最小2乗法による線形プロセスの 動特性決定法について*

鈴木 胖**・峠 達 男**

藤井 克彦**・西村 正太郎**

Identification Problem of a Linear Process by Using the Least-square Method

Yutaka SUZUKI, Tatsuo TÖGE

Katsuhiko FUJII and Masataro NISHIMURA

This paper describes the identification problem of a linear continuous process in the operating condition, by applying the least-square method with an aid of a digital computer.

At first, a discrete model with unknown parameters is fitted to a continuous process. The identification is performed by estimating these parameters so that the sum of square of difference between the model and process output becomes minimum. The sampling period of the input and output data is determined at an appropriate value in reference to a specified estimating function of the output. The necessary length of data depends on the noise added in the output.

Practical computing procedure and program developed are explained briefly. The results of the identification of various processes which are simulated by using an analog computer are sufficient enough. For example, when the signal to noise ratio between the input and the noise added in the output is 10, the identification is performed in the good accuracy by using a length of data equal to 20 times the settling time of the process.

1. は し が き

プロセスの動特性を決定するという問題は、近年のように工業プロセスが高度化、複雑化し、より精密な制御が要求されるにつれて、ますます重要な課題となりつつある。

これまでに提案されている動特性決定法のなかで、統計的手法を用いた決定法は、プロセスにあまりじょう乱を与えずに測定ができるという他の方法にない利点がある。その中に対象のプロセスのモデルを想定し、その出力と実際のプロセスの出力との偏差に着目し、最小2乗法を用いて回帰的にモデルのパラメータを求める方法がある。この方法は入力の変質の性質を仮定する必要がないので、任意の入力で測定ができるという点で、より実用性があるものと思われる。

Kalman 氏⁽¹⁾は、入出力の關係が代数的に表わされる、いわゆる サンプル値系に対してこの方法を適用し、そのパルス伝達関数のパラメータを求めている。また Levin 氏⁽²⁾は同種の問題をとりあげ、求められたパラメータが回帰的推定量にはかならないことから、その統計的性質をきわめて明確に論じている。茅氏⁽³⁾はこの方法を拡張し、連続系に対してアナコンを用いてモデルを構成し、そのパラメータを決定する方法を発表している。茅氏の方法は、原理的にはパラメータ数に制限はないが、実用上の見地から数個以上にとるのは困難である。このような点から連続系の動特性決定法にディジコンを用い、サンプル値系についての Kalman 氏らの方法を近似的に適用することが考えられる。

本論文では、連続のプロセスに対してサンプル値系のモデルを考え、両者の出力の偏差の2乗和を最小にするという意味で実際のプロセスにもっとも近いパラメータをディジコンを用いて決定する方法について報

* 計測自動制御学会第3回学術講演会に発表(昭39.9)
昭和40年1月29日日本稿受付

** 大阪大学工学部

告する。求められるパラメータはインディシャル応答の増分に相当するものである。実際に計算プログラムを作成し、アナコンで構成した模擬プロセスの動特性決定を行なった結果についても述べる。

2. 最小 2 乗法による動特性決定法の原理

2.1 対象のプロセス

Fig. 1 に示すようなプロセスのインディシャル応答を操業中の入出力から決定する問題について考える。プロセスへの入力 $x(t)$ はじゅうぶんな精度で計

Fig. 1 Unknown process

測できると仮定する。操業状態のプロセスでは多くの場合 $x(t)$ はコントローラから送られてくる操作量であろう。しかしプロセスの出力 $y(t)$ には、 $x(t)$ のほ

かにプロセスにはいつてくる外乱などに起因する雑音が含まれているのが普通である。出力端で考えたこの雑音を $n(t)$ で表わし、プロセスの $x(t)$ に対する応答を $z(t)$ とすれば、

$$y(t) = z(t) + n(t) \quad \cdots (1)$$

また、プロセスのインパルス応答を $g(t)$ とすれば、その整定時間を T_s として、

$$z(t) = \int_{t-T_s}^t x(\mu) g(t-\mu) d\mu \quad \cdots (2)$$

と書くことができる。

2.2 モデルの想定

さて、このようなプロセスの動特性をディジコンを用いて決定しようとする場合には、その情報処理能力から考えて、取り扱うデータは離散的で、かつ限られた数のものでなければならない。いいかえると連続な $x(t)$, $y(t)$ の代わりに、それぞれのサンプル値をデータとして用いる必要がある。

このため、Fig. 2 に示すように $x(t)$ を T 間隔でサンプルした値 x_l を入力とし、仮想のホールド回路と特性が未定の線形系からなるモデルを考える。

(a) Discrete model

(b) Relationship of the signals in the discrete model

Fig. 2 Discrete model with input sequence x_l

仮想ホールド回路として、出力 $x^*(t)$ が、

$$x^*(t) = \sum_{l=-\infty}^k x_l \Delta u(t-lT) \quad \cdots (3)$$

$$\Delta u(t-lT) = u\left[t - \left(l - \frac{1}{2}\right)T\right] - u\left[t - \left(l + \frac{1}{2}\right)T\right] = \begin{cases} 1, & \left(l - \frac{1}{2}\right)T \leq t \leq \left(l + \frac{1}{2}\right)T \\ 0, & \text{その他の } t \end{cases}$$

