写像こう配法を用いた サンプル値最適制御系の設計*

熊谷 三郎**・松村 雅司**

長田 朗***

Design of Optimal Sampled-Data Control Systems Using the Gradient Projection Method

Saburo KUMAGAI, Masaji MATSUMURA and Akira NAGATA

This paper is concerned with the design of the optimal controller for a sampled-data control system. Supposing that the plant is linear, time-invariant, and has a saturating input, then, the system is described by its state transition equation as follows ;

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{G}\mathbf{x}_k + \mathbf{h}u_k \\ |u_k| &\leq 1, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Consider a quadratic performance criteria of the form

$$J_N = \mathbf{x}_N' \mathbf{Q} \mathbf{x}_N$$

where, N is a given positive integer and is the final sampling instant at which the control action terminates. The problem is to find the admissible control sequence $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ which minimizes J_N for a given initial state and N .

In this paper, N -dimensional control space is introduced, and the gradient projection method proposed by J. B. Rosen is used to find the solution in the control space. It is shown that an algorithm to find the solution can be constructed in a sample fashion by means of the gradient projection method.

Finally, a numerical example is given to illustrate the proposed algorithm.

1. 緒 論

本論文は、1入力線形サンプル値制御系で、その操作量に大きさの制限が課せられるとき、系の終端状態の2次形式で与えられる非線形評価関数に対する最適制御問題を取り扱っている。

この種の問題はこれまで多くの方法で解くことが試みられてきたが、ここではデジタル計算機の利用を主眼にしたノンリニア・プログラミングの手法の適用を考察する。ノンリニア・プログラミングの解法としても種々なものが考えられているが⁽¹⁾⁽²⁾、本論文では、J. B. Rosenの示した写像こう配法が⁽³⁾、上述のような

サンプル値最適制御系の設計に有力な手段として適用できることを明らかにしている。また、この問題の解法は容易に時間最適制御問題の解法に拡張することができる。

2. 系および問題の記述

本論文を通じて、Fig. 1 にブロック線図で示すサンプル値制御系を考える。この系において、サンプリングは

Fig. 1 Optimal sampled-data control system

* 計測自動制御学会第3回学術講演会で発表（昭和39.9）昭和40年4月15日原稿再受付

** 大阪大学工学部

*** 近畿大学理工学部

一定周期 T で動作し、制御対象は n 次定数係数線形微分方程式で表わされるものとする。このとき零次ホールド回路の存在によって、Fig. 1 の系はつぎの状態転移方程式で記述することができる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{x}_k + \mathbf{h}u_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}(kT)$ は k 番目のサンプリング時点、 $t=kT$ での系の状態を表わす n 次元状態空間 S における状態ベクトルであり、 $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(T)$ は転移マトリクスと呼ばれる正則な $n \times n$ 定数マトリクス、 $\mathbf{h} \equiv \mathbf{h}(T)$ は n 次定数ベクトル、また、 $u_k \equiv u(kT)$ は $t=kT$ における操作信号の大きさを表わす実数である。

ほとんどの物理系において要求されるように、操作信号を無制限に大きくすることはできないという事実から、(1) 式において、操作信号 u_k がすべての k につき、

$$|u_k| \leq 1, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

を満足するとき、 u_k を許容操作信号と呼ぶことにする。

状態空間 S における任意の有限な初期状態 α から出発した系を、系の平衡状態である S の原点 $\mathbf{0}$ に到達させることのできる有限な許容操作信号列 $\{u_k\}$ が少なくとも 1 つは存在するとき、(1) 式の系は、(2) 式の条件のもとで制御可能であるといわれる。

C. A. Desoer および J. Wing によれば制御可能性の条件としてつぎのようなものが与えられる。

補題 1. (C. A. Desoer and J. Wing) : (1) 式の系が (2) 式の条件のもとで制御可能であるためには、

- (i) $\mathbf{h}, \mathbf{G}\mathbf{h}, \dots, \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{h}$ で与えられる n 個のベクトルが 1 次独立、
- (ii) $\mathbf{G}$ の特性根を $\lambda_i(\mathbf{G})$, $i=1, 2, \dots, n$ とするとき、すべての i につき $|\lambda_i(\mathbf{G})| \leq 1$ であることが必要十分条件である。

