未知信号を雑音から分離する適応ろ波器*

森 下 巖**

An Adaptive Filter for Extracting Unknown Signals from Noise

Iwao MORISHITA

A new adaptive filter is presented and its analytical and simulation studies are described. It requires no previous knowledge about the nature of its inputs. The only assumption is that the power spectral density of the signal component of an input $x(t)$ is concentrated in a relatively narrow frequency band, and that of the input has its absolute peak in this frequency range. The device consists of a delay-line synthesiser with time-variable weights and a set of controllers. The synthesiser gives an output

$$y(t) = \sum_{\mu=0}^{Nt} v_{\mu}(t)x(t-\mu\Delta t) + cx(t-l\Delta t)$$

where $v_{\mu}(t)$ are time-variable weights, c is a constant weight and Δt is a delay time between taps. Each controller adjusts one weight for adaptation according to the following equation

$$T \frac{dv_{\mu}(t)}{dt} + v_{\mu}(t) = x(t-\mu\Delta t) \operatorname{sgn}[y(t)].$$

It can be shown that after sufficient length of time a suitable band-pass frequency characteristic for the extraction of the signal component is obtained. Initial values for $v_{\mu}(t)$ are arbitrary. The analytical results are verified by some simulation studies on a digital computer.

1. 序 論

本文はともかく入力として雑音によごされた信号を加えていると、やがて、その中の信号成分が雑音から分離、ろ波されるろ波特性を自動的に構成していくろ波器、すなわち適応ろ波器を研究したものである。

注意すべきは、どのような適応ろ波器においても、入力中の何を信号成分と見、何を雑音成分と見るかについては、あらかじめ定めておかなければならないことである。たとえば、L. G. Shaw⁽¹⁾はもっとも簡単な適応ろ波器として、信号成分としていくつかの性質の信号を仮定し、それぞれに対して用意したろ波器を切り替えて使用するものを考えた。E. M. Glaser⁽²⁾や、C. V. Jakowatz ら⁽³⁾は、未知波形のパルス信号の存在を検出する適応ろ波器を研究し、より一般的に、入力中のパルス信号に適応してこれを精度よく検出するろ波特性を自動的に構成するものを考えた。

これらに対して、本文で報告する適応ろ波器は、入力中のパワースペクトラムにピークのある周波数領域の

成分を信号成分と見なして⁽⁴⁾、これをろ波するに適したろ波特性を自動的に構成するものである。したがって、この適応ろ波器は、

- (1) 未知の周波数の正弦波信号を白色雑音から分離、ろ波したい場合、あるいは未知の周波数付近にパワの集中した狭帯域不規則信号を白色雑音から分離したい場合
- (2) 入力として、いくつかの異なった周波数の正弦波信号の和が与えられたとき、その中からパワ最大の正弦波信号を分離したい場合

などに利用できる。

ろ波器本体は、任意の線形ろ波特性が実現できる遅延線合成器 (delay-line synthesiser) であり、その1組の荷重係数を自動調整させることにより、特定の周波数の正弦波信号のろ波に適するろ波特性を自動的に構成させるものである。自動調整の方式は、刻々入力とろ波器出力の相互相関関数を計算して、これをそのまま荷重係数とする方式である。相互相関の計算に当たっては、出力側は単に極性を利用することにして装置を簡易化してある。したがって、この装置は、1本の遅延線と1個の可塑的神経細胞⁽⁵⁾⁽⁶⁾から構成されて

* 昭和 40 年 1 月 7 日原稿受付

** 東洋レーヨン株式会社工務研究所

いると見ることもできる。

以下、まず、このろ波器の構成と原理を述べ、続いてその適応動作の解析を行ない、平衡状態で実現される波特性を明らかにする。最後に、デジタル計算機でシミュレーションした結果を述べる。

2. 適応ろ波器の構成と原理

2.1 構成

ここに報告する適応ろ波器は、ろ波器本体と荷重係数自動修正機構から構成されている。

Fig. 1 Block diagram of the delay-line synthesizer with time-variable weights

まず、ろ波器本体は、近似的に任意の線形波特性が実現できる遅延線合成器である。すなわち、Fig. 1 に示したように、遅延時間 Δt の遅延要素 D を $2l$ 個カスケードに接続し、その一端から入力 $x(t)$ を入れ、各遅延要素の出力 $x(t-\mu\Delta t)$ 、 $(\mu=0, 1, \dots, 2l)$ にそれぞれ荷重係数 $w_\mu(t)$ を乗じて代数和を取ったものを出力 $y(t)$ とする装置である。

$$y(t) = \sum_{\mu=0}^{2l} w_\mu(t) x(t-\mu\Delta t) \quad \dots\dots(1)$$

ここで、 $2l+1$ 個の荷重係数 $w_\mu(t)$ は自動的に修正され時刻 t とともに変化していくパラメータである。 $w_\mu(t)$ を時刻とともに変化する部分 $v_\mu(t)$ と変化しない部分 u_μ とに分けて考える。すなわち、

$$w_\mu(t) = v_\mu(t) + u_\mu \quad \dots\dots(2)$$

ただし、固定分 u_μ は簡単で、 l 番目の遅延要素の出力線にあるだけとする。 $c > 0$ とし、

$$u_\mu = \begin{cases} c, & \mu=l \\ 0, & \mu \neq l \end{cases} \quad \dots\dots(3)$$

