3 次特性方程式と根計算用 ζ - h 線図*

中 津 留 達**

Cubic-form of Characteristic Equation and Its Graphical Solution by Means of ζ - h Nomogram

Toru NAKATSURU

Introduced in this paper are nomograms which can be used for solving third order characteristic equation which is Hurwitz and a study on critical conditions of third order feedback control system.

Characteristic equation of third order constant coefficient differential equation or characteristic equation of third order feedback control system is generally as follows :

$$as^3 + bs^2 + cs + d = 0 \quad \dots\dots (a)$$

where s is parameter of Laplace transform. The equation (a), when each of its coefficients is not equal to zero, can be modified into

$$s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + 2\zeta h \omega_n^3 = 0 \quad \dots\dots (b)$$

By making $\frac{s}{\omega_n} = p$, the following is obtained :

$$p^3 + 2\zeta p^2 + p + 2\zeta h = 0 \quad \dots\dots (c)$$

Three roots of the equation (c)

$$p_1 = x + jy, \quad p_2 = x - jy, \quad p_3 = v \quad \dots\dots (d)$$

have the following relationships :

$$y^2 = 3x^2 + 4\zeta x + 1 \quad \dots\dots (e)$$

$$y^4 + 2x^2 y^2 + x^4 - (1+h)y^2 + (3h-1)x^2 + h = 0 \quad \dots\dots (f)$$

$$v = -2(x + \zeta) \quad \dots\dots (g)$$

$$h = -\frac{v}{2\zeta}(v^2 + 2\zeta v + 1) \quad \dots\dots (h)$$

where x and v are real and y is real or imaginary.

Nomograms for solving the equation (c) can be obtained by means of the graphs of the equations (e), (f) and (h).

1. 3 次系特性方程式

2 次線形自動制御系の特性方程式は、ラプラス変換を用いて、一般につきのように表わされる。

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

この形から出発して、3 次線形自動制御系の特性方程式をつぎのように書く。

$$s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + H = 0 \quad \dots\dots (2)$$

この H は、定数項である。

(2) 式の 3 根の実部が、すべて負である条件、すなわち、(2) 式が Hurwitz の多項式であるためには、

$$\zeta > 0, \quad \omega_n > 0, \quad 2\zeta\omega_n^3 - H > 0 \quad \dots\dots (3)$$

である。このとき、

$$H = 2\zeta h \omega_n^3 \quad \dots\dots (4)$$

とおけば、(2) 式をつぎのように書くことができる。

$$s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + 2\zeta h \omega_n^3 = 0 \quad \dots\dots (5)$$

そして (5) 式が Hurwitz の多項式であるためには、

$$\zeta > 0, \quad \omega_n > 0, \quad 0 < h < 1 \quad \dots\dots (6)$$

なお、(5) 式で $h = 1$ とおけば、

$$(s^2 + \omega_n^2)(s + 2\zeta\omega_n) = 0 \quad \dots\dots (7)$$

(5) 式が 3 重根をもつ条件は、簡単に求められる。

すなわち $(s+a)^3 = 0$ において、

$$s^3 + 3as^2 + 3a^2s + a^3 = 0 \quad \dots\dots (8)$$

(8) 式から、 ζ, ω_n, h を求めると、

* 昭和39年8月11日原稿受付, 10月17日再受付

** 株式会社安川電機製作所

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{3} a \\ \zeta &= \frac{3a}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ h &= \frac{a^3}{3a \times 3a^2} = \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

一般に、(5)式の根を求めるには、古典的な Cardan の方法による以外にはないが、(5)式の形の3次式は、その根と係数の関係を追跡するのにきわめて便利である。

2. 根 軌 跡

いま、(5)式に、

$$s = \omega_n x \pm j\omega_n y, \quad s = u \quad \dots\dots (10)$$

を代入すると、 x, y, u の間には、つぎのような関係があることが簡単に求められる。すなわち、

$$y^2 = 3x^2 + 4\zeta x + 1 \quad \dots\dots (11)$$

$$(x^2 + y^2)(x + \zeta) = \zeta h \quad \dots\dots (12)$$

$$u = -2(x + \zeta)\omega_n \quad \dots\dots (13)$$

一般に、(5)式が Hurwitz の多項式である場合は、 x, u は負の実数であり、 y は実数もしくは虚数である。

(11), (12), (13)式から、(5)式の根と係数の関係を求めることができる。

2.1 ζ 線図

(11)式は、双曲線をあらわす。(11)式から、

$$\zeta > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{のとき}$$

$$y^2 - 3\left(x + \frac{2}{3}\zeta\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{4}{3}\zeta^2}\right)^2 \quad \dots\dots (14)$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{では、}$$

$$y^2 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \dots\dots (15)$$

$$\zeta < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3\left(x + \frac{2}{3}\zeta\right)^2 - y^2 = \left(\sqrt{\frac{4}{3}\zeta^2 - 1}\right)^2 \quad \dots\dots (16)$$

