乱数電圧法による 相関器に関する二、三の考察*

佐藤 拓 宋**・河原田 弘***

Some Notes on the Correlator Using Random Voltage Method

Takuso SATO and Hiroshi KAWARADA

In the preceding paper a new correlator using random-voltage-method was proposed. In this paper the generalized random-voltage-method, in which noise having any density distribution other than uniform distribution is used as the random voltage, is presented and examined. Then a new method of generating the excellent random voltage with uniform density distribution is proposed. Finally, three kinds of errors in the measurement of the correlation function using the random voltage method are analyzed and estimated. This estimation of errors gives the necessary conditions in the measurement of the correlation function of given time series.

1. は し が き

筆者は、さきに乱数電圧法による新しい相関器を発表したが⁽¹⁾、本文では乱数電圧法を拡張し、任意の振幅密度分布をもったノイズを乱数電圧として用いる場合を考察した。乱数電圧の振幅密度分布が方形分布と異なる場合の一例として台形分布の場合、相関々数測定にはいる誤差を評価した。

つぎに方形振幅密度分布をもった乱数電圧の新しい発生方法を考案した。

最後に方形振幅密度分布をもつノイズを乱数電圧として用いる場合、相関々数測定にはいる誤差を3種に分けてそれぞれ評価した。これらの評価により相関々数の測定条件が具体的に求められた。

2. 乱数電圧法の一般化

2.1 相関々数測定の原理

時間関数 $f(t)$ と $g(t)$ の間の相互相関々数を求める場合を考える。2つのそれぞれ独立な乱数電圧（時刻 t_i , $i=1, 2, 3, \dots$ で発生）を $r(t_i)$, $s(t_i)$ とし、それらの振幅密度分布を、それぞれ $i(x)$, $j(x)$ とする。時刻 t_i ($i=1, 2, \dots$, 時間々隔 Δt) で $f(t_i)$ と

$r(t_i)$, $g(t_i)$ と $s(t_i)$ をそれぞれ比較し、(1) および (2) 式の規約にしたがってランダムパルス列 f_i と g_i を発生させる (Fig. 1)。

Fig 1 Generation of f_i and g_i using noise $r(t)$ and $s(t)$

$$\left. \begin{array}{l} f(t_i) > r(t_i) \text{ のとき } f_i = 1 \\ f(t_i) \leq r(t_i) \text{ のとき } f_i = -1 \end{array} \right\} \dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(t_i) > s(t_i) \text{ のとき } g_i = 1 \\ g(t_i) \leq s(t_i) \text{ のとき } g_i = -1 \end{array} \right\} \dots\dots (2)$$

* 昭和39年7月13日原稿受付

** 東京工業大学精密工学研究所

*** 東京工業大学大学院

f_i, g_i はつぎの性質をもつパルス列である.

$$\left. \begin{aligned} \text{Prob.}[f_i=1] &= \int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx \\ \text{Prob.}[f_i=-1] &= \int_{f(t_i)}^{\infty} i(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3)$$

同様に,

$$\left. \begin{aligned} \text{Prob.}[g_i=1] &= \int_{-\infty}^{g(t_i)} j(x) dx \\ \text{Prob.}[g_i=-1] &= \int_{g(t_i)}^{\infty} j(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{g(t_i)} j(x) dx \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

したがって,

$$\text{Prob.}[f_i \cdot g_{i+k}=1] = \left[\int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{g(t_{i+k})} j(x) dx \right] + \left[\int_{f(t_i)}^{\infty} i(x) dx \right] \cdot \left[\int_{g(t_{i+k})}^{\infty} j(x) dx \right], \quad (k: \text{整数}) \dots\dots (5)$$

$$\text{Prob.}[f_i \cdot g_{i+k}=-1] = 1 - \text{Prob.}[f_i \cdot g_{i+k}=1] \quad \dots\dots (6)$$

いま, $r(t_i)$ および $s(t_i)$ は時刻 $t_i (i=1, 2, \dots)$ で, それぞれ独立であるとするとき N 回のサンプリングによる $\sum_{i=1}^N f_i \cdot g_{i+k}$ の平均値 $E_N[f_i \cdot g_{i+k}]$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} E_N[f_i \cdot g_{i+k}] &= \sum_{i=1}^N \left[2 \left\{ \left(\int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{g(t_{i+k})} j(x) dx \right) + \left(1 - \int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx \right) \cdot \left(1 - \int_{-\infty}^{g(t_{i+k})} j(x) dx \right) \right\} - 1 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[2 \left\{ 2 \left(\int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{g(t_{i+k})} j(x) dx \right) - \int_{-\infty}^{f(t_i)} i(x) dx - \int_{-\infty}^{g(t_{i+k})} j(x) dx \right\} + 1 \right] \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

(7) 式が乱数電圧法によって相関々数を求める場合の一般式である.

