(x), \quad x \in [0, \tau] \end{cases} \quad (2)$$

目的は、 $u(t, L)$ のデータのみを用いて $u(t, x)$ ($0 \leq x \leq L$) を推定するオブザーバを構成することである。

(2) 式に対して、つぎの双曲型方程式を考える。

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t, x) = -\hat{u}_x(t, x) - \gamma(x)\hat{u}(t, x) \\ \quad + g(x)\{u(t, L) - \hat{u}(t, L)\} \\ \hat{u}(t, 0) = \hat{v}(t, 0) \\ \hat{u}(0, x) = \hat{u}_0(x), \quad x \in [0, L] \\ \hat{v}_t(t, x) = \hat{v}_x(t, x) \\ \quad + h(x)\{u(t, L) - \hat{u}(t, L)\} \\ \hat{v}(t, \tau) = \int_0^L \tilde{\beta}(x)\hat{u}(t, x)dx \\ \hat{v}(0, x) = \hat{v}_0(x), \quad x \in [0, \tau] \end{cases} \quad (3)$$

変数 $\tilde{u} := u - \hat{u}$, $\tilde{v} := v - \hat{v}$ を導入すると、誤差システム

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(t, x) = -\tilde{u}_x(t, x) - \gamma(x)\tilde{u}(t, x) - g(x)\tilde{u}(t, L) \\ \tilde{u}(t, 0) = \tilde{v}(t, 0) \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in [0, L] \\ \tilde{v}_t(t, x) = \tilde{v}_x(t, x) - h(x)\tilde{u}(t, L) \\ \tilde{v}(t, \tau) = \int_0^L \tilde{\beta}(x)\tilde{u}(t, x)dx \\ \tilde{v}(0, x) = \tilde{v}_0(x), \quad x \in [0, \tau] \end{cases} \quad (4)$$

を得る。ここで、積分変換

$$w(t, x) = \tilde{v}(t, x) - \int_0^L k(x, y)\tilde{u}(t, y)dy \quad (5)$$

* 神戸大学大学院システム情報学研究科 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Graduate School of System Informatics, Kobe University,
1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe

(Received April 26, 2019)

($0 \leq x \leq \tau$, $0 \leq y \leq L$) を用いたバックステッピング法^{9),10)}により, $\tilde{u}(t, x) \rightarrow 0$, $\tilde{v}(t, x) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となるように, (5) 式の積分核 $k(x, y)$ と (4) 式の係数 $g(x)$, $h(x)$ を決定できる. 具体的な手順は以下のとおりである^{2),7)}.

Step 1. つぎの双曲型方程式の解 $k(x, y)$ を求める.

$$\begin{cases} k_x(x, y) = k_y(x, y) - \gamma(y)k(x, y) \\ k(x, 0) = 0 \\ k(\tau, y) = \tilde{\beta}(y) \end{cases}$$

実際, その解は以下のように求まる.

$$k(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq \tau \\ \tilde{\beta}(x + y - \tau) e^{\int_{x+y-\tau}^y \gamma(\xi) d\xi}, & x + y > \tau \end{cases}$$

ここで $\tilde{\beta}(0) = 0$ より, $k \in H^1([0, \tau] \times [0, L])$ となる.

Step 2. Step 1 で得られた k を用い, つぎの双曲型方程式の解 $\tilde{u}$ が時刻 $t \geq L$ でゼロになるように関数 $g(x)$ を決定する. その構成法に関しては文献 2) の第 2 節を参照されたい.

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(t, x) = -\tilde{u}_x(t, x) - \gamma(x)\tilde{u}(t, x) - g(x)\tilde{u}(t, L) \\ \tilde{u}(t, 0) = \int_0^L k(0, y)\tilde{u}(t, y) dy \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{u}_0(x) \end{cases}$$

Step 3. Steps 1~2 で得られた関数 k , g を用いて, つぎの関数 $h(x)$ を計算する.

$$h(x) = k(x, L) + \int_0^L k(x, y)g(y)dy$$

結果として, 以下のシステムが誤差システム (4) のターゲットシステムとなる.

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(t, x) = -\tilde{u}_x(t, x) - \gamma(x)\tilde{u}(t, x) - g(x)\tilde{u}(t, L) \\ \tilde{u}(t, 0) = w(t, 0) + \int_0^L k(0, y)\tilde{u}(t, y) dy \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in [0, L] \\ w_t(t, x) = w_x(t, x) \\ w(t, \tau) = 0 \\ w(0, x) = w_0(x), \quad x \in [0, \tau] \end{cases} \quad (6)$$

ターゲットシステムの古典解は漸近安定であるので, その結果に基づき, 以下の定理を得る²⁾.