なお、(5)式が Hurwitz の多項式であるためには、つぎの条件を満足しなければならない。

$$x^2 + y^2 < 1, \quad \text{かつ、} \quad x < 0 \quad \dots\dots (17)$$

(5)式において、

$$\omega_n p = s \quad \dots\dots (18)$$

とおけば、つぎの一般式

$$p^3 + 2\zeta p^2 + p + 2\zeta h = 0 \quad \dots\dots (19)$$

を得る。

(19)式は、つぎの根をもつ。

Fig. 1 ζ -loci

Root-loci of equation $p^3 + 2\zeta p^2 + p + 2\zeta h = 0$

where ζ is the parameter and h is changed from zero to unity

$$p = x \pm jy, \quad p = v = \frac{u}{\omega_n} \quad \dots\dots (20)$$

Fig. 1 は、 ζ をパラメータとして、 h を 0 から 1 の範囲で変化させたときの、(19)式の複素根 $x \pm jy$ の根軌跡の状態、および実根 v の変化の模様を示したものである。図に示した $x \pm jy$ の軌跡を、以後 ζ 軌跡と呼ぶことにする。

双曲線 $y^2 = 3x^2 + 4\zeta x + 1$ の頂点の座標は、(14)式、

$$(16)式から、\zeta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{として、}$$

$$x = -\frac{2}{3}\zeta, \quad y = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}\zeta^2} \quad \dots\dots (21)$$

したがって、頂点の軌跡はつぎのだ円となる。

$$y^2 + 3x^2 = 1 \quad \dots\dots (22)$$

2.2 h 線図

(11)式および(12)式から ζ を消去すると、つぎの4次の多項式が求まる。

$$y^4 + 2x^2 y^2 + x^4 - (1+h)y^2 + (3h-1)x^2 + h = 0 \quad \dots\dots (23)$$

この式は、(19)式の一般式 $p^3 + 2\zeta p^2 + p + 2\zeta h = 0$ において、 h をパラメータとして、 ζ を 0 から正の方

Fig. 4 ζ - h chart (II)

Relationship between h and real root v of equation $p^3 + 2\zeta p^2 + p + 2h\zeta = 0$, and $h = -(v/2\zeta)(v^2 + 2\zeta v + 1)$

(19)式の実根 v は, (13)式から

$$v = \frac{u}{\omega_n} = -2(x + \zeta) \quad \dots\dots (28)$$

として計算できるが, (19)式において, $p = v$ とおいたつぎの(29)式による図表を使うこともできる.

$$h = -\frac{v}{2\zeta}(v^2 + 2\zeta v + 1) \quad \dots\dots (29)$$

(29)式において, ζ をパラメータとして h と v との関連を示す図表を描いておけば, ζ, h が与えられたときの, 実根 v の大きさを直ちに求められる.

これが, Fig. 4 の v - h 線図である.

Fig. 3 および Fig. 4 を総称して ζ - h 線図と呼ぶことにする.

3. 3次系の制動条件

2次線形自動制御系の制動条件は, 特性方程式(1)の制動係数 ζ のみによって定められるが, 3次系の制動条件は, 特性方程式(5), もしくは(19)の2個のパラメータ ζ , および h によって決定される.

ここで, 3次系の臨界制動条件および整定時間を最短にするための条件を求める.