つぎに 2 つの特別な場合を考えてみよう.

2.2 2 つの相関器

2.2.1 理想的な相関器 $|f(t)| \leq 1/2, |g(t)| \leq 1/2$ とし, $r(t_i), s(t_i)$ はそれぞれ一様振幅密度分布 $i(x), j(x)$ をもっているものとする (Fig. 2) この場合には (7) 式は,

$$\begin{aligned} E_N[f_i \cdot g_{i+k}] &= \sum_{i=1}^N \left[2 \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} + f(t_i) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + g(t_{i+k}) \right) - \left(\frac{1}{2} + f(t_i) \right) - \left(\frac{1}{2} + g(t_{i+k}) \right) \right\} + 1 \right] \\ &= 4 \sum_{i=1}^N f(t_i) \cdot g(t_{i+k}) \quad \dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{4N} E_N[f_i \cdot g_{i+k}] = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^N f(t_i) \cdot g(t_{i+k}) \cdot \Delta t \cong \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t+k \Delta t) dt \quad (T=N \Delta t) \quad \dots\dots (9)$$

Fig. 2 Density distribution $i(x)$ and $j(x)$

$E_N[f_i \cdot g_{i+k}]$ の値は, デジタルカウンタを用いて計数できるから, (9) 式を用いて簡単に相関々数を測定することができる.

2.2.2 乱数電圧が台形振幅密度分布をもつ場合

$r(t_i), s(t_i)$ の振幅密度分布が一様分布でない場合, 期待値 $E_N[f_i \cdot g_{i+k}]$ から相関々数を求めようとするとき誤差ははいつてくる. 一例として密度分布 $i(x), j(x)$ が Fig. 3 に示すような台形である場合には,

(9) 式のように相関々数として $\frac{1}{4N} E_N[f_i \cdot g_{i+k}]$ を

Fig. 3 Density distribution $i(x)$ and $j(x)$

とすると, このときの誤差 ε はいくらかの計算により,

$$\varepsilon \leq \frac{|\delta|}{8} \left[\overline{f(t)} + \overline{g(t)} + \frac{|\delta|}{8} \right] \quad \dots\dots (10)$$

となる⁽²⁾. ここに $\overline{f(t)}, \overline{g(t)}$ は, それぞれ $f(t), g(t)$ の平均値である. もし $f(t)$ および $g(t)$ の平均値が 0 ならば (10) 式から誤差は $\delta^2/64$ より小さくなることがわかる.

3. 一様振幅密度分布をもつ

乱数電圧の発生

前節の結果から相関々数の測定には、一様密度分布をもった乱数電圧を高速度で発生させることが必要である。ここでは、このような一様乱数をつくる2種の方法を述べる。

3.1 関数発生器による方法

密度分布 $h_2(y)$ をもつノイズを密度分布 $h_1(x)$ のノイズから作るには、つぎの形の関数発生器があればよい。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_1(x)}{h_2(y)} \quad \dots\dots (11)$$

いま、 $h_1(x)$ をガウス分布、 $h_2(y)$ を一様分布とすると関数発生器の形は、つぎようになる。

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\xi^2/2\sigma^2)} d\xi \quad \dots\dots (12)$$

ただし、

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \quad \dots\dots (13)$$

$$h_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : |y| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & : |y| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

