非線形確率フィルタについて*

佐 藤 拓 宋**

Non-linear Stochastic Filters

Takuso SATO

Presented in this paper are non-linear stochastic filters whose non-linear characteristics is changed according to the value of a certain stochastic process (control process) other than the input to the filter. The auto-correlation function of output process is generally expressed in terms of two dimensional probability density functions of input process and control process. Particularly, in the case that both the input and control processes are Gaussian the auto-correlation function of the output process is simply expressed in terms of the auto-correlation coefficients of these processes. Moreover, it is proved that the polarity correlator and random-voltage-method correlator for Gaussian processes are the applications of these non-linear stochastic filters. The non-linear stochastic filters are expected to be of good use in analysis of stochastic processes and other fields.

1. は し が き

本論文においては、非線形特性が制御過程の値によって変化するようなフィルタについて論ずる。

特に入力の変率過程と制御過程が、ともに正規定常過程の場合については、この2つのプロセスの相関係数を用いて、出力のプロセスの相関係数を与える明確な表示を得ている。

さらに、この種のフィルタの応用の1つとして極性相関器についての包括的なとりあつかい方法を示した。

2. 非線形確率フィルタの基本概念

まず最初に、Fig. 1 に示した系について考えてみよう。

この系では、入力プロセス $x(t)$ は $G_i (i=1, 2, \dots, n)$ という非線形要素を通ることにより変形され、その n 個の出力のうちの1つが、スイッチ S により選択されて出力プロセス $z(t)$ とされる。ここで、どの出力を選択するかという確率が、他のプロセス $y(t)$ の値により支配されるとするものであり、このプロセス $y(t)$ を制御プロセスとよぶ。

この系は、Fig. 2 のようにもっと一般化することができる。この場合は、非線形特性が制御プロセス $y(t)$ の

Fig. 1 Non-linear stochastic filter 1

Fig. 2 Non-linear stochastic filter 2

によって変化するものとする。

以後 Fig. 1 や Fig. 2 に示したような系を非線形確率フィルタ (non-linear stochastic filter) とよぶことにする。

* 昭和 39 年 7 月 10 日原稿受付, 10 月 27 日再受付

** 東京工業大学精密工学研究所

3. 出力プロセス $z(t)$ の 相関関数の表現

3.1 一般論

まず、入力プロセス $x(t)$ と制御プロセス $y(t)$ とは、互いに独立であるとして、それらの相関係数をおのおの $\rho_x(\tau)$ と $\rho_y(\tau)$ で示すことにする。

すると出力プロセス $z(t)$ の相関関数 $K_z(\tau)$ は、つぎのような同時確率密度関数 $f(x_1, x_2, \tau)$, $g(y_1, y_2, \tau)$ を用いて表現することができる。すなわち、

$$f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \text{prob.} \{x_1 < x(t) < x_1 + dx_1 \\ \text{and } x_2 < x(t + \tau) < x_2 + dx_2\} \quad \dots\dots (1)$$

$$g(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2 = \text{prob.} \{y_1 < y(t) < y_1 + dy_1 \\ \text{and } y_2 < y(t + \tau) < y_2 + dy_2\} \quad \dots\dots (2)$$

を用いて

$$K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G y_1(x_1) \cdot G y_2(x_2) \\ \times g(y_1, y_2, \tau) \cdot f(x_1, x_2, \tau) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \\ - m_z^2 \quad \dots\dots (3)$$

ここで、 m_z は $z(t)$ の平均値である。

これが、非線形確率フィルタの基本的関係であるが、以下には、同時確率密度関数ではなく 2 つの入力の相

$$f(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-m_x)^2 + (x_2-m_x)^2 - 2\rho_x(\tau) \cdot (x_1-m_x)(x_2-m_x)}{2\sigma_x^2[1-\rho_x^2(\tau)]}\right\} \quad \dots\dots (7)$$

ここで、 σ_x^2 は $x(t)$ の分散であり、 m_x は $x(t)$ の平均値である。同様に、

$$g(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2\sqrt{1-\rho_y^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{(y_1-m_y)^2 + (y_2-m_y)^2 - 2\rho_y(\tau) \cdot (y_1-m_y)(y_2-m_y)}{2\sigma_y^2[1-\rho_y^2(\tau)]}\right\} \quad \dots\dots (8)$$