この固定分があるため、変化分 $v_\mu(t)$ がすべて 0 のときでも出力

$$y(t) = cx(t-l\Delta t) \quad \dots\dots(4)$$

が得られる。

問題は変化分 $v_\mu(t)$ の自動修正法則である。これは、

$$T \frac{dv_\mu(t)}{dt} + v_\mu(t) = x(t-\mu\Delta t) \operatorname{sgn}[y(t)], \quad (\mu=0, 1, \dots, 2l) \quad \dots\dots(5)$$

で与える。すなわち $v_\mu(t)$ は、その荷重係数が対応している線路を通過した信号量に比例して変化させられ、その変化の方向は出力が正のとき増加方向、負のとき減少方向である。同時にその現在値に比例した自然減衰が与えられる。Fig. 2 に荷重係数自動修正機構をも含めた適応ろ波器全体のブロック図を示す。この図では 1 個の荷重係数修正装置しか示されていないが、実際には $2l+1$ 個用意されるわけである。

Fig. 2 Block diagram of the adaptive filter

2.2 原理

上に述べた構成の適応ろ波器の適応動作については次節で詳しく解析を行なうが、それに先立って、この適応ろ波器で採用した荷重係数自動調整法則 (5) 式の物理的意味を考察し、入力のパワースペクトラムのピークの周波数領域を通過域とする波特性が自動的に構成される機構を簡単に調べておこう。

荷重係数 $v_\mu(t)$ は $x(t-y\Delta t) \operatorname{sgn}[y(t)]$ を時定数 T の一次遅れ要素で平均したものであるから、これは、ろ波器の出力と入力の相互相関関数をそのまま荷重関

数とすることを意味する。その作用を直観的に理解するために、実際には $v_\mu(t)$ の調整が連続的に行なわれているのをより簡単化して、時間 T ごとに不連続的に調整されるものとしてみよう。すなわち、

$$v_\mu(nT) = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} x(t-\mu\Delta t) \operatorname{sgn}[y(t)] dt, \\ (n=1, 2, \dots) \quad \dots\dots(6)$$

とする。入力ももっとも簡単な場合として、2つの正弦波信号の和、すなわち

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (A_1 > A_2) \quad \dots\dots(7)$$

の場合を考える。最初、荷重係数の初期値 $v_\mu(0)=0$ ($\mu=0, 1, \dots, 2l$) から出発すると、時刻 $t=0 \sim T$ の間では $y(t)=cx(t-l\Delta t)$ であり、出力は単に入力が $L=l\Delta t$ だけ遅延したものである。したがって (6) 式にしたがって計算した $v_\mu(T)$ は入力の自己相関関数と同形となり、この $v_\mu(T)$ によるろ波作用のゲイン周波数特性は入力のパワースペクトラムと同形となる。その結果、つぎの時刻 $t=T \sim 2T$ の間では、出力は $cx(t-\mu\Delta t)$ のほかに $v_\mu(T)$ によってろ波された成分が加わるが、この増分は、 $v_\mu(T)$ のろ波特性の2つの角周波数 ω_1 と ω_2 におけるゲインの比が $A_1^2 : A_2^2$ となることから、 $x(t)$ よりも ω_1 成分をより多く含むことになる。けっきょく、出力 $y(t)$ 中の ω_1 成分と ω_2 成分の割合は $x(t)$ と比べて ω_1 成分が多くなる。したがって、この $t=T \sim 2T$ の間に計算される $v_\mu(2T)$ を考えると、そのろ波特性の ω_1 と ω_2 でのゲインの比は $v_\mu(T)$ の場合よりも大きくなる。

この過程をつぎつぎと続けていくと、やがて ω_1 でのゲインが ω_2 でのゲインよりもじゅうぶん大きくなることが予想される。その変化の速度は A_1 と A_2 の比が大きいほど大きいであろう。