となるものを考える。ただし、 $lT < t$ を満足する最大の l を k とする。

線形系の出力 $y^*(t)$ は、そのインパルス応答を $g^*(t)$ と仮定すると、

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^t x^*(\mu) g^*(t-\mu) d\mu \quad \cdots (4)$$

であるから、 $\left(k - \frac{1}{2}\right)T \leq t \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)T$ における出力 $y^*(t)$ は、(3) 式を (4) 式に代入して

$$y^*(t) = x_k \int_{(k-(1/2))T}^t g^*(t-\mu) d\mu + \sum_{l=-\infty}^{k-1} x_l \int_{(l-(1/2))T}^{(l+(1/2))T} g^*(t-\mu) d\mu \quad \cdots (5)$$

ここで,

$$\int_0^t g^*(\mu) d\mu = h^*(t), \quad h^*(t) \text{ はインディシャル応答} \quad \dots\dots(6)$$

という関係を用いると,

$$y^*(t) = x_k \left[h^* \left(t - \left(k - \frac{1}{2} \right) T \right) - h_0^* \right] + \sum_{l=-\infty}^{k-1} x_l \left[h^* \left(t - \left(l - \frac{1}{2} \right) T \right) - h^* \left(t - \left(l + \frac{1}{2} \right) T \right) \right] \quad \dots\dots(7)$$

と表わすことができる.

たとえば, $t = \left(k + \frac{1}{2} \right) T$ においては, 注¹⁾

$$y_{k+(1/2)}^* = x_k (h_1^* - h_0^*) + x_{k-1} (h_2^* - h_1^*) + \dots\dots \quad \dots\dots(8)$$

$g^*(t)$ の整定時間を対象のプロセスの整定時間にほぼ等しく仮定し,

$$pT \approx T_s \quad \dots\dots(9)$$

なる p までをとると,

$$h_i^* - h_{i-1}^* = \Delta h_i^* \quad \dots\dots(10)$$

とにおいて,

$$y_{k+(1/2)}^* = x_k \Delta h_1^* + x_{k-1} \Delta h_2^* + \dots\dots + x_{k-p+1} \Delta h_p^* \quad \dots\dots(11)$$

が得られる. (11) 式は任意の k について成立するから出力のサンプル値 $y_{k+(1/2)}^*$ が入力列 x_k の線形結合で表わされるような不連続モデルを表わしている. ここで, Δh_i^* はモデルの動特性を定めるパラメータで (10) 式から明らかなようにインディシャル応答の増分に相当している.

また (10) 式に (6) 式を代入することにより

$$\Delta h_i^* = \int_{(i-1)T}^{iT} g^*(\mu) d\mu \approx g_{i-(1/2)}^* \cdot T \quad \dots\dots(12)$$

なる関係を導くことができる. したがって, $\Delta h_i^*/T$ はインパルス応答 $g_{i-(1/2)}^*$ にほぼ等しいと見なしてよいことがわかる.

2.3 パラメータの決定法

当面の問題は, このパラメータ Δh_i^* を, 対応するプロセスのパラメータすなわち Δh_i にできるだけ近似するように決定することである. その1つの方法として, 実際のプロセスの出力 $y(t)$ についての測定値を用いて Δh_i^* を決定する方法が考えられる. このさい (11) 式の左辺に対応して $y(t)$ についても $y_{k+(1/2)}$ なるサンプル値をとる.

このような M 個の測定値に着目し, 偏差の2乗和

$$J = \sum_{k=0}^{M-1} (y_{k+(1/2)} - y_{k+(1/2)}^*)^2 \quad \dots\dots(13)$$

を考え, これが最小となるように Δh_i^* を決定しよう.

説明を簡単化するために, つぎのマトリクスを定義する.

注 1) 必ずしもこの時点における出力のサンプル値を考える必要はない. たとえば, $t = kT$ とおくとパラメータ $(h_1^* - h_0^*)$, $(h_2^* - h_1^*)$, $\dots$, $(h_{1/2}^* - h_0^*)$, $(h_{3/2}^* - h_{1/2}^*)$, $\dots$ となる.

$$\underline{y}' = [y_{1/2} y_{3/2} \dots y_{M-(1/2)}]$$

ダッシュは転置を示す.

$$\underline{y}^{*'} = [y_{1/2}^* y_{3/2}^* \dots y_{M-(1/2)}^*]$$

$$\underline{X}' = \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \dots & x_{-p+1} \\ x_1 & x_0 & \dots & x_{-p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M-1} & x_{M-2} & \dots & x_{-p+M} \end{bmatrix} \quad \text{ただし, } \underline{X}' \text{ の各列は独立であると仮定する.}$$

$$\underline{\Delta h}^{*'} = [\Delta h_1^* \Delta h_2^* \dots \Delta h_p^*]$$

定義から

$$\underline{y}^* = \underline{X}' \underline{\Delta h}^* \quad \dots\dots(14)$$

この関係を用いると, 偏差の2乗和は,

$$J = (\underline{y} - \underline{y}^*)' (\underline{y} - \underline{y}^*) = (\underline{y} - \underline{X}' \underline{\Delta h}^*)' (\underline{y} - \underline{X}' \underline{\Delta h}^*) \quad \dots\dots(15)$$

と表わすことができる.