ここで、 σ_y^2 は $y(t)$ の分散、 m_y は $y(t)$ の平均値である。

さらに、つぎのような ξ_1, ξ_2 と、 θ_1, θ_2 というパラメータを導入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1-m_x}{\sigma_x} &= \xi_1, & \frac{x_2-m_x}{\sigma_x} &= \xi_2 \\ \frac{y_1-m_y}{\sigma_y} &= \theta_1, & \frac{y_2-m_y}{\sigma_y} &= \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (9)$$

$f(x_1, x_2, \tau)$, $g(y_1, y_2, \tau)$ は、H.Cramer の方法⁽⁴⁾を用いて、Hermite 多項式に展開でき、つぎのように表現できる。

$$f(x_1, x_2, \tau) = f(\sigma_x \xi_1 + m_x, \sigma_x \xi_2 + m_x, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho_x^l(\tau)}{l!} \cdot \frac{d^l}{d\xi_1^l} e^{-(\xi_1^2/2)} \cdot \frac{d^l}{d\xi_2^l} e^{-(\xi_2^2/2)} \quad \dots\dots (10)$$

同様に、

$$g(y_1, y_2, \tau) = g(\sigma_y \theta_1 + m_y, \sigma_y \theta_2 + m_y, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_y^m(\tau)}{m!} \cdot \frac{d^m}{d\theta_1^m} e^{-(\theta_1^2/2)} \cdot \frac{d^m}{d\theta_2^m} e^{-(\theta_2^2/2)} \quad \dots\dots (11)$$

したがって $K_z(\tau)$ は、つぎのように書ける。

$$K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} G_{\sigma_y \theta_1 + m_y}(\rho_x \xi_1 + m_x) \cdot G_{\sigma_y \theta_2 + m_y}(\sigma_x \cdot \xi_2 + m_x) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_y^m(\tau)}{m!} \right. \\ \times \frac{d^m}{d\theta_1^m} e^{-(\theta_1^2/2)} \cdot \frac{d^m}{d\theta_2^m} e^{-(\theta_2^2/2)} \left. \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho_x^l(\tau)}{l!} \cdot \frac{d^l}{d\xi_1^l} e^{-(\xi_1^2/2)} \cdot \frac{d^l}{d\xi_2^l} e^{-(\xi_2^2/2)} \right] d\xi_1 d\xi_2 d\theta_1 d\theta_2 - m_z^2 \\ = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho_x^l(\tau) \cdot \rho_y^m(\tau)}{m! l!} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^l}{d\xi_1^l} e^{-(\xi_1^2/2)} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_{\sigma_y \theta_1 + m_y}(\sigma_x \xi_1 + m_x) \cdot \frac{d^m}{d\theta_1^m} e^{-(\theta_1^2/2)} d\theta_1 \right) \right. \\ \times d\xi_1 \left. \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^l}{d\xi_2^l} e^{-(\xi_2^2/2)} \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_y \theta_2 + m_y}(\sigma_x \xi_2 + m_x) \cdot \frac{d^m}{d\theta_2^m} e^{-(\theta_2^2/2)} d\theta_2 \right) d\xi_2 \right\} - m_z^2 \quad \dots\dots (12)$$

関数を使つての $K_z(\tau)$ の表現を考えてみる。

3.2 $g(y_1, y_2, \tau)$ が $g(y_1, y_2, \tau) = g_1(y_1) \cdot g_1(y_2)$ と表現できる場合

これはかなり特殊であるが、この場合 (3) 式は、つぎのような簡単な形になる。

$$K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G y_1(x_1) \cdot g_1(y_1) dy_1 \right] \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} G y_2(x_2) \cdot g_1(y_2) dy_2 \right] \cdot f(x_1, x_2, \tau) \\ \times dx_1 dx_2 - m_z^2 \quad \dots\dots (4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1) \cdot h(x_2) \cdot f(x_1, x_2, \tau) \\ \times dx_1 dx_2 - m_z^2 \quad \dots\dots (5)$$

ここで、

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G y(x) \cdot g_1(y) dy \quad \dots\dots (6)$$

この種のフィルタの応用については、のちほどのべる。

3.3 プロセス $x(t)$, プロセス $y(t)$ とともに正規定 常過程の場合

この場合は、同時確率密度分布は相関係数を用いて、つぎのように表現できる⁽¹⁾。

$$\therefore K_z(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l,m}^2 \frac{\rho_x^l(\tau) \cdot \rho_y^m(\tau)}{m!l!} - m_z^2 \quad \dots\dots (13)$$