ここで、相互相関関数の計算に当たって、 $y(t)$ をそのまま用いず、極性 $\operatorname{sgn}[y(t)]$ のみ利用しているのは、1つには乗算の計算装置を簡易化するためであるが、より本質的には $v_\mu(nT)$ の絶対値が発散するのを防ぐためである。もし、 $y(t)$ をそのまま用いると、 $v_\mu(nT)$ のろ波作用によるゲインの増加は $y(t)$ の振幅を増加させ、それがさらに $v_\mu(nT)$ の絶対値を大きくしてろ波作用のゲインを高めていくことになる。 $\operatorname{sgn}[y(t)]$ を用い、単に $y(t)$ の位相のみ利用すればこの点が避けられるのである。

なお、このろ波器の荷重係数自動修正機構は、1個の可塑的神経細胞モデルと見ることもできる。これはつぎのように考えればより明らかとなる。2l+1本の線路より信号がはいるが、正の信号は細胞を興奮させようとする信号で、負の信号は抑制しようとする信号

である。各信号の荷重和がしきい値0を越えると細胞は興奮、越えないと抑制状態に止まる。各荷重係数はその線路を通過した信号量に比例して変化させられ、その変化の方向は細胞が興奮しているときに増加方向、抑制されているときに減少方向である。いまの場合、2l+1本の線路から供給される信号は、1本の遅延線の各タップから取り出した時系列信号を考えているが、空間的に分布した明暗信号に対しても同様に取扱いえるであろう。

3. 平衡状態で実現されるろ波特性の解析

以下、2で述べた構成の適応ろ波器の動作を解析し、平衡状態で実現されるろ波特性を明らかにするが、まず簡単のため、単に信号成分である正弦波信号のみを入力として加える場合を調べ、つぎに白色雑音にけがされた狭帯域定常不規則信号（ただし正規性信号とする）を入力とする場合を取り扱う。

3.1 入力が正弦波信号の場合

入力として角周波数 ω_n の正弦波信号を加えていると ω_n に鋭い通過域を持つろ波特性が構成されることを示そう。

簡単のため、入力を振幅が単位の大さの正弦波

$$x(t) = \cos \omega_n t \quad \dots\dots(8)$$

とする。時定数 T は入力の周期 $P=2\pi/\omega_n$ に比べてじゅうぶん長く選ぶから、 P だけ時間が経過する間には $v_\mu(t)$ はほとんど変化しないと考えられる。したがって、この場合の出力はやはり角周波数 ω_n の正弦波信号となり、

$$y(t) = \sum_{\mu=0}^{2l} v_\mu(t) \cos \omega_n(t-\mu\Delta t) \\ = \sum_{\mu=0}^{2l} v_\mu(t) \cos \omega_n(t-\mu\Delta t) + c \cos \omega_n(t-l\Delta t) \\ = B(t) \cos \omega_n(t-\theta(t)), \\ l\Delta t - \frac{\pi}{\omega_n} < \theta(t) < l\Delta t + \frac{\pi}{\omega_n} \quad \dots\dots(9)$$

と置けるが、その振幅 $B(t)$ 、位相 $\theta(t)$ も P の間にはほとんど変化しないと考えられる。したがって、(5) 式を t との $t+P$ 間で平均したものを考えるとき、その間では $v_\mu(t)$ 、 $B(t)$ 、 $\theta(t)$ は一定として計算できるので、

$$T \frac{dv_\mu(t)}{dt} + v_\mu(t) = \frac{1}{P} \int_t^{t+P} x(t-\mu\Delta t) \operatorname{sgn}[y(t)] dt \quad \dots\dots(10)$$

となり、しかも

$$\frac{1}{P} \int_t^{t+P} x(t-\mu\Delta t) \operatorname{sgn}[y(t)] dt \\ = \frac{1}{P} \int_t^{t+P} \cos \omega_n(t-\mu\Delta t) \operatorname{sgn}[B(t) \cos \omega_n(t-\theta(t))] dt \\ = (2/\pi) \operatorname{sgn}[B(t)] \cos \omega_n(\mu\Delta t - \theta(t)) \quad \dots\dots(11)$$

であるから,

$$T \frac{dv_{\mu}(t)}{dt} + v_{\mu}(t) = (2/\pi) \operatorname{sgn}[B(t)] \cos \omega_n(\mu \Delta t - \theta(t)) \quad \dots\dots (12)$$

が得られる. これより $v_{\mu}(t)$ は角周波数 ω_n , 振幅 $(2/\pi)$ の正弦波波形に近づいていくことが知れる. 平衡状態における $v_{\mu}(t)$, $B(t)$, $\theta(t)$ を v_{μ}^* , B^* , θ^* とすると, (12) 式から,

$$v_{\mu}^* = (2/\pi) \operatorname{sgn}[B^*] \cos \omega_n(t - \theta^*) \quad \dots\dots (13)$$