以下、(1) 式における $\mathbf{G}, \mathbf{h}$ はこれらの条件を満足しているものと仮定する。

ここで最適条件をつぎのように定める。(1) 式の系を (2) 式の条件のもとに $t=0$ から $t=NT$ までの期間にわたって制御することが要求され、その全制御期間を通じて、評価関数

$$J_N = \mathbf{x}_N' \mathbf{Q} \mathbf{x}_N \quad (3)$$

を最小にすることを最適条件とする。ただしここで、 $'$ は転置を表わし、 $\mathbf{Q}$ は適当に定められた正値対称な $n \times n$ 定数マトリクスである。これらの仮定のもとにおいて、ここで取り扱う最適制御問題をつぎのように記述することができる。

問題：状態空間 S の任意の初期状態 α から出発した (1) 式の系を制御するとき、適当に定められた

正の整数 N 、および、マトリクス $\mathbf{Q}$ に対して、(3) 式で与えられる評価関数 J_N を最小にする許容操作信号列 $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ を見出せ。

この問題の解を最適操作信号列と呼び、 $\{u_k^*\}_{k=0}^{N-1}$ で表わす。この問題は、ある時間内の制御によって、系の状態をあらかじめ定められた一定の目標状態 ((3) 式で与えられる J_N のときには S の原点 $\mathbf{0}$) へできるだけ近付けたいという要求に対して生ずるものである。与えられた目標状態が S の一定の状態 β であるときには、評価関数 J_N として (3) 式の代わりに、

$$J_N = (\mathbf{x}_N - \beta)' \mathbf{Q} (\mathbf{x}_N - \beta) \quad (4)$$

で与えられるものを用いて上の問題に適用すればよい。

(3) 式 ((4) 式でも同様)) の形を見れば明らかのように、 J_N は非負の実数で、 $J_N=0$ が実現されたとすれば、これはつねに J_N の最小値となっている。 $J_N=0$ は $\mathbf{x}_N=\mathbf{0}$ ((4) 式では $\mathbf{x}_N=\beta$) のとき、かつそのときのみ実現することができ、これは系の状態が目標状態に完全に一致することを意味している。したがって、与えられた初期状態および目標状態に対して、 N を順次大きくとり、上の問題を繰り返し適用し、最小の N について $J_N=0$ を実現する解を得たとすれば、これは時間最適制御問題の解となっている。

3. 操作空間の導入

ノンリニア・プログラミングとしての前節の問題を解き、最適解を得るための計算過程を実現するに必要な準備を行なう。

(1) 式の系で初期状態 α から出発し、 N 個の操作信号 $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ によって操作された状態 $\mathbf{x}_N$ は、

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{G}^N \alpha + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{G}^j \mathbf{h} u_{N-1-j} \quad (5)$$

と表わすことができる。

また (2) 式の拘束条件は、

$$\left. \begin{array}{l} u_k \leq 1 \\ u_k \geq -1 \end{array} \right\} \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6)$$

なる $2N$ 個の条件式で表わすことができるが、ここで計算の便宜上、

$$v_i = u_{i-1} + 1, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (7)$$

なる操作信号 v_i を導入して、(6) 式の条件を、

$$\left. \begin{array}{l} v_i \leq 2 \\ v_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

におきかえる。終端状態 $\mathbf{x}_N$ を (7) 式で定義される操作信号 v_i で表わせばつぎのようになる。

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{G}^N \alpha + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{G}^j \mathbf{h} v_{N-j} - \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{G}^j \mathbf{h} \quad (9)$$

