零非正則制御系のシンセシスについて*

伊 藤 正 美**・木 全 宏 明**

Synthesis of Zero Non-regular Control System

Masami ITO and Hiroaki KIMATA

In this paper the authors have revealed the relations between the transient and steady-state characteristics of the zero non-regular control systems with a zero in the right-half root plane, and the pole-zero configurations of the closed-loop transfer functions in the root plane, and considered on the determination of the closed-loop transfer functions satisfying some specifications. The summarized conclusions are as follows.

1. If the location of the zero in the right-half plane is nearer to the origin than those of the poles in the left-half plane, the indicial response of the system exhibits the large undershoot and the large overshoot.
2. Because of the existence of the undershoot the minimum value of the integral of squared error (ISE) of the system is obtained for non-oscillatory one.
3. The presence of the zero located near the origin on the real axis in the left-half plane, which makes both the undershoot and the overshoot larger, renders the rise time shorter and reduces the steady-state velocity error. Thus the system designer is forced to choose the pole-zero configuration by a compromise between the steady state velocity error and the undershoot (or the overshoot to design type-I servomechanism.

1. 緒 言

系の開回路伝達関数が、S平面の右半平面上に零点をもつ制御系（零非正則制御系⁽¹⁾）が通常の線形系（最小位相推移系）に比し不安定になりやすいことは、単純ロートロール形増幅発電機⁽²⁾、発電所水路⁽³⁾、船舶の操舵⁽⁴⁾などですでによく知られており、その補償法についても、中和補償⁽²⁾、フィードバック補償⁽⁵⁾など⁽⁶⁾、種々論じられている。しかし、これらの補償法は、系の安定性に注目することが主眼で、制御の質を論ずることは、あまりなされていない。普通、零非正則制御系の過渡応答は、右半平面上の零点により、逆応答現象を呈することがあるため、良好な制御性能を与えるパラメータの値も通常の線形系とは異なるものと考えられる。それゆえ、零非正則制御系のシンセシスに当たっては、系の過渡応答特性（オーバシュート、アンダシュート、立ち上がり時間など）や定常特性と制御パラメータ（S平面の極・零点配置）との間の関係をはっきりとはあくしておく必要がある。

本稿は、S平面の右半平面上に1個の零点をもつ零非

正則制御系について、インディシャル応答および自乗誤差面積 (ISE) から系の過渡特性の検討を行ない^{(7)~(9)}、さらに定常特性の検討を加えて、適当な仕様条件を満足する閉回路伝達関数のパラメータの範囲、すなわち、S平面の極零点配置について考察したものである。

本稿で考察した閉回路伝達関数は、つぎに示す3つの場合である。

$$F_1(s) = K_1 \frac{-(s-a)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$F_2(s) = K_2 \frac{-(s-a)}{(s+b)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \quad \cdots \cdots (2)$$

$$F_3(s) = K_3 \frac{-(s-a)(s+c)}{(s+b)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \quad \cdots \cdots (3)$$

2. 過 渡 特 性

本章では、過渡特性を考察することが主目的であるから、 $K_1 = \omega^2/a$ 、 $K_2 = b\omega^2/a$ 、 $K_3 = b\omega^2/ac$ とし、定常位置偏差を0として検討を進める。

2.1 インディシャル応答による考察

インディシャル応答は、 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)/s]$ として求められ、Fig. 1 に示すような逆応答波形が得られる。Fig. 1 に示すとおり、アンダシュート、オーバシュ