J を最小にする必要条件は, J の Δh_i^* に関するすべての偏微分をゼロとおいて得られる.

すなわち,

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta h^*} = 0$$

$$\text{ここで} \quad \frac{\partial J'}{\partial \underline{\Delta h}^*} = \left[\frac{\partial J}{\partial \Delta h_1^*} \quad \frac{\partial J}{\partial \Delta h_2^*} \quad \dots \quad \frac{\partial J}{\partial \Delta h_p^*} \right] \quad \dots\dots(16)$$

これを解くと,

$$\underline{X} \underline{y} = \underline{X} \underline{X}' \underline{\Delta h}^* \quad \dots\dots(17)$$

が得られる. これが十分条件であることは, 変分の方法を用いて容易に証明できる (付録1). したがって (17) 式を用いて $\underline{\Delta h}^*$ を決定すれば, 少なくとも想定したモデルの出力と実際のプロセス出力の偏差の2乗和を最小にするという意味で, 実際のプロセスに最も近いパラメータが求められたことになる.

3. サンプリング周期 T の選定

(データの取り方)

(15) 式によって求められたモデルのパラメータ $\underline{\Delta h}^*$ は, 対応するプロセスのパラメータ $\underline{\Delta h}$ に平均的に収束するということ, すなわち,

$$E\{\underline{\Delta h}^*\} = \underline{\Delta h} \quad \text{ここで, } E \text{ は平均を表わす} \quad \dots\dots(18)$$

は保証されていないことに注意すべきである.

Levin 氏⁽²⁾によれば, 出力が入力の線形結合で表わされる対象に対して同形のモデルを想定した場合,

もし雑音 $n(t)$ が平均値ゼロで、かつ一定の共分散を有し、パワー有限ならば確かに (18) 式が成立すること、すなわち $\underline{\Delta h}^*$ が $\underline{\Delta h}$ の unbiased estimate であることがいえる。

これが厳密に成り立つのは、プロセスがサンプル値系の場合に限られることは明らかである。しかし連続系もじゅうぶん短いサンプル周期を考えればサンプル値系とみなせるから、プロセスからデータを集録するときのサンプル周期 T をそのように選ぶことにより、近似的にプロセスのパラメータが決定できるはずである。

一方、 T を短くとると (9) 式から明らかなように決定すべきモデルのパラメータの個数 p が増加する。計算機を使用する立場からいうと、これは必要な記憶容量、計算時間の増大を招くので好ましくない。また、プロセスの理想の出力 $z(t)$ に比較して雑音 $n(t)$ が高周波成分を多く含む場合には、サンプル周期 T を短くとると、集録したデータにおける雑音の寄与が相対的に大きくなるので、限られた数のデータからパラメータを決定する場合にかえってバラツキが大きくなる可能性がある。

このように T の選択については、相反する要因があり、しかも対象のプロセス、入力、雑音、使用する計算機の性能などはさまざまなので、実用性のある一般的な結論を導き出すことはきわめて困難な問題である。

この難点を解決するために実用的な便法として、対象のプロセスの出力に着目して T を決定する方法が考えられる。

その原理を説明したのが Fig. 3 である。

Fig. 3 Estimation function for the determination of sampling period

対象の出力 $y(t)$ に対して 2 節と同様のホールド回路を想定し、その出力と $y(t)$ との差を $e(t)$ とする。

そして、それぞれの 2 乗平均値の比、すなわち、

$$\frac{\overline{e^2(t)}}{\overline{y^2(t)}} = \alpha \quad \dots\dots (19)$$

を T の選定基準にとる。筆者らは経験的に、 α の値を 1% 程度にとれば連続系と、それに対して想定された

モデルが等価であることを確かめた。

この α の値を実測することは容易である (4)。

4. p および M の選定

4.1 p の選定

サンプル周期 T を選定し、(9) 式からモデルのパラメータ数 p を定めるには、対象の整定時間 T_s についてだいたいの見当をつけておく必要がある。 T_s はたとえば過渡応答を調べることにより容易にわかる場合が多い。それが不可能で、入力が定常不規則過程の場合には入力の自己相関関数と、入出力間の相互相関関数の形を比較して推定する方法が考えられる。しかし、この方法でも入力の帯域幅が対象の帯域幅に比して狭いと推定が困難になる。