(9) 式から,

$$\sum_{\mu=0}^{2l} v_{\mu}^* \cos \omega_n(t - \mu \Delta t) + c \cos \omega_n(t - l \Delta t) = B^* \cos \omega_n(t - \theta^*) \quad \dots\dots (14)$$

(13) 式を (14) 式に代入し, l がじゅうぶん大きいとして,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} \sum_{\mu=0}^{2l} \cos \omega_n(\mu \Delta t - \theta^*) \cos \omega_n(t - \mu \Delta t) \\ \approx \frac{1}{2} \cos \omega_n(t - \theta^*) \quad \dots\dots (15) \end{aligned}$$

の関係を使うと,

$$\begin{aligned} (2l/\pi) \operatorname{sgn}[B^*] \cos \omega_n(t - \theta^*) + c \cos \omega_n(t - l \Delta t) \\ = B^* \cos \omega_n(t - \theta^*) \quad \dots\dots (16) \end{aligned}$$

これを整理すれば,

$$\begin{aligned} \{ (2l/\pi) \operatorname{sgn}[B^*] + c \cos \omega_n(\theta^* - l \Delta t) - B^* \} \\ \times \cos \omega_n(t - \theta^*) - \{ c \sin \omega_n(\theta^* - l \Delta t) \} \\ \times \sin \omega_n(t - \theta^*) = 0 \quad \dots\dots (17) \end{aligned}$$

が満足されなければならない. これから, $2l/\pi > c$ とし,

$$\left. \begin{aligned} \omega_n \theta^* &= \omega_n l \Delta t \\ B^* &= (2l/\pi) + c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (18)$$

あるいは,

$$\left. \begin{aligned} \omega_n \theta^* &= \omega_n l \Delta t \\ B^* &= -(2l/\pi) + c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

したがって, 出力 $y(t)^*$ は,

$$\begin{aligned} y(t)^* &= \left(\frac{2l}{\pi} + c \right) \cos \omega_n(t - l \Delta t) \\ &= \frac{2l}{\pi} \left(1 + \frac{\pi c}{2l} \right) \cos \omega_n(t - l \Delta t) \quad \dots\dots (20) \end{aligned}$$

あるいは,

$$\begin{aligned} y(t)^* &= - \left(\frac{2l}{\pi} - c \right) \cos \omega_n(t - l \Delta t) \\ &= - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \frac{\pi c}{2l} \right) \cos \omega_n(t - l \Delta t) \quad \dots\dots (21) \end{aligned}$$

明らかに, 出力は入力よりも $L = l \Delta t$ だけ遅延し, 振幅が $\pm 2l/\pi + c$ 倍となったものである.

このときの荷重係数は,

$$v_{\mu}^* = \begin{cases} (2/\pi) \cos \omega_n(\mu \Delta t - l \Delta t) \\ -(2/\pi) \cos \omega_n(\mu \Delta t - l \Delta t) \end{cases} \quad \dots\dots (22)$$

あるいは,

Fig. 3 Steady-state values of variable weights (sinusoidal signal input)

$$w_{\mu}^* = \begin{cases} (2/\pi) \cos \omega_n(\mu \Delta t - l \Delta t) + u_{\mu} \\ -(2/\pi) \cos \omega_n(\mu \Delta t - l \Delta t) + u_{\mu} \end{cases} \quad \dots\dots (23)$$

である. この w_{μ}^* を Fig. 3 に示す. 角周波数 ω_n に鋭い選択性を持つことは明らかである.

2つの平衡状態が得られたので, これらの安定性を調べよう. $v_{\mu}(t)$, $\theta(t)$, $B(t)$ が平衡状態から微少量ずれていたとする. すなわち

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{\mu}(t) &= v_{\mu}(t) - v_{\mu}^* \\ \Delta \theta(t) &= \theta(t) - \theta^* \\ \Delta B(t) &= B(t) - B^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (24)$$

とし, これらを (9), (12) 式に代入して高次の項を省略すると,

$$\begin{aligned} B^* \omega_n \Delta \theta(t) \sin \omega_n(t - \theta^*) + \Delta B(t) \cos \omega_n(t - \theta^*) \\ = \sum_{\mu=0}^{2l} \Delta v_{\mu}(t) \cos \omega_n(t - \mu \Delta t) \quad \dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \frac{d \Delta v_{\mu}(t)}{dt} + \Delta v_{\mu}(t) \\ = \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}[B^*] \omega_n \Delta \theta(t) \sin \omega_n(\mu \Delta t - \theta^*) \quad \dots\dots (26) \end{aligned}$$