* 昭和40年1月5日原稿受付

** 名古屋大学工学部

Fig. 1 Definition of overshoot, rise time, and undershoot

，立ち上がり時間を定義する。

2.1.1 閉回路伝達関数が(1)式で与えられる場合の過渡特性 Fig. 2 は，(1)式で $\omega=1$ に標準化し $K_1=1/a$ とした場合のインディシャル応答 $f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)/s]$ から求めたアンダシュート，オーバシュート，立ち上がり時間の各定数 (ζ, a) に対する値を図示したものである。一般に，右半面上の零点の位置が原点に近いときは，アンダシュート，オーバシュート，立ち上がり時間はいずれも大きくなり，制御性能が悪くなることわかる。これは，左半面上の極と右半面上の零点との原点に対する相対的位置によってきまることを示しており，逆のいい方をして右半面上の零点の位置に対して，左半面上の極が原点より遠くなると，アンダシュート，オーバシュートが大きくなるということもできる。

この関係をもっと直観的に示すために，(1)式で， $a=1(K_1=\omega^2)$ とした場合のインディシャル応答を求め，1例として，オーバシュート(O)，アンダシュート(U)，立ち上がり時間(R)に対して

$$0 \leq O \leq 0.3, U \leq 0.4, R \leq 4 \quad \dots (4)$$

の仕様条件を与えたとき，これを満足する ω, ζ の範囲を求めてみよう。Fig. 3 は $\omega-\zeta$ 平面上，Fig. 4 は S 平面上での合格領域を示したものである。通常の線形系と比較して著しく異なることは，アンダシュート

Fig. 3 Region satisfying Eq. (4) in $\omega-\zeta$ plane [case of Eq. (1)]

Fig. 4 Region satisfying Eq. (4) in root-plane [case of Eq. (1)]

に対する制限条件のために固有周波数 ω の上限が存在することである。なお，普通の線形系でも，ノイズ除去のために ω に上限をもたせ低域ろ波特性にするが，これは上の（アンダシュートによる）制限条件とは本質的に違うものである。そして， ω を大きくとることによって，右半面上の零点に対する左半面上の極の原点からの相対的位置が遠くなることにより，アンダシュートが大きくなることを示しているものにほかならない。

2.1.2 閉回路伝達関数が(2)式で与えられる場合の過渡特性 この場合は，(1)式の場合にさらに左半面上に実極1個をそう入した場合に相当するもので，実極のそう入が過渡特性にどのように影響するかを検

Fig. 2 Undershoot, overshoot, and rise time in case of Eq. (1)

Fig. 5 Undershoot, rise time, and overshoot in case of Eq. (2)

討しよう。

Fig. 5 は(2)式で $\omega=1$ に規準化し、 $K_2=b/a$ といった場合のインディシャル応答 $f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)/s]$ から求めたアンダシュート、オーバシュート、立ち上がり時間の各定数 (ζ , a , b) に対する値を図示したものである。原点の近くに右半面上の零点をもつ (a の小さい) 系がアンダシュート、オーバシュート、立ち上がり時間ともに大きく制御しにくいことは、(1)式の場合と同様であるが、適当な左半面実極のそう入 (小さな b) によってアンダシュート、オーバシュートを軽減できることがわかる。この場合、立ち上がりが遅くなるのはやむを得ない。

前項 (2.1.1) の場合と同様、(2) 式で $a=1(K_2=\omega^2 b)$ とした場合のインディシャル応答を求め、(4) 式の仕様条件を与えたときのこれを満足する ω , ζ の範囲を求めると、Fig. 6 に示すように得られる。Fig. 3 と比較すれば左半面実極の存在による ω - ζ 合格領域の変化の様子がわかる。立ち上がり時間の犠牲が合格領域を ζ の小なるほうへ移動させ、アンダシュート、オーバシュートの軽減が合格領域を広げている。

Fig. 6 Region satisfying Eq. (4) in ω - ζ plane [case of Eq. (2)]

2.1.3 閉回路伝達関数が (3) 式で与えられる場合の過渡特性 この場合は, (2)式の場合にさらに左半面実軸上に零点1個をそ入した場合である. **Fig. 7** は, (3)式で $\omega=1$ に規準化し, $K_2=b/ac$ とおいた場合のインディシャル応答 $f_3(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_3(s)/s]$ から求めたアンダシュート, オーバシュート, 立ち上がり時間の各定数 (ζ, a, b, c) に対する値を $\zeta=0.6$ を例として図示したものである. 原点近くの右半面に零点をもつ系が制御しにくいことは, 前の2つの場合と同じである. しかし, 左半面実軸上に適当な零点 (小さな c) をそ入することによって, 前項 (2.1.2) の場合で犠牲にした立ち上がり時間を早くすることができる.