《定理 1》 $\gamma \in C[0, L]$, $\tilde{\beta} \in C^1[0, L]$ は非負関数とし, $\tilde{\beta}$ は $\tilde{\beta}(0) = 0$ を満たしているとする. Steps 1~3 に従って設計されたオブザーバゲイン $g(x)$, $h(x)$ を有する誤差システム (4) を考える. $X := L^2(0, L) \times L^2(0, \tau)$, $W := \{(\varphi, \psi) \in H^1(0, L) \times H^1(0, \tau); \psi(\tau) = \int_0^L \tilde{\beta}(y)\varphi(y)dy, \psi(0) = \varphi(0)\}$ とする. このとき, 任意の初期値 $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in W$ に対して, 誤差システム (4) は一意解 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C([0, \infty); W) \cap C^1([0, \infty); X)$ をもち, 時刻 $t \geq L + \tau$ でゼロになる.

(注意 1) 具体的な数値例については文献 2) を参照されたい.

3. 主要結果: 誤差システム (4) の L^2 -安定性

誤差システム (4) を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ をもつヒルベルト空間

$X := L^2(0, L) \times L^2(0, \tau)$ で定式化しよう. ここで, $\langle f, g \rangle_X := \int_0^L f_1(x)\overline{g_1(x)}dx + \int_0^\tau f_2(x)\overline{g_2(x)}dx$, $f = (f_1, f_2) \in X$, $g = (g_1, g_2) \in X$. 作用素 $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B : X \rightarrow X$, $E : D(E) \subset X \rightarrow X$ をつぎのように定義する.

$$A \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi' \\ \psi' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(A) \\ D(A) = W \quad (7)$$

$$B \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma(\cdot)\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in X \quad (8)$$

$$E \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(\cdot)\varphi(L) \\ -h(\cdot)\varphi(L) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(E) \\ D(E) = D(A) \quad (9)$$

ここで, W は定理 1 で導入されたものと同じである. このとき, 誤差システム (4) はつぎのように書ける.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u}(t, \cdot) \\ \tilde{v}(t, \cdot) \end{bmatrix} &= (A + B + E) \begin{bmatrix} \tilde{u}(t, \cdot) \\ \tilde{v}(t, \cdot) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{u}(0, \cdot) \\ \tilde{v}(0, \cdot) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

[補題 1] 作用素 A は X 上で C_0 -半群 e^{tA} を生成する.

(証明) 作用素 A とヒルベルト空間 X の内積の定義から,

$$\begin{aligned} \langle A \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \rangle_X &= \langle \begin{bmatrix} -\varphi' \\ \psi' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \rangle_X \\ &= -\int_0^L \varphi'(x)\overline{\varphi(x)}dx + \int_0^\tau \psi'(x)\overline{\psi(x)}dx \\ &= -|\varphi(L)|^2 + \int_0^L \varphi(x)\overline{\varphi'(x)}dx + |\psi(\tau)|^2 \\ &\quad - \int_0^\tau \psi(x)\overline{\psi'(x)}dx, \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(A) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{\langle A \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \rangle_X} \\ &= -|\varphi(L)|^2 + \int_0^L \overline{\varphi(x)}\varphi'(x)dx + |\psi(\tau)|^2 \\ &\quad - \int_0^\tau \overline{\psi(x)}\psi'(x)dx, \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(A) \end{aligned} \quad (12)$$

を得る. ここで, (11), (12) 式の辺々を加えると

$$2\operatorname{Re} \langle A \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \rangle_X = -|\varphi(L)|^2 + |\psi(\tau)|^2 \quad (13)$$

となるが, 不等式

$$|\psi(\tau)| \leq \|\tilde{\beta}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}, \quad (\varphi, \psi) \in D(A) \quad (14)$$

が成立しているため, 結局

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\langle A \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right\rangle_X \\ & \leq \omega \left\| \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right\|_X^2, \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(A) \end{aligned} \quad (15)$$

を得る. ここで $\omega := \|\tilde{\beta}\|_{L^2}^2/2$. したがって, $A - \omega I$ は消散作用素となる.

つぎに, 十分大きな $\lambda > 0$ に対して, $\operatorname{rg}(\lambda I - A) = X$ となることを示す. はじめに, 関数 $\mu(\lambda)$ を

$$\mu(\lambda) := e^{\lambda\tau} - \int_0^L e^{-\lambda x} \tilde{\beta}(x) dx \quad (16)$$

によって定義すると, $\mu(\lambda) \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow \infty$) が成り立つ. 以降, $\mu(\lambda) > 0$ となるように $\lambda > 0$ を大きく選び, 固定する. ここで, 任意の $(\sigma, \rho) \in X$ に対して

$$(\lambda I - A) \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \rho \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる $(\varphi, \psi) \in D(A)$ が存在することを示す. (17) 式を解くと, φ と ψ は以下のように求まる.

$$\varphi(x) = e^{-\lambda x} \varphi(0) + \int_0^x e^{-\lambda(x-y)} \sigma(y) dy \quad (18)$$

$$\psi(x) = e^{\lambda x} \varphi(0) - \int_0^x e^{\lambda(x-y)} \rho(y) dy \quad (19)$$