Fig. 4 Illustration of the possibility of the setting time estimation

Fig. 4 は $e^{-b|z|}$ なる相関関数をもつ入力が、1 次遅れ系に加わっている場合を想定し、この間の事情を説明したものである。(a) は $b_x = 2b$ すなわち信号の帯域幅が系の帯域幅の 2 倍の場合で、明らかに系の整定時間を推定できる。(b) は逆に $b_x = b/2$ すなわち信号の帯域幅が 1/2 倍の場合で、このときはちょっと見当がつかない。このような場合には、入力に特定の試験信号を重ね合わせて調べる以外に方法はない。

4.2 M の選定^{注1)}

サンプル周期 T とパラメータ数 p が正しく選定され、かつ雑音が 3 節でのべた条件を満たす場合には、(15) 式から求めたパラメータ $\underline{\Delta h}^*$ の共分散は近似的に、

$$\text{Cov.}(\underline{\Delta h}^*) = (\underline{XX}')^{-1} \underline{XXR}' (\underline{XX}')^{-1} \dots\dots (20)$$

となる。ここで $\underline{R}$ はサンプルされた雑音の共分散マトリクスであり、 $\underline{\Delta h}^*$ の共分散が雑音の統計的性質に依存していることを示している。

もし雑音が白色雑音ならば、

$$\underline{R} = \sigma_n^2 \underline{I} \quad \dots\dots (21)$$

注 2) この項の数式 (20)~(22) は Levin 氏の論文にある。モデルの想定が正しければ、近似的に連続系についても適用できる。

ここで、 σ_n^2 はサンプルされた雑音の分散、 $\underline{I}$ は単位マトリクスとおけるから

$$\text{Cov.}(\underline{\Delta h}^*) = \sigma_n^2 (\underline{X} \underline{X}')^{-1} \quad \dots\dots (22)$$

となる。この場合には、 $\underline{\Delta h}^*$ は $\underline{y}$ について線形のあらゆる unbiased estimate の中で分散が最小になる。(22) 式から明らかなように、雑音の分散 σ_n^2 が既知ならば $(\underline{X} \underline{X}')^{-1}$ の対角要素を計算することにより $\underline{\Delta h}^*$ の分散 $\text{Var.}(\underline{\Delta h}^*)$ が求められる。たとえば入力信号が白色性に近い場合を考えると、 $\underline{X} \underline{X}'$ は近似的に $\sum_{k=0}^{M-1} x_k^2 \underline{I}$ あるいは分散 σ_x^2 を用いて $M \sigma_x^2 \underline{I}$ と表わすことができるから、これを(22)式に代入することにより $\text{Var.}(\underline{\Delta h}^*) \approx \sigma_n^2 / M \sigma_x^2$ なる関係を導くことができる。この関係を用いると $\underline{\Delta h}^*$ の分散をあらかじめ定めることにより所要の観測値の個数 M が定まる。その他、入力信号が白色性でなくても $(\underline{X} \underline{X}')^{-1}$ が容易に求まり、分散と M の関係式を導くことが可能な

場合もあるが、これについては別の機会に報告する予定である。もし、雑音の分散 σ_n^2 が不明ならばこれを推定することも可能である。

実際の場合には混入している雑音が白色性であるとは限らず、その統計的性質も不明なことが多いので、まず観測値の個数 M をパラメータの個数 p の10～20倍にとり2, 3回異なるデータについて計算を繰り返し、その結果求められた $\underline{\Delta h}^*$ が望みの精度以内でいたい一致しているかどうかを調べ、バラツキが大きすぎるならば、さらに M を増すというように試行錯誤的な方法で計算するのがよいであろう。

5. 計算の手順

$$\underline{X} \underline{X}' \underline{\Delta h}^* = \underline{X} \underline{y} \quad \dots\dots (17)$$

を解くために作成した計算プログラムについて簡単に説明する。

まず、左辺のマトリクスの積 $\underline{X} \underline{X}'$ を計算すると、

$$\underline{X} \underline{X}' = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{M-1} x_k^2 & \sum_{k=0}^{M-1} x_{k-1} x_k & \sum_{k=0}^{M-1} x_{k-2} x_k & \dots\dots \sum_{k=0}^{M-1} x_{k-(p-1)} x_k \\ \sum_{k=1}^{M-2} x_{k+1} x_k & \sum_{k=1}^{M-2} x_k^2 & \sum_{k=1}^{M-2} x_{k-1} x_k & \dots\dots \sum_{k=1}^{M-2} x_{k-(p-2)} x_k \\ \sum_{k=2}^{M-3} x_{k+2} x_k & \sum_{k=2}^{M-3} x_{k+1} x_k & \sum_{k=2}^{M-3} x_k^2 & \dots\dots \sum_{k=2}^{M-3} x_{k-(p-3)} x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1-p}^{M-p} x_{k+(p-1)} x_k & \sum_{k=1-p}^{M-p} x_{k+(p-2)} x_k & \sum_{k=1-p}^{M-p} x_{k+(p-3)} x_k & \dots\dots \sum_{k=1-p}^{M-p} x_k^2 \end{bmatrix} \equiv \underline{A} \quad \dots\dots (23)$$

Subroutines:

1. Read data from paper tape*
2. Compute the mean
3. Compute the pseudo correlation function
4. Shift the pseudo correlation function by one data
5. Compute the linear algebra by method of elimination

Data assumed to be punched on paper tape as showing below

Fig. 5 Flow chart for solving the identification problem

となる。これは対称行列なので、たとえば右上半分の要素を計算すればよい。対角線に平行な線上では、隣り合う要素はデータ 1 組分だけがずれているので、式中に矢印で示したように対角線に平行な要素を順に求めてゆくのがよい。

右辺のマトリクスの積 $\underline{X}\underline{y}$ は、

$$(\underline{X}\underline{y})' = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{M-1} x_k y_{k+(1/2)} & \sum_{k=0}^{M-1} x_{k-1} y_{k+(1/2)} & \cdots \\ \cdots & \sum_{k=0}^{M-1} x_{k-(p-1)} y_{k+(1/2)} \end{bmatrix} \equiv \underline{b}' \quad \cdots (24)$$

なる列ベクトルとなる。

このようにして $\underline{X}\underline{X}'$ および $\underline{X}\underline{y}$ の各要素が求まると、(17) 式は p 元の連立 1 次代数方程式に置き換えられる。すなわち

$$\underline{A}\underline{\Delta h}^* = \underline{b} \quad \cdots (25)$$

ここで、 $\underline{A}$ は p 行 p 列のマトリクス、 $\underline{b}$ は p 次元列ベクトルである。

と表わすことができる。

x_k が定常不規則過程の場合、(17) 式において

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \underline{X}\underline{X}' \underline{\Delta h}^* = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \underline{X}\underline{y} \quad \cdots (26)$$

なる極限を考えると、これは Wiener-Hopf の方程式を連立 1 次方程式で近似して解くことに対応している⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

このような連立 1 次方程式をディジコンを用いて解く方法は種々あるが、この場合のようにマトリクス $\underline{A}$

が正定でその対角要素が他の要素に比して大きいと予想されるときには、いわゆる ill condition の起こる可能性がほとんどないので、消去法⁽⁷⁾が適用できる。

Fig. 5 に作成した計算プログラムのフローチャートを示す。

参考のために、NEAC 2206 形電子計算機を用いた場合の計算所要時間を示すと、パラメータの個数 p 、観測値の個数 M の関数として、マトリクス $\underline{A}$ および $\underline{b}$ の計算がそれぞれ約 $(2pM)$ msec, $\underline{A}\underline{\Delta h}^* = \underline{b}$ の求解が約 $(p^3 + p^2)$ msec である。これは $p \leq 50$, $M \leq 1000$ なる範囲で、たかだか数分である。

6. 実験例

6.1 実験方法

作成した計算プログラムによって、動特性の決定が可能であることを示すため、Fig. 6 の模擬プロセスを構成し実測を行なった。

入力は何の信号でよいが、ここでは実験の便宜上、白色雑音から低周波帯域だけをとり出した不規則性信号を用いる。

まず 3 節で述べた方法、すなわち評価関数 α を用いて T を選定することの妥当性を示すために、出力に雑音が存在しない理想的状態で動特性を決定した例をあげる。つぎに出力に白色雑音を重ね合わせて実際に操業中のプロセスに近い状態を模擬し、その動特性決定

Fig. 6 Experimental set-up to solve the system identification problem

(a) Results of identification

(b) Input and output record

Fig. 7 First-order lag system with time constant 10 sec

(a) Results of identification

(b) Input and output record

Fig. 8 Second-order system with $\zeta=0.4$, $\omega_n=0.2$ rad/sec

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
True value	0.071	0.175	0.229	0.237	0.211	0.164	0.107	0.051	0.004	-0.031	-0.052	-0.060
Δh_i^*	0.069	0.181	0.231	0.239	0.211	0.164	0.106	0.051	0.003	-0.032	-0.054	-0.060
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
True value	-0.058	-0.049	-0.035	-0.021	-0.008	0.003	0.011	0.015	0.015	0.014	0.011	0.007
Δh_i^*	-0.061	-0.049	-0.035	-0.020	-0.007	0.005	0.011	0.015	0.015	0.014	0.011	0.011

Table 1 Results of identification shown in Fig. 8

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
True value	0.036	0.090	0.115	0.119	0.106	0.082	0.053	0.025	0.002	-0.016	-0.026	-0.030
$g_{i-(1/2)}^*$	0.034	0.090	0.115	0.120	0.106	0.082	0.053	0.025	0.002	-0.016	-0.027	-0.030
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
True value	-0.029	-0.024	-0.018	-0.010	-0.004	0.002	0.005	0.007	0.008	0.007	0.005	0.004
$g_{i-(1/2)}^*$	-0.030	-0.024	-0.018	-0.010	-0.003	0.002	0.005	0.007	0.008	0.007	0.005	0.005

Table 2 Impulse response calculated from Table 1 by using Eq. (12)