Fig. 7 Undershoot, overshoot, and rise time in case of Eq. (3)

前の2つの場合と同様, (3)式で $a=1 (K_3=\omega^2 b/c)$ とした場合のインディシャル応答を求め, これから, (4)の仕様条件を満足するパラメータの合格範囲を求めると **Fig. 8** に示すように得られる. (合格領域は斜線で囲まれた部分) $\zeta=1.5$ では $O=0.3$ は, ひじょうに b 軸に近いので描かれていない.

Fig. 8 からわかるように, 原点に近く左半面上の零点をそ入することは, 立ち上がり時間を早めることはできるが, アンダシュート, オーバシュート (特にアンダシュート) が大きくなる. 左半面上の実極とのかね合いで, 左半面上の零点を決定することが望ましい. そして, この零点は, 次節で述べる定常速度偏差と密接な関係をもつため, 特に重要である.

Fig. 8 Region satisfying Eq. (4) in b - c plane [case of Eq. (3)]

Fig. 9 Minimum of integral of squared error (ISE)

2.2 自乗誤差面積 (ISE) による考察

(1)(2)(3)式で $\omega=1$ に規準化し、それぞれ $K_1=1/a$, $K_2=b/a$, $K_3=b/ac$ とした場合の自乗誤差面積 (ISE) $= \int_0^\infty \{1-f(t)\}^2 dt$ を求め、その最小値とそれを最小にする ζ の値を各定数 (a, b, c) に対して求めたのが Fig. 9 である。ここで、太線 (各図共通) は (1) 式の場合で、最右の図が (2) 式の場合である。一般に通常の線形系 (最右の図の $a=\infty$) では ζ の小さい、かなり振動的な系で ISE 最小値をもつ⁽¹⁰⁾、零非正則制御系では、 a が小さくなると (右半面上の零点が原点に近くなると) 最小点は ζ の大きい (非振動根の) ほうへ移動することがわかる。これは、アンダシュートの存在による影響とみられる。そして、小さな b の存在 (左半面上の実極の存在) は、アンダシュート、オーバシュートを軽減し、立ち上がりを犠牲にするため、 ζ の小さいほうへ最小点を移動させることになり、左半面原点近くの実零点のそう入 (小さな c) は、立ち上がり時間を早めアンダシュート、オーバシュートを大きくするため、非振動根をもつ (ζ の大きい) とところで ISE 最小値をもつことになる。

概して、零非正則制御系では、アンダシュートの存在のため、通常の線形系に比し、かなり非振動的な系が ISE 最小の判別条件を満足することがわかる。それゆえ、設計のさいに ISE 判別を利用するときは、この点をはっきりと認識する必要がある。

3. 系のシンセシス

まず、定常位置偏差が問題となる O 形の系の閉回路伝達関数の極零点配置について考えよう。この場合は、(1)~(3)式の閉回路伝達関数で、 K_1, K_2, K_3 をそれぞれ ω^2/a , $b\omega^2/a$, $b\omega^2/ac$ に近い値に選ぶことができれば、定常位置偏差を 0 に近い値とすることができる。

またすでに過渡特性については検討済みで、たとえば、(4)式のような仕様条件を満足するパラメータの組み合わせは Fig. 3, Fig. 4, Fig. 6 および Fig. 8 のように与えられる。これらから望ましい極零点配置の決定が可能である。

つぎに、定常速度偏差が問題となる 1 形の系の閉回路伝達関数の極零点配置について考えよう。普通 1 形の系では、定常位置偏差は 0 とおくことができるから、閉回路伝達関数の一般式は

$$F(s) = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{z_1 z_2 \cdots z_m} \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_n)} \quad \cdots (5)$$