ここで、 $v_1, v_2, \dots, v_N$ をそれぞれ正規直交基底ベク

トル $e_1, e_2, \dots, e_N$ 上の座標とする操作ベクトル v の形成する N 次元操作空間 $\mathcal{R}$ を導入する. このとき (9) 式は,

$$x_N = G^N \alpha + Bv - b \quad \dots\dots (10)$$

の形に表わすことができる. ここで $v = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_N)$ は操作空間 $\mathcal{R}$ の操作を表わすベクトルであり, 前節における操作信号列 $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ と 1 対 1 の対応関係をもち, $B = [G^{N-1}h, G^{N-2}h, \dots, h]$ は操作空間 $\mathcal{R}$ の操作を状態空間 $\mathcal{S}$ の状態に移す $n \times N$ 変換マトリクス, また, $b = \sum_{k=0}^{N-1} G^k h$ は n 次元定数ベクトルである.

許容操作信号列 $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ に対応する操作 v を許容操作と呼べば, この v のすべての成分は (8) 式の条件を満足していなければならない.

$\mathcal{R}$ において許容操作 v の全体を集合 Ω と定義すれば, Ω は $\mathcal{R}$ において N 次元の立方体を形成する.

(10) 式を用いて評価関数 J_N を書きなおせば, つぎのような α, v の関数として表わすことができる.

$$\begin{aligned} J_N &= x_N' Q x_N \\ &= [\alpha' G^{N'} + v' B' - b'] Q [G^N \alpha + Bv - b] \\ &= \alpha(\alpha) + 2\phi'(\alpha)v + v' \Phi v \equiv F_N(\alpha, v) \quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha) &\equiv \alpha' G^{N'} Q G^N \alpha - 2b' Q G^N \alpha + b' Q b, \\ \phi'(\alpha) &\equiv \alpha' G^{N'} Q B - b' Q B, \\ \Phi &\equiv B' Q B. \end{aligned}$$

(11) 式から明らかなように $F_N(\alpha, v)$ は v に関して連続で, 2 次微分可能である.

$F_N(\alpha, v)$ をこのように定めるとき, 前節で述べた問題を解くことは, α, N を与えて Ω に属する任意の操作 v に対して,

$$F_N(\alpha, v^*) \leq F_N(\alpha, v), \quad v, v^* \in \Omega \quad \dots\dots (12)$$

を満足するような最適操作 v^* を見出すことと等価である. 前節における最適操作信号列 $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ が (12) 式を満足する最適操作 v^* に対応していることはいうまでもない.

任意の α, v に対して $F_N(\alpha, v) \geq 0$ が成立すること, したがって $F_N(\alpha, v^0) = 0$ とする v^0 が存在するならば, この v^0 は $F_N(\alpha, v)$ を $v \in \mathcal{R}$ なる任意の v に対して最小にするものであることが前節の論議から知られる.

いま, ある変数 ξ についての関数 $f(\xi)$ が, 任意の 2 点 $\xi = \xi^1$ および $\xi = \xi^2$ に対して, θ を $0 \leq \theta \leq 1$ なる任意の実数とすれば,

$$f((1-\theta)\xi^1 + \theta\xi^2) \leq (1-\theta)f(\xi^1) + \theta f(\xi^2) \quad \dots\dots (13)$$

を満足するとき, $f(\xi)$ は ξ について凸関数であるという.

補題 2. 初期状態 α を固定して考えるとき, $F_N(\alpha, v)$ は操作 $v \in \mathcal{R}$ に関しての凸関数である.

[証明] $v^1, v^2 \in \mathcal{R}$ を考える. (11) 式で Φ は準正値であるから, 任意の v^1, v^2 に対して,

$$(v^1 - v^2)' \Phi (v^1 - v^2) \geq 0.$$

また $0 \leq \theta \leq 1$ なる任意の実数 θ について $\theta \geq \theta^2$ であるから, つぎの関係が得られる.