3.1 臨界制動条件

特性方程式(5)式 $s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + 2\zeta h\omega_n^3 = 0$ をもつ3次系の臨界制動条件は, (11)式, および(12)式において, $y = 0$ とし, さらに両式から x を消去することによって簡単に求められる. すなわち3次系の臨界制動条件は,

$$h = \frac{1}{9} \left\{ 1 - \frac{1}{3\zeta} (4\zeta^2 - 3) (2\zeta \pm \sqrt{4\zeta^2 - 3}) \right\} \quad \dots (30)$$

これから,

$$4\zeta^2 - 3 < 0$$

$$\text{すなわち, } \zeta < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots (31)$$

では, 臨界制動状態を得ることは不可能であることが了解される. また,

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{では, } h &= \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (32)$$

だけが臨界制動条件をあたえる. このとき, すでに述べたように特性方程式(3)および(19)は3重根をもっており,

$$\left. \begin{aligned} \left(s + \frac{\omega_n}{\sqrt{3}} \right)^2 &= 0 \\ \left(p + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (33)$$

となる.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \zeta < 1 \text{ においては,}$$

$$h_1 = \frac{1}{9} \left\{ 1 - \frac{1}{3\zeta} (4\zeta^2 - 3) (2\zeta + \sqrt{4\zeta^2 - 3}) \right\} \quad \dots\dots (34)$$

$$h_2 = \frac{1}{9} \left\{ 1 - \frac{1}{3\zeta} (4\zeta^2 - 3) (2\zeta - \sqrt{4\zeta^2 - 3}) \right\} \quad \dots\dots (35)$$

とおくとき, 臨界制動条件は,

$$h = h_1, \quad h = h_2 \quad \dots\dots (36)$$

したがって, 過制動条件は $1 > \zeta > \frac{\sqrt{3}}{2}$ において,

$$h_1 < h < h_2 \quad \dots\dots (31)$$

である. $h < h_1$ では, 複素根が存在するから, 厳密には不足制動状態にあるが, 周波数成分 y の値は小さく, かつ実根 v は複素根よりもかなり虚軸寄りに位置しているから, 振動成分はほとんどみとめられず, 実際上は過制動状態にあるとみて差しつかえはない.

一般に不足制動状態にある3次フィードバック制御系では, ζ - h 線図からわかるようにゲインファクタ h の値を小さくすると, 過渡応答時にあらわれる振動分の周波数が高くなる傾向がある.

$\zeta = 1$ では $h_1 = 0$ であるから, 臨界制動条件, および過制動条件は,

$$0 < h \leq \frac{2}{27}, \quad h = \frac{2}{27} \text{ で } x = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots (38)$$

また, $\zeta > 1$ では, $h_1 < 0$ となるから, 臨界制動および過制動範囲は,

$$0 < h \leq h_2 \quad \dots\dots (39)$$

であたえられる.

以上の臨界制動条件は, ζ - h 線図の原式(11), (12)

式から求めたものであるが、 v - h 曲線によって上記の臨界制動条件を再考してみよう。

v - h 曲線は、 $h=0$ で $v=0$ であり、 $h=1$ で $v=-2\zeta$ に到達する。いま、 $h=h_0$ の点で Fig. 5 のように実軸に平行な直線を引き、 v - h 曲線との交点の数を求める。

Fig. 5 Determination of critical damping conditions of third order feedback control system

交点の数が3個ならばそのときの h の値 h_0 で、特性方程式の3根とも実根であり、交点の数が2個であれば、特性方程式は3次であるから、3個の根はいずれも実根であるが、そのうち2個は2重根である。(Fig. 5(a))

したがって、臨界制動条件は、(19) 式 $p^3 + 2\zeta p^2 + p + 2\zeta h = 0$ において $dh/dp=0$ とおくことによって求められる。

すなわち、

$$3p^2 + 4\zeta p + 1 + 2\zeta \frac{dh}{dp} = 0 \quad \dots\dots (40)$$

において $dh/dp=0$ とおけば、

$$p = -\frac{1}{3}(2\zeta \pm \sqrt{4\zeta^2 - 3}), \quad 4\zeta^2 - 3 \geq 0 \quad \dots\dots (41)$$

(41) 式の p の値は、 ζ - h 線図における臨界制動点の x 座標を示す。

また、Fig. 5 の直線 $h=h_0$ と、 v - h 曲線との交点の数が1個の場合は、特性方程式は3重根をもつか、

あるいは、1個の実根と2個の複数根をもつかのいずれかである。(Fig. 5(b))

したがって、特性方程式(13)が3重根をもつ条件は、

$$6p + 4\zeta + 2\zeta \frac{d^2h}{dp^2} = 0, \quad \text{かつ}, \quad \frac{d^2h}{dp^2} = 0 \quad \dots\dots (41)$$

として、

$$\left. \begin{aligned} p &= x = -\frac{2}{3}\zeta \\ (12) \text{式で, } y=0 \quad x &= -\frac{2}{3}\zeta \text{ として } h = \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (42)$$