こうして作られたノイズを乱数電圧として用いるためには、

(1) ノイズのパワースペクトルは、じゅうぶん高い周波数領域まで一様に分布していなければならない。

(2) ノイズの平均値を一定に保たなければならない。

(2) の条件は、ノイズの発生器にフィードバック回路を設けることにより満足させることができる。

(1) の条件については、つぎのように考察できる。ノイズ $x(t)$ の自己相関係数 $\rho_x(\tau)$ と、 $x(t)$ を関数発生器 $y=g(x)$ に通して得られるノイズ $y(t)$ の自己相関係数 $\rho_y(\tau)$ との間には、つぎの関係がある⁽⁴⁾。関係式 (14) を用いて $y(t)$

$$\left. \begin{aligned} \rho_y(\tau) &= \sum_{l=1}^{\infty} a_l^2 \cdot \rho_x^l(\tau) \\ a_l &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}l!} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma \cdot \xi) \cdot \frac{d^l}{d\xi^l} e^{-(\xi^2/2)} \cdot d\xi \\ g(\sigma \cdot \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{a\xi} e^{-(x^2/2\sigma^2)} dx \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$R(m\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a \sin(n\omega\Delta t + \varphi) \cdot a \sin\{(m+n)\omega\Delta t + \varphi\} = \frac{a^2}{2} \cos m\omega\Delta t + E_r \quad \dots\dots (16)$$

ただし、

$$E_r = -\frac{a^2}{2N} \cos\{(m+N+1)\omega\Delta t + 2\varphi\} \cdot \frac{\sin N\omega\Delta t}{\sin \omega\Delta t} \quad \dots\dots (17)$$

のパワースペクトルを求めることができる。

3.2 2進乱数を用いる方法

互いに独立な m 個の2進乱数 $B_1, B_2, \dots, B_m$ を (15) 式のように重みをもたせて加え合わせると、一様密度分布をもつノイズ $y(t)$ をつくることができる。ここでは、2進乱数の作り方を述べる。

$$y = \frac{1}{2^{m+2}} [2^1 B_1 + 2^2 B_2 + \dots + 2^m B_m] \quad \dots\dots (15)$$

$$(B_i = +1 \text{ または } -1)$$

現在利用されている方法としては、

(1) サイラトロンノイズから作ったランダムパルスでフリップフロップをトリガする。

(2) Psuedo ランダムノイズを発生する。

という2つがあるが、(1) の方法では高速度の2進乱数発生が困難であり、(2) の方法では2進乱数が周期的になるという欠点がある。そこで、この2つの方法を組み合わせれば、高速度・良質の2進乱数が発生できると思われる。この原理は Psuedo ランダムノイズを発生させておき、これをノイズから作った2進乱数で周期的に乱すものである。もちろん乱す周期は Psuedo ランダムノイズの周期より短くする。この装置を Fig. 4 に示す。

Fig. 4 Psuedo random noise method

4. 相関々数の測定における誤差の評価

測定誤差としてはサンプリングによるもの、有限な測定時間によるもの、一様乱数電圧の量子化によるものの3種が考えられる。これら3種の誤差を評価する。

4.1 サンプリングによる誤差

サンプリングの周期を Δt 、数 N とする。ここでは、 $N\Delta t$ は一定であると仮定する。この仮定は筆者らが考案したエンドレス磁気テープを利用する相関器の場合には必要なものである。一例として $a \sin(\omega t + \varphi)$ の自己相関々数 $R(m\Delta t)$ を計算してみる。

誤差 $|E_r|$ の最大値 E は (17) 式から

$$E = \text{Max}_{\omega} |E_r| = \frac{a^2}{2N} \cdot \left| \frac{\sin N\omega\Delta t}{\sin \omega\Delta t} \right| \quad \dots\dots (18)$$

Fig. 5 Shape of the curve of E/a^2

E/a^2 の形を Fig. 5 に示す*. $\omega\Delta t \ll 1$ ではグラフ

の極大点の高さは、それぞれ $\frac{2}{3\pi}$, $\frac{2}{5\pi}$, $\frac{2}{7\pi}$, ..., $\frac{2}{(2i+1)\pi}$, にほぼ等しい。したがって $\omega\Delta t < \pi$ のとき、 $E < 0.01$ とするためには $2/(2i+1)\pi < 0.01$, すなわち $i \geq 40$ にしなければならない。またグラフの対称性から ω に対する条件として (19) 式が得られる。

$$\frac{40}{N} < \omega\Delta t < \pi - \frac{40}{N} \quad \dots\dots (19)$$

たとえば、 $\Delta t = 1 \text{ ms}$, $N = 5000$ とすると、

$$1.3 \text{ c/s} < \frac{\omega}{2\pi} < 498.7 \text{ c/s} \quad \dots\dots (20)$$