を行なった例を示す。

使用した雑音発生器およびデータ処理装置については付録で説明する。

6.2 出力に雑音の存在しない場合

伝達関数が $K/(1+2\sqrt{2}s)^2$ である 2 段の低域フィルタを用いて入力信号を作り、時定数 10 秒の 1 次遅れ系および $\omega_n=0.2$ rad/sec, $\zeta=0.4$ なる 2 次振動系について動特性を求めた結果を、それぞれ Fig. 7, Fig. 8 に示す。

(a) は決定された Δh_i^* から

$$h_n^* = h^*(nT) = \sum_{i=1}^n \Delta h_i^* \quad (n=1, 2, \dots, p)$$

として計算したインディシャル応答である。(b) は入力 $x(t)$, そのホールド波形^{注3)}および出力 $y(t)$ の記録である。

参考のため 2 次振動系について決定された数値を、真値と対比させて Table 1 に示す。また (12) 式を用

いてイパルス応答を計算した結果を Table 2 に示す。いずれも真値とよく合っている。

いずれも、 $\alpha=0.01$ となるサンプル周期は 2 秒で、そのように選んである。対象の整定時間は約 50 秒、したがってパラメータ数 p は 25 個となる。データの観測個数は 250 個で対象の整定時間の 10 倍に対応している。

6.3 出力に雑音を重ね合わされている場合

前項と同じ状態の 2 次振動系で、出力に白色雑音を重ね合わされている場合について、インディシャル応答を求めた結果が Fig. 9 である。

この場合、入力信号の分散と雑音の分散との比は約 10 対 1 である。観測値の個数 M を 100 と 1,000 に選んだ場合を示してある。

注 3) このホールドは、A-D 変換するために設けられたもので、Fig. 2 に示した仮想ホールド回路とは無関係である。

Fig. 9 System identification in the presence of noise

Fig. 10 Effect of a low-pass filter inserted at the input

6.4 考 察

実験例において示されたように、対象に対して想定したモデルのサンプル周期 T 、およびパラメータ数 p を正しく選べば、じゅうぶんな精度で動特性を決定することが可能である。

ただ、入力 $x(t)$ のなかに対象の応答出力には現われてこない高周波成分が多く含まれている場合だけは、 T を選定するさいの評価関数 α を相当小さくとっても決定した動特性が真値から相当ずれてくる。このような場合には入力 $x(t)$ の測定回路に、選定した T の $1/5$ 程度の時定数を有する低域フィルタをそう入すると精度の良い測定ができることが確かめられた。

Fig. 10 は理想の場合について、その一例を示したものである。

入力信号の自己相関関数が Fig. 10 (a) に示すように $e^{-2|\tau|}$ で対象として $1/(1+s)$ なる 1 次遅れ系を考える。 $\alpha \approx 0.01$ にするにはサンプル周期を 0.25 秒に選べばよい。このようにして求められたインディシャル応答は Fig. 10 (b) に○印で示すように真値からずれたものになる。 $x(t)$ の測定に $0.25/5 = 0.05$ 秒の時定数を有する低域フィルタを用いると、その自己相関関数は Fig. 10 (a) 中に拡大して示したように少

し変形されるが、求められるインディシャル応答は Fig. 10 (b) に × 印で示したように真値とよく一致する。

7. む す び

連続なプロセスの動特性決定に最小 2 乗法を適用しディジコンを用いて、所要の計算を行なうという方法は、実験的考察からも明らかにじゅうぶん実用性のあることが確かめられた。

すなわち対象に任意の入力が加わり、出力に未知の雑音が混入している状態で動特性決定が可能である。対象は整定時間が有限のいわゆる定形であればどのような次数のプロセスでもよく、ただパラメータの個数 p と観測値の個数 M をあらかじめ指定するだけで対象の動特性を表わすパラメータが求まる。このパラメータはインディシャル応答の増分に対応している。計算時間も NEAC 2206 を用いた場合ただか数分である。

データのとり方、すなわち対象のプロセスの入出力をどのようなサンプル周期でサンプルするかはそのままだ対象に対してじゅうぶん近似のよいモデルを想定しているかどうか、および計算に必要な時間、記憶容量

に関係するのでひじょうに重要である。本論文では評価関数 α を用いてこのサンプル周期を定める方法を提案し、その妥当性を例をあげて示した。

パラメータの個数 l は対象の整定時間に見合った大きさにとる。

観測値の個数 M は求められるパラメータの精度、いいかえれば分散に関係するので重要であるが、分散が入力と雑音の性質に依存するので、あらかじめ、所要の精度が得られるように選定しておくのはむずかしい。このため現在のところ試行錯誤的に M を定めながら計算を行なっている。