沼倉⁽²⁾は、特性方程式 $F(s)=0$ をもつ制御系の臨界制動条件は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= 0 \\ F(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (43)$$

および

の両式から、パラメータ s を消去することによって求められる、ことを指適したが、特性方程式 $F(s)=0$ の実根を u とし、特性方程式の定数項を H とするとき、

$$F(u) = g(u) + H = 0 \quad \dots\dots (44)$$

から $H = H(u) = -g(u)$ とみなして臨界制動条件は、

$$\frac{dF(u)}{du} = \frac{d}{du} g(u) + \frac{dH}{du} = 0, \quad \text{および} \quad \frac{dH}{du} = 0 \quad \dots\dots (45)$$

と解釈される。

3.2 整定時間最短の条件

特性方程式(5), $s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + 2\zeta h\omega_n^3 = 0$ をもつフィードバック制御系のインディシャル応答 $f(t)$ は(5)式の根を、 $\omega_n(x \pm jy)$, $\omega_n v$ とおくと、不足制動状態では、一般につぎの形

$$f(t) = A + Be^{\omega_n v t} + Ce^{\omega_n x t} \sin(\omega_n y t + \phi) \quad \dots\dots (46)$$

をもつ。(5)式が Hurwitz の多項式であれば、 v, x は、いずれも負である。また、 $v = -2(x + \zeta)$ 。

特性方程式(5)のパラメータ h を、0 から 1 まで変化させるとき、実根 v は不足制動状態では、 xy 平面上を、Fig. 1に示すように、 $x=0$ の点から x 軸上を左へ進行する。

また、複素根 $\omega_n(x \pm jy)$ の x は、 h を $h=0$ から $h=1$ まで変化させるとき、Fig. 1 の xy 平面上を $x = -\zeta$ から $x=0$ に向かって x 軸上を右方に進行する。両者の一致する点は、 $x=v=-2(x+\zeta)$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{2}{3}\zeta \\ \text{このとき, } h &= h_m = \frac{9-8\zeta^2}{27} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (47)$$

(21)式から、 $x = -\frac{2}{3}\zeta$ の点は、 ζ 曲線 $y^2 = 3x^2 + 4\zeta x$

+1 の y が極値をとることがわかる。

(46)式から、不足制動条件のもとではインディシャル応答 $f(t)$ の整定時間は、 $\omega_n v$ もしくは $\omega_n x$ の v, x のうち、ゼロにもっとも近い値をもつほうで定まることがわかる。

したがって、この場合 $\omega_n v = \omega_n x$ の点、すなわち複素根の実部 x が

$$x = -\frac{2}{3}\zeta, h = h_m$$

のとき、ある与えられた ζ のもとでの最小の整定時間が得られる。

このとき、5%整定時間 t_s は、

$$\omega_n x t_s = \omega_n x t_s = -3$$

とおいて、

$$t_s = \frac{-3}{\omega_n x} = \frac{9}{2\zeta\omega_n}, \text{ ただし, } h = h_m \quad \dots\dots(48)$$

$h = h_m$ の軌跡は、(22)式のだ円

$$y^2 + 3x^2 = 1$$

であるが、この式から $|x|$ が最大となる条件は、

$$y = 0, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ すなわち, } \zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{1}{9} \quad \dots\dots(49)$$

この条件式(49)は、特性方程式(5)が3重根をもつ

条件そのものである。

したがって、特性方程式 $s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + 2\zeta h\omega_n^3 = 0$ をもつ、3次系の整定時間を最小にするには、 ω_n を一定値とするとき、パラメータ ζ, h を、 $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$h = \frac{1}{9}$ になるように、すなわち特性方程式が3重根をもつように、調整すればよい。

このとき、5%整定時間 t_s は、

$$t_s = \frac{3\sqrt{3}}{\omega_n} \quad \dots\dots(50)$$

しかし、実際には、臨界制動状態よりも多少不定制動気味の過渡応答特性をもつように系を調整したほうが応答速さが良いので、一般には、

$$\zeta \doteq 0.8 \sim 0.7 \quad h = h_m \doteq 0.15 \sim 0.3 \quad \dots\dots(51)$$

程度が、良好な結果をあたえと考えられる。

参 考 文 献

- (1) 桑原道義：線形制御理論入門，自動制御技術-5，1962年，p.59
- (2) 沼倉俊郎：自動制御系の過制動域の決定法，計測と制御，1964年2月号，p.115
- (3) James, Nichols, Phillips: Theory of servomechanism, p.152~158, McGraw-Hill