が得られる. (25) 式から,

$$B^* \omega_n \Delta \theta(t) = - \sum_{\mu=0}^{2l} \Delta v_{\mu}(t) \sin \omega_n(\theta^* - \mu \Delta t) \quad \dots\dots (27)$$

$$\Delta B(t) = \sum_{\mu=0}^{2l} \Delta v_{\mu}(t) \cos \omega_n(\theta^* - \mu \Delta t) \quad \dots\dots (28)$$

したがって,

$$\begin{aligned} B^* \omega_n \left[T \frac{d \Delta \theta(t)}{dt} + \Delta \theta(t) \right] \\ = - \sum_{\mu=0}^{2l} \left[T \frac{d \Delta v_{\mu}(t)}{dt} + \Delta v_{\mu}(t) \right] \sin \omega_n(\theta^* - \mu \Delta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \frac{d \Delta B(t)}{dt} + \Delta B(t) \\ = \sum_{\mu=0}^{2l} \left[T \frac{d \Delta v_{\mu}(t)}{dt} + \Delta v_{\mu}(t) \right] \cos \omega_n(\theta^* - \mu \Delta t) \end{aligned}$$

が得られ, これに (26) 式を代入して

$$T \frac{d \Delta B(t)}{dt} + \Delta B(t) = 0 \quad \dots\dots (29)$$

$$B^*T \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + [B^* - \text{sgn}[B^*]2l/\pi]\Delta\theta(t) = 0 \quad \dots\dots(30)$$

となる。(30) 式に (18), (19) 式の 2 つの解を代入すると

$$\frac{2l/\pi + c}{c}T \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \Delta\theta(t) = 0 \quad \dots\dots(31)$$

$$\frac{-2l/\pi + c}{c}T \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \Delta\theta(t) = 0 \quad \dots\dots(32)$$

が得られるので、 $2l/\pi > c$ の条件の下では、(18) 式の解は安定、(19) 式の解は不安定なことが知れる。したがって、 $v_\mu(t)$ は任意の初期値から出発して、(18) 式で与えられる平衡状態が実現されることになる。

注意を要するのは、選択特性の鋭い

$$c \ll 2l/\pi$$

の場合、(31) 式の時定数が T の約 $2l/\pi$ 倍となることから、平衡状態に近づく速度がきわめて遅くなることである。したがって、出力として信号成分の位相についても正確に知りたい場合にはじゅうぶん時間をかける必要がある。

3.2 入力が正規性定常不規則信号の場合

以上では入力が角周波数 ω_n の正弦信号のみの場合を調べ、つぎの事実を明らかにした。すなわち

(1) 平衡状態で実現されるろ波特性は ω_n に鋭い選択特性を持ち、

(2) 同時に $L = l\Delta t$ の遅延を与える。

この性質は、入力が角周波数 ω_n にパワのピークを持つ正規性不規則信号の場合にも成立することを示すことができる。

簡単のため、入力 $x(t)$ の平均値は 0、分散は単位の大きさとする。入力 $x(t)$ がろ波器に加えられると、荷重係数 $v_\mu(t)$ は初期値 $v_\mu(0)$ から出発し不規則に変動しながら成長していく。したがって、 $v_\mu(t)$ は非定常不規則信号であり、出力 $y(t)$ もまた非定常不規則信号である。

いま、 $x(t)$ のアンサンブルを考え、これを加えたときの $v_\mu(t)$, $y(t)$ のアンサンブルを調べることにする。ただし、これは $v_\mu(t)$ が同一の初期値から出発したものとす。求めたいのは $v_\mu(t)$ の期待値、特に平衡状態の値の期待値 Ev_μ^* である。ある時刻 t の $x(t)$, $v_\mu(t)$, $y(t)$ を考えるとこれらは互いに相関のある不規則変数であるが、 T がじゅうぶん大きい場合には、 $v_\mu(t)$, $y(t)$ も $x(t)$ 同様正規性不規則変数とみなせるであろう。そこで (5) 式の期待値をとると、

$$T \frac{dEv_\mu(t)}{dt} + Ev_\mu(t) = E[x(t - \mu\Delta t) \text{sgn}[y(t)]] \quad \dots\dots(33)$$

この式の右辺は、 $x(t)$, $y(t)$ の規準化された相互相関関数を $\rho_{xy}(\tau)$ とすると、これらが正規性変数であることから、

$$\begin{aligned} E[x(t - \mu\Delta t) \text{sgn}[y(t)]] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_{yx}(\mu\Delta t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y(t)} E[x(t - \mu\Delta t)y(t)] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y(t)} E\left[\sum_{i=0}^{2l} w_i(t)x(t - \mu\Delta t)x(t - i\Delta t)\right] \end{aligned} \quad \dots\dots(34)$$