$$\begin{aligned} (1-\theta)F_N(\alpha, v^1) + \theta F_N(\alpha, v^2) &= \alpha(\alpha) + 2(1-\theta)\phi'(\alpha)v^1 + 2\theta\phi'(\alpha)v^2 \\ &\quad + (1-\theta)v^{1'}\Phi v^1 + \theta v^{2'}\Phi v^2 \\ &= \alpha(\alpha) + 2\phi'(\alpha)[(1-\theta)v^1 + \theta v^2] \\ &\quad + v^{1'}\Phi v^1 + \theta v^{1'}\Phi \cdot (v^2 - v^1) + \theta(v^2 - v^1)' \Phi v^1 \\ &\quad + \theta(v^2 - v^1)' \Phi (v^2 - v^1) \\ &\geq \alpha(\alpha) + 2\phi'(\alpha)[(1-\theta)v^1 + \theta v^2] + v^{1'}\Phi v^1 \\ &\quad + \theta v^{1'}\Phi \cdot (v^2 - v^1) + \theta(v^2 - v^1)' \Phi v^1 \\ &\quad + \theta^2(v^2 - v^1)' \Phi (v^2 - v^1) \\ &= \alpha(\alpha) + 2\phi'(\alpha)[(1-\theta)v^1 + \theta v^2] \\ &\quad + [(1-\theta)v^1 + \theta v^2]' \Phi [(1-\theta)v^1 + \theta v^2] \\ &= F_N(\alpha, (1-\theta)v^1 + \theta v^2) \end{aligned}$$

この関係は, 任意の $v^1, v^2 \in \mathcal{R}$ および $\theta, 0 \leq \theta \leq 1$ について成立するから, $F_N(\alpha, v)$ は, 凸関数の定義 (13) 式によって $v \in \mathcal{R}$ についての凸関数である.

(証明終)

補題 3. $\mathcal{R}$ の任意の操作を v^1, v^2 とするとき $F_N(\alpha, v^2) \geq F_N(\alpha, v^1) + (v^2 - v^1)' g(\alpha, v^1) \dots\dots (14)$ が成立する. ただし, ここで,

$$g(\alpha, v^1) = [\text{grad}_v F_N(\alpha, v)]_{v=v^1}$$

は操作 v^1 における関数 $F_N(\alpha, v)$ の v についてのこう配ベクトルである.

[証明] $F_N(\alpha, v)$ は v についての凸関数であるから, $0 < \theta \leq 1$ なる任意の θ につき,

$$\begin{aligned} \theta F_N(\alpha, v^2) + (1-\theta)F_N(\alpha, v^1) &\geq F_N(\alpha, \theta v^2 + (1-\theta)v^1) \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} F_N(\alpha, v^2) - F_N(\alpha, v^1) &\geq \frac{F_N(\alpha, v^1 + \theta(v^2 - v^1)) - F_N(\alpha, v^1)}{\theta} \end{aligned}$$

が成立する. しかるに,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{F_N(\alpha, v^1 + \theta(v^2 - v^1)) - F_N(\alpha, v^1)}{\theta} &= (v^2 - v^1)' g(\alpha, v^1) \end{aligned}$$

となり, (14) 式が成立することが知られる. (証明終)

4. 最適操作の性質

(12) 式の関係満足する最適操作 v^* の計算過程を求めるためのつぎの準備として, ここでは最適操作 v^* の若干の性質を考察しておく.

補題 4. $\alpha \in S$, $N > 0$ のとき, Ω の任意の操作 v に対して,

$$F_N(\alpha, v^0) \leq F_N(\alpha, v), \quad v^0, v \in \Omega \quad \dots\dots (15)$$

を満足する操作 v^0 が少なくとも 1 つは存在する.