ここで、

$$a_{l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d_l}{d\xi_l} e^{-\langle \xi^2/2 \rangle} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(G_{\sigma_y \theta + m_y}(\sigma_x \cdot \xi + m_x) \cdot \frac{d_m}{d\theta^m} e^{-\langle \theta^2/2 \rangle} d\theta \right) d\xi \quad \dots\dots (14)$$

$$(l, m=0, 1, 2, \dots\dots)$$

ところで、 $l=m=0$ に対しては、

$$a_{0,0} = m_z \quad \dots\dots (15)$$

なることがわかるので、 $K_z(\tau)$ は、けっきょくつぎのように示される。

$$K_z(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{l,m}^2}{l!m!} \rho_x^l(\tau) \cdot \rho_y^m(\tau) \quad \dots\dots (16)$$

($l=m=0$ は除外する)

かくして、出力プロセス $z(t)$ の相関関数を入力プロセス $x(t)$ の相関係数 $\rho_x(\tau)$ と、制御プロセス $y(t)$ の相関係数 $\rho_y(\tau)$ を用いて表現することができた。

4. 出力が +1 または -1 のみを取るような非線形確率フィルタの諸効果について

本節においては、非線形確率フィルタの一例として、その非線形特性が **Fig. 3** に示されたようなものを見てみる。このフィルタは、出力の値として +1 か -1 のみをとるものであり、この種の変換は、プロセスの相関係数の計算において、 $z(t)$ と $z(t+\tau)$ の掛け算が単に論理的 AND の演算で済むことより、その応用が種々考えられるものである。

Fig. 3 Sign type non-linear stochastic filter

もちろん、 $z(t)$ の相関をとってそれから入力 $x(t)$ の相関係数を推定するには、それらの間に明確な関係がなくてはならず、しかもその関係はなるべく簡単なものが要求される。

ここでは、前節までの考察をもとにして、種々の場合についてこれらの関係式を導いてみる。

4.1 $y(t)=0$ で、入力プロセス $x(t)$ が正規定常過程の場合

これはよく知られているように、プロセス $x(t)$ のその極性への変換であり、極性相関器などに用いられている。ただし、 $x(t)$ の平均値は 0 とする。

この場合、方程式(16)はつぎのように簡単化される。

$$K_z(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^2 \cdot \rho_x^l(\tau) \quad \dots\dots (17)$$

ここで、

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l!} \left[(-1) \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{d^l}{d\xi^l} e^{-\langle \xi^2/2 \rangle} d\xi + (+1) \cdot \int_0^{\infty} \frac{d^l}{d\xi^l} e^{-\langle \xi^2/2 \rangle} d\xi \right] \quad \dots\dots (18)$$

($l=1, 2, \dots\dots$)

ここで、 $a_{2l}=0$ ($l=1, 2, \dots\dots$) であるから、

$$K_z(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l-1}^2 \cdot \rho_x^{2l-1}(\tau) \quad \dots\dots (19)$$

a_{2l-1} は、つぎのように求まる。

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^0 (-\xi) e^{-\langle \xi^2/2 \rangle} d\xi + \int_0^{\infty} (-\xi) e^{-\langle \xi^2/2 \rangle} d\xi \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-2 \int_0^{\infty} \xi e^{-\langle \xi^2/2 \rangle} d\xi \right)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2 \times 1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \dots\dots (20)$$

$$a_2 = 0 \quad \dots\dots (21)$$

$$a_3 = -\sqrt{\frac{1}{3\pi}} \quad \dots\dots (22)$$

$$\vdots$$

$$a_{2l+1} = -\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2l \cdot (2l+1)}} \quad \dots\dots (23)$$

したがって $K_z(\tau)$ は、つぎのように示せる。

$$K_z(\tau) = \frac{2}{\pi} \rho_x(\tau) + \frac{1}{3\pi} \rho_x^3(\tau) + \dots\dots (24)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \rho_x(\tau) \quad \dots\dots (24)$$

$$\therefore \rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} K_z(\tau) \quad \dots\dots (25)$$

または、 $\rho_z(\tau)$ を用いて、近似的に、

$$\rho_x(\tau) \doteq \frac{\frac{7}{6} \rho_z(\tau)}{1 + \frac{1}{6} \rho_z^2(\tau)} \quad \dots\dots (26)$$

このようにして、極性に変換されたプロセス $z(t)$ の相関から入力 $x(t)$ の相関係数を推定することができる。このことは、極性相関器として今までに知られ