ここで

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{1}{\mu(\lambda)} \int_0^\tau e^{\lambda(\tau-y)} \rho(y) dy \\ &+ \frac{1}{\mu(\lambda)} \int_0^L \tilde{\beta}(x) \left(\int_0^x e^{-\lambda(x-y)} \sigma(y) dy \right) dx \end{aligned} \quad (20)$$

したがって, 上述した λ に対して $\operatorname{rg}(\lambda I - A) = X$ が成り立つ. よって, 文献4) の Corollary II.3.20 (Lumer-Phillips の定理) より, $A - \omega I$ が X 上で縮小 C_0 -半群を生成することがわかる. すなわち, A は X 上で C_0 -半群を生成する. $\square$

[補題2] 作用素 $A + E$ は X 上で C_0 -半群 $e^{t(A+E)}$ を生成する.

(証明) 十分大きな λ に対して, $D(A)$ に $\lambda I - A$ に関する1-ノルム

$$\left\| \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right\|_1^A := \left\| (\lambda I - A) \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right\|_X$$

が備わった空間を X_1^A とすると, 作用素 E は X_1^A 上で有界になる. また, 補題1より A は X 上で C_0 -半群を生成することが示されている. したがって, 文献4) の Corollary III.1.5 より, $A + E$ は X 上で C_0 -半群を生成する. $\square$

作用素 B は X 上で有界であることと補題2を用いると, 文献4) の Theorem III.1.3 (半群の有界摂動定理) より, 作用素 $A + B + E$ は X 上で C_0 -半群 $e^{t(A+B+E)}$ を生成することがわかる. したがって, $\tilde{u}_0 \in L^2(0, L)$, $\tilde{v}_0 \in L^2(0, \tau)$ のとき, (10) 式の軟解は

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}(t, \cdot) \\ \tilde{v}(t, \cdot) \end{bmatrix} = e^{t(A+B+E)} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

と表わせる. このとき, つぎの定理を得る.

《定理2》 $\gamma \in C[0, L]$, $\tilde{\beta} \in C^1[0, L]$ は非負関数とし, $\tilde{\beta}$ は $\tilde{\beta}(0) = 0$ を満たしているとする. Steps 1~3 に従って設計されたオブザーバゲイン $g(x)$, $h(x)$ を有する誤差システム (4) を考える. このとき, 任意の初期値 $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in X$ に対し, 誤差システム (4) は一意解 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C([0, \infty); X)$ をもち, 時刻 $t \geq L + \tau$ でゼロになる.

(証明) 初期値 $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ を $D(A+B+E)$ ($= D(A) = W$) から選んだときの結果が定理1であるので, $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in D(A)$ に対して $e^{(L+\tau)(A+B+E)}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = 0$ が成立する. $D(A)$ が X で稠密であること, および $t \geq L + \tau$ において $e^{t(A+B+E)} = e^{(t-L-\tau)(A+B+E)} e^{(L+\tau)(A+B+E)}$ が成り立つことから, 本定理の主張が従う. $\square$

4. ま と め

本稿では, 作用素半群の理論を用いて, 誤差システムの初期値が属する空間を $D(A)$ から L^2 -空間 X に拡張し, 安定性に関する結果を得ることができた. 今後の課題として, 線形化する前のモデルに対するオブザーバ設計問題が残されている.

謝辞 本研究は, 科学研究費補助金 (基盤研究 (C) 課題番号 15K04999, 基盤研究 (S) 課題番号 15H05729) の助成を受けている.

参 考 文 献

- 1) 稲葉 寿 (編著): 感染症の数理モデル, 培風館 (2008)
- 2) H. Sano, M. Wakaiki and H. Maruyama: Backstepping observers for two linearized Kermack-McKendrick models, IFAC-PapersOnLine, **51**-32, 456/461 (2018)
- 3) R.F. Curtain and H.J. Zwart: *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer (1995)
- 4) K.-J. Engel and R. Nagel: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer (2000)
- 5) A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer (1983)
- 6) F. Bribiesca-Argomedo and M. Krstic: Backstepping-forwarding control and observation for hyperbolic PDEs with Fredholm integrals, IEEE Trans. Autom. Contr., **60**-8, 2145/2160 (2015)
- 7) 丸山, 佐野, 若生: 非局所境界条件にむだ時間を含む双曲型システムに対する状態推定, 日本応用数理学会 2018 年年会講演予稿集, 497/498 (2018)
- 8) H. Sano and M. Wakaiki: Boundary stabilization of first-order hyperbolic equations with input delay, Jpn. J. Ind. Appl. Math., **36**-2, 325/355 (2019)
- 9) M. Krstic and A. Smyshlyaev: *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*, SIAM (2008)
- 10) M. Krstic: *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Birkhäuser (2009)