[証明] $F_N(\alpha, v)$ は v に関して連続で, 2 次微分可能な凸関数であるから,

$$g(\alpha, v^0) = [\text{grad}_v F_N(\alpha, v)]_{v=v^0} = 0 \quad \dots\dots (16)$$

なるとき, かつそのときのみ v^0 は (15) 式を満足する. (16) 式に (11) 式を代入すれば,

$$\phi(\alpha) + \Phi v^0 = 0 \quad \dots\dots (17)$$

(17) 式が v^0 について解をもつためには,

$$\text{rank}[\Phi] = \text{rank}[\Phi, \phi(\alpha)] \quad \dots\dots (18)$$

なることが必要十分である. ここで $[\Phi, \phi(\alpha)]$ は, $N \times N$ マトリクス Φ に N 次の列ベクトル $\phi(\alpha)$ を追加して得られる $N \times (N+1)$ マトリクスである. (18) 式の条件を, N が $0 < N \leq n$ なるとき, および $N > n$ のときについて考える. まず $0 < N \leq n$ とする.

$$\Phi = B'QB = [G^{N-1}h, \dots, h]'Q[G^{N-1}h, \dots, h] \quad \dots\dots (19)$$

において制御可能性の仮定から, $G^{N-1}h, G^{N-2}h, \dots, h$ なる N 個のベクトルは 1 次独立であり, $\text{rank}[B] = N$, また仮定によって $\text{rank}[Q] = n$, したがって,

$$\text{rank}[\Phi] = \min\{\text{rank}[Q], \text{rank}[B]\} = N \quad \dots\dots (20)$$

他方,

$$[\Phi, \phi(\alpha)] = [QB, QG^N\alpha - b]'B \quad \dots\dots (21)$$

から, 任意の α に対して $\text{rank}[QB, QG^N\alpha - b] = N$, また $\text{rank}[B] = N$. したがって

$$\text{rank}[\Phi, \phi(\alpha)] = N \quad \dots\dots (22)$$

となり, v^0 の存在することが示される.

つぎに $N > n$ とする. (19) 式において $G^{N-1}h, G^{N-2}h, \dots, h$ なる N 個のベクトルのうち n 個が 1 次独立であり, $\text{rank}[B] = n$, および, $\text{rank}[Q] = n$ から $\text{rank}[\Phi] = n$ が得られる. さらに (21) 式で任意の α に対して $\text{rank}[QB, QG^N\alpha - b] = n$, および $\text{rank}[B] = n$, から $\text{rank}[\Phi, \phi(\alpha)] = n$ となり, 補題 4 は完全に証明される. (証明終)

定理 1. 任意の初期状態 $\alpha \in S$ および $N > 0$ に対して, (12) 式を満足する最適操作 $v^* \in \Omega$ が少なくとも 1 つは存在する.

[証明] $F_N(\alpha, v)$ は任意の有限な操作 v に対して, 有限な値をとり, さらに補題 4 によって, 少なくとも 1 つの $v^0 \in \Omega$ において最小値をとる連続な凸関数であることから, v の範囲を有界閉集合 Ω に限定しても (12) 式を満足する v^* が存在することは明らかである. (証明終)

補題 4 の証明の部分から知られるように, (15) 式を

満足する Ω の操作 v^0 は, $0 < N \leq n$ のとき一意的に定まり, $N > n$ のとき Ω において $(N-n)$ 次元の自由度をもつ. したがって, $N > n$ のとき (15) 式を満足する v^0 のうち少なくとも 1 つの操作が Ω の要素となりうる場合, $v^0 = v^*$ となる最適操作 v^* は必ずしも一意的ではない. さらに操作 v^0 の性質として, $N > n$ ならば任意の $\alpha \in S$ に対して $F_N(\alpha, v^0) = 0$ が実現できる. これは (2) 式の条件を無視するとき, (1) 式の系では任意の初期状態 α から出発してたかだか n 個の操作信号を用いて原点 0 に到達させることができる⁽⁵⁾ことから明らかである. とくにこの問題の解法を時間最適制御問題の解法に拡張するとき, その最適解 v^* は $F_N(\alpha, v^*) = 0$ を実現するものでなければならず, v^* は多くの場合 (多くの α に対して) 自由度をもつことが考えられる.

このことは, これまで筆者らが示してきた状態空間技法による解法における最適解の任意性に関する性質⁽⁶⁾を, 別の形で説明しているものである. さらに関数 $F_N(\alpha, v)$ の凸性および操作 v^0 の任意性から, $N > n$ のとき, 少なくとも 1 つの最適操作 v^* が Ω の境界上に存在することが知られる.