(19) 式からわかるように、高い周波数成分を含む信号の相関々数を測定したいときには、 $N\Delta t$ を一定に保ちながら N を大きくすればよい。また、誤差 E を小さくするには N を大きくすればよい。

4.2 有限の測定時間による誤差

時間関数 $f(t)$ ($|f(t)| \leq \frac{1}{2}$) の振幅密度分布を $p(x)$,

2次の密度分布 $\text{Prob.}[x \leq f(t_i) < x+dx \cap y \leq f(t_i+\tau) < y+dy] = P_{\tau}(x, y) dx dy$ なる P_{τ} を考える。ここでは $f(t)$ の自己相関々数を取り扱う。簡単な計算により、 $\tau = k\Delta t$ とおき、 $f(t_i)f_i$, $f(t_i+\tau) = f(t_i+k\Delta t) = f_{i+k}$ とすれば、

$$E(f_i \cdot f_{i+k}) = 4 \iint xy P_{\tau}(x, y) dx dy = 4 R(\tau) \quad \dots\dots (21)$$

$$\text{Variance}[f_i \cdot f_{i+k}] = 1 - 16 R^2(\tau) \quad \dots\dots (22)$$

中心極限定理によると、

* ここでは $N\Delta t$ はエンドレス磁気テープの長さに比例し、一定である。 $\Delta t \rightarrow 0$ とすることはテープ速度を上げることと相当するから測定時間 $\rightarrow$ 小となり測定誤差は大きくなる。

$$\frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot f_{i+k} - N \cdot 4 R(\tau)}{\sqrt{\{1 - 16 R^2(\tau)\} N}} = \frac{\frac{1}{4N} \sum_{i=1}^N f_i \cdot f_{i+k} - R(\tau)}{\sqrt{\frac{1}{N} \left(\frac{1}{16} - R^2(\tau) \right)}} \quad \dots\dots (23)$$

の値の分布は、 $N \rightarrow$ 大のとき平均値 0, 分散 1 の正規分布に近づく、ゆえに測定値 $\frac{1}{4N} \sum_{i=1}^N f_i \cdot f_{i+k}$ の標準偏差 σ は、(23) 式から、

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\frac{1}{16} - R^2(\tau) \right)} \leq \frac{1}{4\sqrt{N}} \quad \dots\dots (24)$$

となる。(24) 式から σ を $1/4(\text{Max } R(0))$ の 1% 程度にするには $N \geq 10000$ とすればよい。すなわち、 N を 10000 程度に選べば測定値の誤差が $1/4$ の 1% 以内におさまる確率は 68%, $1/4$ の 2% 以内におさまる確率は 95% となる。

4.3 $r(t)$ と $s(t)$ の量子化による誤差

$r(t)$ および $s(t)$ の量子化は、 $f(t)$ および $g(t)$ の量子化に等価であるから、ここでは $f(t)$ と $g(t)$ の振幅を幅 q で量子化する場合を考える。 $f(t)$, $g(t)$ が定常過程のときは量子化誤差を ε とすると、

$$\text{Variance}[\varepsilon] = \frac{1}{12} q^2 \quad \dots\dots (25)$$

しかるに、 $f(t)$ の自己相関々数の分散 σ^2 は量子化誤差を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ として、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[\{(f(t_i) + \varepsilon_1)(f(t_{i+k}) + \varepsilon_2) - f(t_i)f(t_{i+k})\}^2] \\ &= E[\{f(t_i) \cdot \varepsilon_2 + f(t_{i+k}) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2\}^2] \quad \dots\dots (26) \end{aligned}$$

微小項を $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ を無視し、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が $f(t)$ とは独立であると仮定すると (26) 式から

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[f^2(t_i)] \cdot E[\varepsilon_2^2] + 2E[f(t_i) \cdot f(t_{i+k})] \cdot E[\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2] \\ &\quad + E[f^2(t_{i+k})] \cdot E[\varepsilon_1^2] \\ &= R(0) \cdot \frac{q^2}{12} + 2R(\tau) \cdot \frac{q^2}{12} + R(0) \cdot \frac{q^2}{12} \\ \therefore \sigma^2 &\leq \frac{q^2}{12} \cdot 4R(0) \leq \frac{q^2}{12} \quad \dots\dots (27) \end{aligned}$$