なお、本研究は文部省科学研究費の交付を受けて行なわれたものである。

参 考 文 献

- (1) R. E. Kalman: "Design of a Self-Optimizing Control System", Trans. A.S.M.E., 80, pp. 468-478 (1958)
- (2) M. J. Levin: "Optimum Estimation of Impulse Response in the Presence of Noise", I.R.E. Trans. on C.T., CT-7, No. 1, pp. 50-56 (1960)
- (3) 茅: "連立方程式形の動特性自動測定法", 自動制御, 7, No. 6, pp. 24-29 (1960)
- (4) 西村, 藤井, 鈴木, 梅本: "不規則信号に対するサンプル周期決定装置", 日本自動制御協会第8回学術講演会論文集, 208 (1964)
- (5) 榎木, 砂原: "自動制御理論入門", 制御工学, 3, No. 4, pp. 45-49 (1959)
- (6) ソロドフニコフ, ウスコフ著: 古屋, 安達訳: "自動制御系の統計的解析法", pp. 38-54, コロナ社 (1963)
- (7) V. N. Faddeeva: "Computational Method of Linear Algebra", pp. 90-99, Dover Publications, Inc., New York (1959)

付 録 1

$$\begin{aligned} J &= (\underline{y} - \underline{X}' \underline{\Delta h}^*)' (\underline{y} - \underline{X}' \underline{\Delta h}^*) \\ &= \underline{y}' \underline{y} - \underline{\Delta h}^* \underline{X} \underline{y} - \underline{y}' \underline{X}' \underline{\Delta h}^* + \underline{\Delta h}^* \underline{X} \underline{X}' \underline{\Delta h}^* \end{aligned} \quad \dots (A \cdot 1)$$

J を最小にする必要条件は,

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\Delta h}^*} = 0 \quad \dots (A \cdot 2)$$

すなわち,

$$\underline{X} \underline{X}' \underline{\Delta h}^* = \underline{X} \underline{y} \quad \dots (A \cdot 3)$$

これが十分条件であることは、 $\underline{\Delta h}^* + \underline{\delta}$ を考えて(A・1)式に代入すると,

$$\begin{aligned} J &= \underline{y}' \underline{y} - \underline{\Delta h}^* \underline{X} \underline{y} - \underline{\delta}' \underline{X} \underline{y} - \underline{y}' \underline{X}' \underline{\Delta h}^* \\ &\quad + \underline{y}' \underline{X}' \underline{\delta} + \underline{\Delta h}^* \underline{X} \underline{X}' \underline{\Delta h}^* + \underline{\delta}' \underline{X} \underline{X}' \underline{\Delta h}^* \\ &\quad + \underline{\Delta h}^* \underline{X} \underline{X}' \underline{\delta} + \underline{\delta}' \underline{X} \underline{X}' \underline{\delta} \\ &= \underline{y}' \underline{y} - (\underline{X} \underline{y})' \underline{\Delta h}^* + \underline{\delta}' \underline{X} \underline{X}' \underline{\delta} \end{aligned} \quad \dots (A \cdot 4)$$

$\underline{\delta}' \underline{X} = (\underline{X}' \underline{\delta})'$ であるから、 $\underline{\delta}' \underline{X} \underline{X}' \underline{\delta} = (\underline{X}' \underline{\delta})' (\underline{X}' \underline{\delta}) \geq 0$ 、ゆえに $\underline{\delta} = 0$ のとき、確かに最小となり、その値は、

$$J_{\min} = \underline{y}' \underline{y} - (\underline{X} \underline{y})' \underline{\Delta h}^* \quad \dots (A \cdot 5)$$

である。

付 録 2

雑音発生器

試作した雑音発生器のブロック線図をFig. A 1 (a)に示す。雑音源はサイラトロン 2D21のショットノイズである。(b)は出力の自己相関関数を示したものである。そのスペクトルは 0~35 c/s で一様である。

(a) Block diagram of the random signal generator

(b) Autocorrelation function of the output

Fig. A 1 Random signal generator

Fig. A 2 Data handling equipment

データ処理装置

データ処理のタイムチャートを Fig. A 2 (a) に示す。A-D 変換に要する時間は最大 0.4 秒、1 データ (5 文字) のさん孔に要する時間は約 0.3 秒である。(b) は装置のブロック線図である。

討 論

〔秋月影雄*〕 「プロセスの動特性決定」という現在ひじょうに重要と思われる問題に対する論文を興味深く読ませていただきました。二、三考えたことを述べますので、討論の対象としてくだされば幸いです。

(1) 2.2 節でインパルスレスポンス $g^*(t)$ から、(10), (11) 式を誘導しておりますが、この式はインディシャルレスポンス $h^*(t)$ から入力を重ねて直ちに得られる式で、(3)~(8) 式は以下にも関係がありませんので不要と思われますがいかがでしょうか。

(2) この論文では、 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \text{const}$ となるようなプロセスのみが議論の対象になっているように思われます。一般にはプロセスとして積分を含む対象 (たとえば、 $K/s(s+1)$)、非減衰振動をする対象 (たとえば、 $K/s^2 + \omega_0^2$) など含まれ、ここで K か ω_0 が未知である場合も考えられると思いますが、この場合はどうなるでしょうか。