定理 2. 操作 $\hat{v} \in \Omega$ が $\hat{v}$ の近傍 $A(\hat{v}) \subset \Omega$ で, 任意の操作 $v \in A(\hat{v})$ に対して,

$$F_N(\alpha, \hat{v}) \leq F_N(\alpha, v), \quad \hat{v}, v \in A(\hat{v}) \quad \dots\dots (23)$$

を満足するならば, 操作 $\hat{v}$ は Ω における最適操作 v^* である.

[証明] $\hat{v} \neq v^*$ と仮定する. このとき (12) 式から $F_N(\alpha, v^*) < F_N(\alpha, \hat{v})$, $v^*, \hat{v} \in \Omega$, が満足されなければならない. Ω が凸集合であることから, $\hat{v}$ と v^* とを結ぶ線分上の任意の操作 $v^1 = (1-\theta)\hat{v} + \theta v^*$, $0 \leq \theta \leq 1$, は Ω に属する. Ω は実数空間であるから 0 ではないがきわめて小さな θ の値を η で表わせば, 操作 $v^1 = (1-\eta)\hat{v} + \eta v^*$, $\eta \geq 0$, を $\hat{v}$ の近傍 $A(\hat{v})$ に属するようにすることができる.

$$\begin{aligned} F_N(\alpha, v) \text{ の凸性から,} \\ F_N(\alpha, v^1) &= F_N(\alpha, (1-\eta)\hat{v} + \eta v^*) \\ &\leq (1-\eta)F_N(\alpha, \hat{v}) + \eta F_N(\alpha, v^*) \\ &= F_N(\alpha, \hat{v}) - \eta[F_N(\alpha, \hat{v}) - F_N(\alpha, v^*)] \\ &< F_N(\alpha, \hat{v}), \end{aligned}$$

が成立する. しかるに $\hat{v}, v^1 \in A(\hat{v})$ であるから $\hat{v}$ が (23) 式を満足するという仮定に反する. よって $\hat{v} = v^*$ でなければならない. (証明終)

5. 写像こう配法の適用

さて, 前節まででその性質の明らかにされた最適操作 v^* を見出す方法を考える.

3章で示されたように、2章で与えられた問題を操作 v に関するノンリニア・プログラミングの問題として、つぎのように書きなおすことができる。

問題：任意に与えられた初期状態，正の整数をそれぞれ α, N とする。このとき、

$$F_N(\alpha, v) = \alpha(\alpha) + 2\psi'(\alpha)v + v'\Phi v \quad \dots\dots(24)$$

で与えられる関数 $F_N(\alpha, v)$ を，凸集合 Ω の任意の操作 v に対して、

$$F_N(\alpha, v^*) \leq F_N(\alpha, v), \quad v^*, v \in \Omega \quad \dots\dots(25)$$

とするような最適操作 v^* を見出せ。ただし (25) 式における $\alpha(\alpha), \psi(\alpha), \Phi$ は，(11) 式に与えられるものである。

この問題に J. B. Rosen の写像こう配法を適用する。写像こう配法においては、まず、適当な初期操作 $v^{(0)}$ を Ω の要素から選出し、これを出発点として最適操作 v^* を探索する手段がとられる。初期操作 $v^{(0)}$ の選定は、いまの場合 Ω が操作空間 $\mathcal{R}$ において、原点 $\mathbf{0}$ を含む立方体を形成することからきわめて容易である。以下、適当に $v^{(0)} \in \Omega$ が選定されたものとして議論をすすめる。