たとえば、 $f(t)$ が電圧波形で $|f(t)| \leq 0.5 \text{ V}$ の場合、 $q \approx 15 \text{ mV}$ にすると標準偏差 σ は $1/4$ の 1% 以下になる。

以上 4.1~4.3 で考察したように、相関々数を乱数電圧法で測定する場合には、各誤差がじゅうぶん小さくなるように適当なサンプリング数 N , サンプリング周期 Δt , 量子化の幅 q を選ばなければならない。このほか分布の一様性が良好で、かつ高い周波数領域までスペクトルがのびているような乱数電圧を用いることも必要である。

(結言および参考文献は 153 ページへつづく)

原点の近くにとり，定常速度偏差軽減のため，左半面上原点に近く零点をそう入するような極零点配置が望ましい。

4. 結 言

以上得られた結論を要約すると，つぎのとおりである。

- (1) 右半平面上の零点の左半平面上の極に対する相対的位置が，原点に近いとき，アンダシュート，オーバシュートが大きくなり，制御しにくく，アンダシュートの存在は固有周波数 ω に上限を生ぜしめる。
- (2) 左半面実軸上に新たに極をそう入するとアンダシュート，オーバシュートを軽減できる。
- (3) 左半面実軸上の零点のそう入は，アンダシュート，オーバシュートは大きくなるが，立ち上がり時間を早くすることができ，定常速度偏差を軽減する。
- (4) 零非正則制御系では，アンダシュートの存在のため，比較的非振動的な系で，自乗誤差面積最小値をもつ。

- (5) 定常速度偏差を問題とする1形のサーボ機構では定常速度偏差とアンダシュート（あるいはオーバシュート）との間で適当な妥協を行なった極零点配置を選ぶ必要がある。

終わりに，計算・資料作成などに協力いただいた本学・近藤正季君，西川富夫君に深謝の意を表する。

参 考 文 献

- (1) 乗松，伊藤：電学誌，Vol. 81，p. 566 (1961)
- (2) 乗松・茂木：電学誌，Vol. 77，p. 149 (1957)
- (3) A. Garde : Automatic and Manual Control (Edited by A. Tustin) p. 503 (1952)
- (4) H. Chestnut & R. W. Mayer : Servomechanisms and Regulating System Design, Vol. 1, p. 187~192 (1951)
- (5) 森・松本：生産研究，10，No. 2，p. 409 (1958)
- (6) 山口・伊沢：自動制御，Vol. 2，p. 277 (1963)
- (7) 伊藤：計測自動制御学会第3回学術講演会，No. 403 (1964)
- (8) 伊藤：第7回自動制御連合講演会，No. 147 (1964)
- (9) 伊藤・木全：昭和40年電学連大 (1965年4月)
- (10) 山口・藤井・小川：第2回自動制御連合講演会前刷，106 (1959)
- (11) J. G. Truxal : Control System Synthesis, p. 282 (1955) —Book—

(106 ページからづく)

5. 結 言

相関々数の測定法として簡単な乱数電圧法の一般化として，乱数電圧の振幅密度分布が方形分布と異なる任意の分布に対する相関々数測定の公式を求めた。これにより乱数電圧の密度分布が方形分布からずれた場合の測定誤差の評価ができる。また，方形密度分布をもつ乱数電圧の発生方法を考案した。最後に相関々数を乱数電圧法により測定する場合，考慮しなければならない誤差を解析・評価した。これにより測定条件が明らかになった。

終わりに有益な助言をいただいた池辺潤先生に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) J. Ikeda, T. Sato : A New Integrator Using Random Voltage, Electrical Journal of Japan, 6, 1964.
- (2) 佐藤拓宋：乱数電圧法による相関器に関する2, 3の考察，自動制御，Vol. 3，No. 2，p. 48, 2, 1964.
- (3) J. C. West : Analytical Techniques for Nonlinear Control Systems, Eng. Univ. Press, p. 169, 1960.
- (4) П. А. Крутько : Статистическая динамика импульсных систем, Издательство, "Советское радио", Москва-1963, СТР 353~358.
- (5) John W. Brean and others : Notes on Analogue-Digital Conversion Techniques, MIT Press, 1957.