となる。ただし、 $\sigma_y(t)^2$ は出力 $y(t)$ の分散である。 $v_\mu(t)$ と同様 $w_\mu(t)$ も正規性変数と見なせるから正規性変数に関する性質を利用して、

$$\begin{aligned} E[w_i(t)x(t - \mu\Delta t)x(t - i\Delta t)] &= E[w_i(t)x(t - \mu\Delta t)] \cdot E[x(t - i\Delta t)] \\ &\quad + E[w_i(t)x(t - i\Delta t)] \cdot E[x(t - \mu\Delta t)] \\ &\quad + E[x(t - \mu\Delta t)x(t - i\Delta t)] \cdot Ew_i(t) \\ &\quad - 2Ew_i(t) \cdot E[x(t - \mu\Delta t)] \cdot E[x(t - i\Delta t)] \\ &= E[x(t - \mu\Delta t)x(t - i\Delta t)] \cdot Ew_i(t) \\ &= \rho_{xx}(\mu\Delta t - i\Delta t)Ew_i(t) \end{aligned} \quad \dots\dots(35)$$

したがって、(33) 式から、

$$\begin{aligned} T \frac{dEv_\mu(t)}{dt} + Ev_\mu(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y(t)} \sum_{i=0}^{2l} \rho_{xx}(\mu\Delta t - i\Delta t)Ew_i(t) \\ \text{あるいは、} Ew_\mu(t) = Ev_\mu(t) + u_\mu &\text{を用いて、} w_\mu(t) \text{ で表現すると} \\ T \frac{dEw_\mu(t)}{dt} + Ew_\mu(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y(t)} \sum_{i=0}^{2l} \rho_{xx}(\mu\Delta t - i\Delta t)Ew_i(t) + u_\mu \end{aligned} \quad \dots\dots(36)$$

ここで $\sigma_y(t)$ は、その定義から、

$$\begin{aligned} \sigma_y(t)^2 &= Ey(t)^2 \\ &= E\left[\left\{\sum_{i=0}^{2l} w_i(t)x(t - i\Delta t)\right\} \times \left\{\sum_{j=0}^{2l} w_j(t)x(t - j\Delta t)\right\}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{2l} \sum_{j=0}^{2l} \rho_{xx}(i\Delta t - j\Delta t)Ew_i(t)Ew_j(t) \end{aligned} \quad \dots\dots(37)$$

(36) 式と (37) 式は、正弦波入力の場合の (12) 式と (9) 式に対応するものである。

平衡状態での $Ew_\mu(t)$, $\rho_{y(t)}$ の値、 Ew_μ^* , σ_y^* は、

$$\begin{aligned} Ew_\mu^* &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^*} \sum_{i=0}^{2l} \rho_{xx}(\mu\Delta t - i\Delta t)Ew_i^* + u_\mu \\ (\mu &= 0, 1, \dots, 2l) \end{aligned} \quad \dots\dots(38)$$

$$\sigma_y^* = \sum_{i=0}^{2l} \sum_{j=0}^{2l} \rho_{xx}(i\Delta t - j\Delta t)Ew_i^*Ew_j^* \quad \dots\dots(39)$$

から求めることができる。この 2 つの式はマトリクスとベクトルを用いると、より簡単な表現が可能である。すなわち、

$R: \rho_{yy}(i\Delta t - j\Delta t)$ を要素とする $2l+1$ 次のマトリクス

$Ew^*: Ew_l^*$ を要素とする $2l+1$ 次の列ベクトル

$u: u_i$ を要素とする $2l+1$ 次の列ベクトル

とすると、

$$\left[I - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^*} R \right] Ew^* = u \quad \dots\dots(40)$$

$$\sigma_y^{*2} = Ew^* R Ew^* \quad \dots\dots(41)$$

これは、 Ew_μ^* , $(\mu=0, 1, \dots, 2l)$, σ_y^* を未知数とする $2l+2$ 個の連立方程式で、 $\rho_{xx}(\tau)$, l, c の値が与えられると Ew_μ^* が求められる。

もっとも簡単な場合として、入力 $x(t)$ が雑音成分である白色雑音のみの場合を計算しておこう。このときは $R=I$ であるから、

$$\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^*} \right) Ew_\mu^* = u_\mu \quad \dots\dots(42)$$

から、

$$\left. \begin{aligned} Ew_\mu^* &= 0, \quad (\mu=0, 1, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l) \\ Ew_l^* &= \frac{c}{1 - \sqrt{2/\pi} \sigma_y^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots(43)$$

が得られる。ただし、

$$\sigma_y^{*2} = \left(\frac{c}{1 - \sqrt{2/\pi} \sigma_y^*} \right)^2 \quad \dots\dots(44)$$