$v^{(1)} \in \Omega$ なる他の操作 $v^{(1)}$ に対して、 $F_N(\alpha, v^{(0)}) > F_N(\alpha, v^{(1)})$ が成立するならば、操作は少なくとも $v^{(0)}$ から $v^{(1)}$ への改善の余地があることになる。最適操作 v^* の探索方法は、このような改善された操作 $v^{(1)}$ を初期操作 $v^{(0)}$ から求め、つぎに $v^{(1)}$ を出発点としてよりよい改善を行なって $v^{(2)}$ を求め、以後順次に同様な改善をすすめて得られる操作 $v^{(3)}, v^{(4)}, \dots$ を最適操作 v^* に収束させることができるように構成されなければならない。初期操作 $v^{(0)}$ としては Ω の任意の要素を選ぶから、操作を $v^{(0)}$ から $v^{(1)}$ へ改善する方法を考察の対象に限定しても一般性は失われない。また、以下の議論において α および N は与えられているものとして固定して考え、 $F_N(\alpha, v)$ を $F(v)$ で表わす。

操作空間 $\mathcal{R}$ において立方体を形成する集合 Ω の境界面を含む $2N$ 個の超平面を $\mathcal{H}_i, i=1, 2, \dots, 2N$ とすれば、(8) 式によって

$$\mathcal{H}_i; \begin{cases} v_i = 0, & i=1, 2, \dots, N \\ v_{i-N} - 2 = 0, & i=N+1, N+2, \dots, 2N \end{cases} \quad \dots\dots(26)$$

と表わすことができる。 q 個の超平面

$$\mathcal{H}_{\nu_1}, \mathcal{H}_{\nu_2}, \dots, \mathcal{H}_{\nu_q}, \quad 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_q \leq 2N$$

の交わりを H で表わせば、明らかに H は $\mathcal{R}$ において $(N-q)$ 次元の多様体を形成する。

いま、操作空間 $\mathcal{R}$ における、初期操作 $v^{(0)}$ での $F(v)$ のこう配ベクトルを、

$$[\text{grad}_v F(v)]_{v=v^{(0)}} = g(v^{(0)}) \quad \dots\dots(27)$$

で表わす。操作 $v^{(0)}$ に改善の余地があるとすれば、 $v^{(1)}$ として、

$$v^{(1)} = v^{(0)} - \sigma g(v^{(0)}), \quad \sigma: \text{実数} \quad \dots\dots(28)$$

で与えられるものを選べば1つの改善方法として適当であろうという予測が成り立つ。しかし、 $v^{(1)} \in \Omega$ でなければならないことから、 $v^{(0)} \in H$ のとき、 $v^{(0)}$ に改善の余地がありながら (28) 式を満足する実数 σ が存在しない場合がある。この不都合を取り除くため、 $v^{(0)} \in H$ のとき、こう配 $g(v^{(0)})$ の H への写像ベクトル、すなわち写像こう配 $g_H(v^{(0)})$ を用いて操作の改善を行なおうとするのが、写像こう配法の基本原理である。

集合 Ω の境界面を含む超平面 $\mathcal{H}_i$ に対する単位法線ベクトルで、 Ω の内部に向かうものを n_i とすれば、集合 Ω は、

$$\Omega = \{v | N'v + c \geq 0\} \quad \dots\dots(29)$$

と表わすことができる。ただしここで、 $N = [n_1, n_2, \dots, n_{2N}]$ は単位法線ベクトル n_i を i 列目の列ベクトルとする $N \times 2N$ のマトリクス、 $c = \text{col}(0, 0, \dots, 0, 2, 2, \dots, 2)$ は最初の N 個の要素が0で、残る N 個の要素が2であるような $2N$ 次の列ベクトルである。

$\mathcal{R}$ の正規直交基底ベクトル $e_j, j=1, 2, \dots, N$ を用いれば、 n_i は

$$\begin{aligned} n_i &= e_i, & i=1, 2, \dots, N, \\ n_i &= -e_{i-N}, & i=N+1, N+2, \dots, 2N \end{aligned} \quad \dots\dots(30)$$