とかかれ、その定常速度偏差は、

$$E_v = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j} \quad \cdots (6)$$

となる⁽¹¹⁾。それゆえ、(1)~(3)式の場合の定常速度偏差は、

$$(K_1=\omega^2/a, K_2=b\omega^2/a, K_3=b\omega^2/ac \text{ とする})$$

$$E_{v1} = \frac{2\zeta}{\omega} + \frac{1}{a} \quad \cdots (7)$$

$$E_{v2} = \frac{2\zeta}{\omega} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \cdots (8)$$

$$E_{v3} = \frac{2\zeta}{\omega} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \quad \cdots (9)$$

である。上式からすぐわかるように定常速度偏差を軽減するには、左半面実軸上の零点 (c) を原点に近くそう入することである。それゆえ (1) 式および (2) 式の形の閉回路伝達関数をもつ系では、たとえば $a=1$ の位置に右半面上の零点をもつ場合には、 $E_{v1}>1$, $E_{v2}>1$ の定常速度偏差をもつことになり、1 形サーボ機構としてあまり満足すべきものといえない。

さてそれでは、左半面上に零点をもつ場合について検討してみよう。いま、 $a=1$ の位置に右半面上の零

Fig. 12 $\omega=1, \zeta=1.5$ ($a=1$)
in case of Eq. (3)

Fig. 11 $\omega=0.33, \zeta=0.8$ ($a=1$)
case of Eq. (3)

Fig. 10 $\omega=0.33, \zeta=1.5$ ($a=1$)
Undershoot, rise time, and overshoot in
case of Eq. (3)

Fig. 13 Undershoot, rise time, and overshoot in case of Eq. (3)

点をもつ場合を考え、過渡特性に対する仕様条件は (4) 式で与えられるとすると、すでに、前節で検討したように Fig. 8 に示すような合格パラメータ領域を得る。そこで、 $E_v \leq 0.1$ を満足する領域を Fig. 8 上に図示すると、点線から左の部分として得られる。すなわち、 c の大きな範囲では、(4) 式の仕様条件の合格領域にはいってこない。この原因は、アンダシュート、オーバシュート（特にアンダシュート）に対する制限条件によるもので、けっきょくは、右半面上の零点によって起こるものである。それゆえ、左半面上の極の右半面上の零点に対する原点からの相対的位置を小さくしてやると、右半面上の零点の影響を軽減してやれば、アンダシュートを少なくできることが考えられる。

すなわち、この事情は、Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13 によってはっきりする。Fig. 10~13 は $a=1$

Fig. 14 Pole-zero configurations

の位置に右半面上の零点をもつ場合の $\omega=1, 0.33$ および $\zeta=1.5, 0.8$ に対するアンダシュート、オーバシュート、立ち上がり時間と b, c との関係を示したものである。図中、 $E_v=0.1$ は定常速度偏差 (E_v) が 0.1 の値を示すときで、影の部分は、 $E_v \leq 0.1$ である。図からわかるように、 $E_v \leq 0.1$ とするためには、 c を小さく選ばねばならず、 c を小さくすると、立ち上がり時間 (R) は短くなるが、アンダシュート (U)、オーバシュート (O) が大きくなる。1 例として Fig. 14 のような極零点配置を考えると、つぎに示す、 U, R, O, E_v の値をもつ。

- (A) $a=1, \omega=0.33, \zeta=1.5, b=1, c=0.092,$
 $U=0.27, R=3.27, O=0.22, E_v=0.1$
- (B) $a=1, \omega=0.33, \zeta=0.8, b=0.333, c=0.115,$
 $U=0.11, R=4.83, O=0.40, E_v=0.1$
- (C) $a=1, \omega=1, \zeta=1.5, b=0.3, c=0.138,$
 $U=0.36, R=2.88, O=0.28, E_v=0.1$
- (D) $a=1, \omega=1, \zeta=0.8, b=0.6, c=0.24,$
 $U=0.53, R=2.02, O=0.57, E_v=0.1$