である。けっきょく、

$$Ew_l^* = \pm \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \pm c \right) \quad \dots\dots(45)$$

これを Fig. 4 に示す。単に $L=l\Delta t$ の遅延を与える特性であることは明らかである。

Fig. 4 Steady-state values of variable weights (white noise input)

信号成分が含まれている入力加わる場合についても同様に計算できるが、この場合は、荷重係数の形よりも周波数特性の形で求められると便利である。そのため、 $2l+1$ 個の荷重係数を連続的な荷重関数で近似して調べよう。

$$\mu\Delta t = \tau, \quad l\Delta t = L \quad \dots\dots(46)$$

と置いて Ew_μ^* , $(\mu=0, 1, \dots, 2l)$ を $w(\tau)^*$, $(0 \leq \tau \leq 2L)$ で近似すると (38) 式は

$$w(\tau)^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^* \Delta t} \int_0^{2L} \rho_{xx}(\tau-t) w(t)^* dt + c\delta(\tau-L) \quad (0 \leq \tau \leq 2L) \quad \dots\dots(47)$$

となる。この式は第 2 種フレドホルム形積分方程式であり、簡単には解けない。そこで $w(\tau)^*$ の物理的意味を考え、より理想化した場合の解を求めてみよう。

すなわち、 $x(t-2L)$ から $x(t)$ までのデータを使って $y(t)$ を定めているのを、 $x(-\infty)$ から $x(+\infty)$ までのデータを使って $y(t)$ を定めるとする。この場合の荷重関数の範囲は $-\infty < \tau < +\infty$ となるが、 L がじゅうぶん大きい場合には、 $\tau < 0$ および $\tau > 2L$ の $w(\tau)^*$ の値が (47) 式の近似解となるであろう。理想化した場合には、

$$w(\tau)^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^* \Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(\tau-t) w(t)^* dt + c\delta(\tau-L) \quad (-\infty < \tau < \infty) \quad \dots\dots(48)$$

となり、これはフーリエ変換によって簡単に解を求めることができる。 $w(\tau)^*$ のフーリエ変換を $W(j\omega)^*$ とすると、

$$W(j\omega)^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^* \Delta t} R_{xx}(\omega) W(j\omega)^* + ce^{-Lj\omega} \quad \dots\dots(49)$$

から、ただちに

$$W(j\omega)^* = \frac{ce^{-Lj\omega}}{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^* \Delta t} R_{xx}(\omega)} \quad \dots\dots(50)$$

ただし、 $R_{xx}(\omega)$ は $\rho_{xx}(\tau)$ のフーリエ変換であり、入力 $x(t)$ のパワ密度スペクトラムを表わす。なお σ_y^* は、

$$\sigma_y^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)^*|^2 R_{xx}(\omega) d\omega \quad \dots\dots(51)$$

で与えられる。(50)式は理想化した場合のろ波器の周波数特性を与えるものだが、きわめて重要な性質を示している。すなわち、

$$W(j\omega)^* = G(\omega)e^{-Lj\omega} \quad \dots\dots(52)$$

と置くことにすると、 $R_{xx}(\omega)$ は常に実数であるから、

$$G(\omega) = \frac{c}{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_y^* \Delta t} R_{xx}(\omega)} = \text{実数} \quad \dots\dots(53)$$

したがって $G(\omega)$ の符号を別にすれば位相遅れに関係しているのは $e^{-Lj\omega}$ の項だけであり、これは L の遅延を与えることは明らかである。一方、 $G(\omega)$ はゲイン周波数特性（ただし符号をも含めた）を示し、その絶対値は $R_{xx}(\omega)$ にピークのある周波数帯域にピークを持つ。つまり $R_{xx}(\omega)$ にピークのある周波数帯域を

通過域とする。 $x(t)=s(t)+n(t)$ で $n(t)$ を白色雑音とすると、 $R_{xx}(\omega)$ にピークのある周波数帯域とは $s(t)$ のパワの集中している周波数領域にほかならず、はっきり $s(t)$ を $n(t)$ から分離、ろ波するろ波特性が構成されていることになる。

4. デジタル計算機によるシミュレーション

以上の解析によって得られた結果を確かめるため、デジタル計算機を用いてシミュレーションを行なった。すなわち、この適応ろ波器をプログラミングによって計算機内に構成し、同じく計算機内で発生させた信号成分と雑音成分の和をこれに加え、ろ波器の荷重

係数が変化、成長していく状況と平衡状態で実現されるろ波特性を調べたのである。シミュレーションにはHIPAC-103を使用した。

適応ろ波器としては、

$$\left. \begin{aligned} l &= 25 \\ T &= 500 \Delta t \\ c &= 0.05 \end{aligned} \right\} \dots\dots (54)$$