(3) この論文の 1 つの中心点は、 $y^*(t) - y(t)$ の 2 乗和が最小になるように Δh^* を決定することにあると思いますが、単に (14) 式から Δh^* を求めるのに比較して、どのような効果を考えておられるのでしょうか。たとえば、サンプリングの幅を狭くして (14)

式のみを解いて Δh^* の精度を上げるのより、サンプリングの幅を広くして (17) 式を解くことのほうが、少ない労力で精度が上がるのでしょうか。

(4) インディシャルレスポンス $h(t)$ を正確に求めても、それを Adaptive Control に適用しようとするれば、その特性的な値 (overshoot etc.) についてのみ考慮することになり、それならはじめから、たとえば 2 次形においてパラメータを決定する方法のほうが簡単になるように思いますが、このように厳格に $h(t)$ を定めたデータをどのように生かすのか、その目標があればお教えください。

〔筆者〕

(1) 入力サンプリング時点に対し出力のサンプリング時点をどこにとるかによって求めているパラメータが異なってきます。このことを説明するために (7) 式を導出しました。この式で本文および脚注 (1) でも例示したように $y(t)$ のサンプリング時点代入すれば求めているパラメータがどのようなものであるかが容易にわかります。 $y(t)$ のサンプリング時点は一般に測定条件、たとえばスキャンングの方式などで左右され、いつも一定の時点たとえば

$$t = \left(k + \frac{1}{2}\right) T$$

とは限らないので、このような融通性のある表現が必要かと思ひます。(8) 式以下では説明の便宜上

$$t = \left(k + \frac{1}{2}\right) T$$

としました。

(2) 積分を含むいわゆる無定位置プロセスの動特性決定については現在研究中です。 $K/s^2 + \omega_0^2$ のように Q のきわめて大きいプロセスは出力波形を観察し

* 早稲田大学理工学部

ただけでわかると思います。

(3) y^* は考えているモデルの出力なので、 Δh^* が不明の場合には y^* も未定で (14) 式を解くことはできません。ご質問の意味は

$$\Delta h^* = (X')^{-1}y$$

として Δh^* を求めたらよいではないかということだと推察します。 y はプロセスの見かけの出力で、外乱などに起因する未知の雑音が混入しているのが普通ですから上式により求められた Δh^* は雑音で乱されたものになります。この雑音の影響を除くために最小2乗法を応用し (17) 式の形で解くわけです。

(4) 現在の最適制御理論たとえば D.P., M.P. などではプロセスの特性が完全にわかっているとして理論を展開しています。しかし一方実在のプロセスで特性が正確にはあくできるものは、ほとんどないのが現状です。この間のギャップを埋めるために、できるだけ正確な Identification を行なうことが必要ではないでしょうか。

〔砂原善文*〕

(1) プロセス動特性を決定する問題の基本的概念において、R.E. Kalman, M.J. Levin の論文から、本論文はどのように発展したものか。

(2) 整定時間 T_s の値は、まったく見当がつかないのが実情である。もし4.1節に述べられているような方法で見当がつくならば、問題の大半は解決したことになる。したがって、 T_s を探索するということも問題のなかに含めねばならない。ひとつの方法として $\Delta h_{i-1}/\Delta h_i$ という値をつねに調べて、この値がある規定値以下になれば計算を終了して、同時に T_s の見当がつけられるというプログラムは作れないか。

(3) $x(t)$ のなかに、制御対象の応答出力にはあ

らわれてこない高周波成分が多く含まれている場合には、入力測定回路に $T/5$ くらいの時定数をもつフィルタをそう入すると精度のよい測定が得られるとあるが、この理論的根拠は何か。

(4) 荷重関数 $g(t)$ を、たとえば Laguerre 直交展開しておく、さらに興味のある方向に研究を進ませしめる可能性が見出されると思う。たとえば、

A. G. Bose : A Theory of Non-Linear Systems, Tech. Reps. 309, Research Laboratory of Electronics, MIT., May (1956)

は非線形特性の検出まで論及している。

〔筆者〕

(1) 最小2乗法を動特性決定に応用したという点では、両氏の方法と同じです。本論文は両氏がサンプル値系に対して適用した最小2乗法を線形連続系に適用したものです。そのさいには、線形系に対するモデルの想定、サンプリング周期の選定などが問題になるので、これらについて考察し実験的検討を行ないました。

(2) ご指摘のように、実際の場合には T_s の探索も必要だと思います。 $\Delta h_{i-1}/\Delta h_i$ に着目する方法は簡単で、しかも i を 2, 3 個とれば確実なので、早急に検討してみます。計算プログラムには部分的修正を加えるだけでよいようです。

(3) $T/5$ という大きさは、実験的に求めたものです。定性的には Fig. 10 (a) に示すように自己相関関数 $\varphi_{xx}(\tau)$ について、 $\tau=0$ の近傍すなわち $-\frac{T}{2} < \tau < \frac{T}{2}$ で、 $\varphi_{xx}(\tau) \approx \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_k^2$ がほぼ成り立つように少し高周波分をカットしてやるということで説明できます。

(4) 有意義なご意見をありがたく存じます。

* 京都大学工学部