けっきょく、定常速度偏差とアンダシュート（あるいはオーバシュート）との間に適当な妥協が必要で、アンダシュートを軽減するため、過渡特性を支配する左半面上の極の右半面上の零点に対する相対的位置を

原点の近くにとり、定常速度偏差軽減のため、左半面上原点に近く零点をそう入するような極零点配置が望ましい。

4. 結 言

以上得られた結論を要約すると、つぎのとおりである。

- (1) 右半平面上の零点の左半平面上の極に対する相対的位置が、原点に近いとき、アンダシュート、オーバシュートが大きくなり、制御しにくく、アンダシュートの存在は固有周波数 ω に上限を生ぜしめる。
- (2) 左半面実軸上に新たに極をそう入するとアンダシュート、オーバシュートを軽減できる。
- (3) 左半面実軸上の零点のそう入は、アンダシュート、オーバシュートは大きくなるが、立ち上がり時間を早くすることができ、定常速度偏差を軽減する。
- (4) 零非正則制御系では、アンダシュートの存在のため、比較的非振動的な系で、自乗誤差面積最小値をもつ。

- (5) 定常速度偏差を問題とする1形のサーボ機構では定常速度偏差とアンダシュート（あるいはオーバシュート）との間で適当な妥協を行なった極零点配置を選ぶ必要がある。

終わりに、計算・資料作成などに協力いただいた本学・近藤正季君、西川富夫君に深謝の意を表する。

参 考 文 献

- (1) 乗松、伊藤：電学誌，Vol. 81, p. 566 (1961)
- (2) 乗松・茂木：電学誌，Vol. 77, p. 149 (1957)
- (3) A. Garde : Automatic and Manual Control (Edited by A. Tustin) p. 503 (1952)
- (4) H. Chestnut & R. W. Mayer : Servomechanisms and Regulating System Design, Vol. 1, p. 187~192 (1951)
- (5) 森・松本：生産研究, 10, No. 2, p. 409 (1958)
- (6) 山口・伊沢：自動制御, Vol. 2, p. 277 (1963)
- (7) 伊藤：計測自動制御学会第3回学術講演会, No. 403 (1964)
- (8) 伊藤：第7回自動制御連合講演会, No. 147 (1964)
- (9) 伊藤・木全：昭和40年電学連大 (1965年4月)
- (10) 山口・藤井・小川：第2回自動制御連合講演会前刷, 106 (1959)
- (11) J. G. Truxal : Control System Synthesis, p. 282 (1955) —Book—

(106 ページからづく)

5. 結 言

相関々数の測定法として簡単な乱数電圧法の一般化として、乱数電圧の振幅密度分布が方形分布と異なる任意の分布に対する相関々数測定の公式を求めた。これにより乱数電圧の密度分布が方形分布からずれた場合の測定誤差の評価ができる。また、方形密度分布をもつ乱数電圧の発生方法を考案した。最後に相関々数を乱数電圧法により測定する場合、考慮しなければならない誤差を解析・評価した。これにより測定条件が明らかになった。

終わりに有益な助言をいただいた池辺潤先生に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) J. Ikeda, T. Sato : A New Integrator Using Random Voltage, Electrical Journal of Japan, 6, 1964.
- (2) 佐藤拓宋：乱数電圧法による相関器に関する2, 3の考察, 自動制御, Vol. 3, No. 2, p. 48, 2, 1964.
- (3) J. C. West : Analytical Techniques for Nonlinear Control Systems, Eng. Univ. Press, p. 169, 1960.
- (4) П. А. Крутько : Статистическая динамика импульсных систем, Издательство, "Советское радио", Москва-1963, СТР 353~358.
- (5) John W. Brean and others : Notes on Analogue-Digital Conversion Techniques, MIT Press, 1957.