のものをを用いた。

デジタル計算機であるから時刻は一定の刻みで進めていく。この刻みは $\Delta t/2$ とした。まず、荷重係数を適当な初期値にセットする。信号成分と雑音成分を発生させ、これらの和を入力としてろ波器に加える。

その結果、ろ波器の遅延線の内容を $\Delta t/2$ だけシフトする。その内容から出力 $y(t)$ を求め、同時に荷重の係数修正を行なう。以上を順次くりかえしていく。

まず、白色雑音にけがされた正弦波信号を入力とした場合のシミュレーションの結果を Fig. 5, Fig. 6 に示す。信号成分はパワが1の正弦波

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{2} \cos \omega_n t, \\ \omega_n \Delta t &= \pi/10 \quad \dots (55) \end{aligned}$$

を用い、雑音成分としてはパワが10の正規性乱数を白色雑音として使った。したがってSN比は0.1となる。

Fig. 5 は荷重係数の成長状況を示したもので、初期値としては $v_\mu(0)=0$, ($\mu=0, 1, \dots, 2l$) とした場合である。明らかに角周波数 ω_n に鋭い選択性を持つろ波特性が構成されている。Fig. 6 は、上のシミュレーションにおいて、荷重係数がほぼ平衡状態に達したとき ($t/T=3.2$) の入力、その信号成分、出力の波形の一部を示したものである。信号成分が確かに選

Fig. 5 Digital simulation results-response of variable weights

Fig. 6 Digital simulation results-waveforms of input, signal component and output

Fig. 7 Digital simulation results-waveforms of input, signal component and output

扱されている。

つぎに、周波数の異なる多数の正弦波信号の和を入力として加えた場合のシミュレーションの結果をFig. 7 に示す。多くの信号例についてシミュレーションしたが、ここでは、

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= \sqrt{2} \cos \omega_n t \\ n(t) &= (\sqrt{2}/2) \left(\cos 0.5 \omega_n t + \cos 1.5 \omega_n t \right. \\ &\quad \left. + \cos 2.0 \omega_n t + \cos 2.5 \omega_n t \right. \\ &\quad \left. + \cos 3.0 \omega_n t + \cos 3.5 \omega_n t \right) \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

の場合で、荷重係数がほぼ平衡状態に達したとき ($t/T=3.2$) の入力、その信号成分、出力の波形の一部を示したものである。この場合、信号成分も雑音成分もともに正弦波信号であり、信号成分の選択は、単にその成分のパワが他の成分のパワの4倍あることだけから行なわれているのである。

5. 結 語

簡単な法則にしたがって荷重係数を自ら修正していく遅延線合成器を研究し、これが入力のパワスペクトラムにピークのある周波数領域の成分を信号成分とし

て分離、ろ波するろ波特性を自動的に構成することを示した。ここでは時系列信号を対象として取り扱ったが、空間的な明暗信号に対しても同様に適用できるであろう。

終わりに臨み、本研究のテーマを示され何かとご指導くださった東京大学磯部孝教授、有益なご助言、ご討論をいただいた寺尾満教授に厚くお礼申し上げる。また、本文をまとめるに当たり、当社工務研究所加藤恒三所長、安藤浩一郎主任研究員よりご激励、ご支援いただいた。

参 考 文 献

- (1) L. G. Shaw : Dual-Mode Filtering of Polynomial Signals in Noise, IEEE Trans., **AC-8**, 2, p.136 (1963)
- (2) E. M. Glaser : Signal Detection by Adaptive Filters, IRE Trans., **IT-7**, 2, p.87 (1961)
- (3) C. V. Jakowatz, et al. : Self-Adaptive Filter Finds Unknown Signal in Noise, electronics, **34**, 7, p.117 (1961)
- (4) L. Kleinrock : Detection of the Peak of an Arbitrary Spectrum, IEEE Trans., **IT-10**, 3, p.215 (1964)
- (5) H. D. Black : The Perceptron ; A Model for Brain Functioning, Rev. Mod. Phys., **34**, 1, p.123 (1962)
- (6) H. D. Black, et al. : Analysis of a Four-Layer Series-Coupled Perceptron, Rev. Mod. Phys., **34**, 1, p.135 (1962)
- (7) C. S. Weaver : An Adaptive Communications Filter, Proc. IRE, **49**, 10, p.1587 (1961)
- (8) G. L. Turin : An Introduction to Matched Filters, IRE Trans., **IT-6**, 3, p.311 (1960)
- (9) K. S. Narendra, et al. : Multiparameter Self-Optimizing Systems Using Correlation Techniques, IEEE Trans., **AC-9**, 1, pp.31~38 (1964)