ている事実と一致している。

4.2 $g(y_1, y_2, \tau)$ が $g(y_1, y_2, \tau) = g_1(y_1) \times g_2(y_2)$

と示せる場合で、特に

$$\left. \begin{aligned} g_1(y) &= 1 \quad (-1/2 \leq y \leq 1/2) \\ &= 0 \quad (|y| > 1/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

のとき

この節の論議を簡単にするために、入力プロセス ρ

$$\begin{aligned} K_z(\tau) &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-1/2}^{1/2} (-1) \cdot dy_1 + \int_{-1/2}^{1/2} (+1) dy_1 \right] \left[\int_{-1/2}^{1/2} (-1) dy_2 + \int_{-1/2}^{1/2} (+1) dy_2 \right] \cdot f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} (2x_1) \cdot (2x_2) \cdot f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = 4 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} x_1 \cdot x_2 \cdot f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = 4 \cdot \rho_x(\tau) \quad \dots\dots (29) \end{aligned}$$

したがってこの場合は、変換されたプロセス $z(t)$ の相関係数と入力のプロセス $x(t)$ の相関係数は、厳密に一致することがわかる。

したがって、 $y(t)$ として一様に分布した乱数電圧を用いると極性相関形のきわめて簡単な、しかも完全な相関器を作ることができる。このことについては筆者らがすでに文献(2)、(3)でくわしく論じている。

$$a_{l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^l}{d\xi^l} e^{-(\xi^2/2)} \right) \left(\int_{-\infty}^{-\sigma_x/\sigma_y \cdot \xi} (-1) \frac{d^m}{d\theta^m} \cdot e^{-\theta^2/2} d\theta + \int_{-\sigma_x/\sigma_y \cdot \xi}^{\infty} (+1) \cdot \frac{d^m}{d\theta^m} e^{-(\theta^2/2)} d\theta \right) d\xi - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \xi \quad \dots (30)$$

($l, m = 0, 1, 2, \dots$)

これを用いて、

$$K_z(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{l,m}^2}{l!m!} \cdot \rho_x^l(\tau) \cdot \rho_y^m(\tau) \quad (l=m=0 \text{ は除外する}) \quad \dots\dots (31)$$

これは見方を変えると、2つの独立な正規定常過程 $x(t)$ と $y(t)$ を加えたプロセスを、その極性に変換することによりできるプロセス $z(t)$ の統計的性質を相関係数を使って表現したものであり、特に2つの入力の相関係数を用いて出力の相関関数が表現されているという特長がある。

このような形の変換には、かなりしばしば出会うものであり、多くの応用が期待される。

5. む す び

本論文においては、非線形確率フィルタを提案し、相関係数を用いてその統計的性質を解明した。

そに、その一例として極性に変換されるようなフィルタについて包括的な検討を加えた。その結果、極性相関器、乱数電圧法による相関器、2つの正規定常過程の和の極性変換したプロセスの性質などを明らかにすることができた。

さらに、もっと一般化した非線形確率フィルタなど

$x(t)$ の振幅は、 $+1/2$ と $-1/2$ の間にあり、その平均値は0であると仮定しよう。

すると、この場合 $G_y(x)$ は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_y(x) &= 1 \quad \text{もし } x > -y \\ &= -1 \quad \text{もし } x < -y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (28)$$

したがって方程式(4)は、つぎのように簡単化さ

れる。

したが、非線形確率フィルタの一例として、このようにすっきりと説明することができる。

4.3 入力プロセス $x(t)$ と制御プロセス $y(t)$ がともに正規定常過程の場合

もちろん(28)式の関係はみたまわっている。また、 $m_x = m_y = 0$ と仮定する。式(14)(16)を直接適用することができて、つぎのような関係をうる。

を考えて、確率過程の解析などに応用したいと考えている。

プロセス $y(t)$ を出力プロセス $z(t)$ でおきかえることにより、マルコフ過程が発生できることについては文献(5)に示している。これらの拡張についても考えてみたい。

最後に、ご助言、ご検討いただいた東京工業大学助教授 池辺潤 氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) П. Д. Крутько: Статистическая Динамика импульсных систем. Издательство "Советское Радио" 1963—Москва, Стр. 353—358.
- (2) 佐藤拓宋: "乱数電圧法による自己相関器" 自動制御, Vol. 7, No. 2 (1960)
- (3) 佐藤拓宋: "乱数電圧法による相関器に関する 2, 3 の考察" 自動制御, Vol. 3, No. 2 (1964)
- (4) H. Cramér: Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press. (1945) p. 133
- (5) T. Sato: On an analyzer of diffusion problems, Bull. of Tokyo Institute of Technology 1964, to be printed.