で与えられる。

q 個の1次独立なベクトル $n_{\nu_i}, i=1, 2, \dots, q$ は q 個の1次独立な超平面 $\mathcal{H}_{\nu_i}$ の組を規定する。 $N \times q$ マトリクス N_q を、 $N_q = [n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \dots, n_{\nu_q}]$ で定義すれば、 $n_{\nu_i}, i=1, 2, \dots, q$ は1次独立であるという仮定から、 $q \times q$ 対称マトリクス $N_q' N_q$ は正則であり、したがって逆マトリクス $(N_q' N_q)^{-1}$ が存在する。 $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \dots, n_{\nu_q}$ ではられる $\mathcal{R}$ の q 次元部分空間を $\tilde{H}$ とすれば、 $\mathcal{R} = H \oplus \tilde{H}$ 、すなわち $\mathcal{R}$ は H と $\tilde{H}$ との直和であり、 H は $\mathcal{R}$ の $(N-q)$ 次元部分空間になる。 $H \perp \tilde{H}$ 、すなわち H と $\tilde{H}$ とは互いに直交するから、 $w_1 \in H, w_2 \in \tilde{H}$ なる任意のベクトル w_1, w_2 に対して $w_1' w_2 = 0$ となる。

$N \times N$ 対称マトリクス $\tilde{P}_q$ をつぎのように定義する。

$$\tilde{P}_q = N_q (N_q' N_q)^{-1} N_q' \quad \dots\dots(31)$$

ただし、特別な場合として $q=0$ のとき、 $\tilde{P}_0 = \mathbf{0}$ となるものとする。(31) 式で定義されるマトリクス $\tilde{P}_q$ は $\mathcal{R}$ に属する任意のベクトルを q 次元部分空間 $\tilde{H}$ に写す写像マトリクスである。さらにこの $\tilde{P}_q$ を用いて

$N \times N$ マトリクス P_q をつぎのように定義する.

$$P_q = I - \tilde{P}_q = I - N_q(N_q'N_q)^{-1}N_q' \quad \dots\dots(32)$$

$I: N \times N$ 単位マトリクス

ただし, 特別な場合として $q=0$ のとき $P_q=I$ となるものとする. (32) 式で定義されるマトリクス P_q は, Ω の任意のベクトルを $(N-q)$ 次元部分空間 H に写す写像マトリクスである.

このように定義されたマトリクス N_q, P_q に対して, 最適操作の満足すべき条件を J. B. Rosen はつぎのように与えている.

定理 3. (J. B. Rosen): 操作 v^* が, 集合 Ω に属し, かつ q 個の境界面 $\mathcal{H}_{v_1}, \mathcal{H}_{v_2}, \dots, \mathcal{H}_{v_q}$, $1 \leq q \leq N$ の交わり H に属しているものとする. ただし, v^* が Ω の内部の操作であるとき, 特別な場合として $q=0$ が許されるものとする.

このとき, 操作 v^* が最適操作であるためには,

$$P_q g(v^*) = 0, \quad \dots\dots(33)$$

$$r^*(N_q'N_q)^{-1}N_q'g(v^*) \geq 0 \quad \dots\dots(34)$$

が同時に満足されることが必要十分である.

これらの条件は, 改善をすすめられて得られた操作 $v^{(j)}$ が最適操作であるかどうかを確かめるだけでなく, 以下に説明されるように操作を $v^{(j)}$ から $v^{(j+1)}$ へ改善するための指針をも与えている.

いま, 初期操作 $v^{(0)}$ として, 集合 Ω に属し, かつ q 個の境界面 $\mathcal{H}_{v_1}, \mathcal{H}_{v_2}, \dots, \mathcal{H}_{v_q}$ の交わり H に属するものが選ばれたものとする. $v^{(0)}$ に対して定理 3 の条件を確認するために,

$$g(v^{(0)}) = [\text{grad}_v F(v)]_{v=v^{(0)}} = 2\phi + 2\Phi v^{(0)} \quad \dots\dots(35)$$

として $g(v^{(0)})$ を求め, これを (33), (34) 式に適用する. その結果として $v^{(0)}$ には改善の余地があることが知られたとする. この結果をつぎのような 2 つの場合にわけて考える.

(i) (35) 式の $g(v^{(0)})$ に対して (34) 式が満足されない場合.

(34) 式で $g(v^*)$ の代わりに $g(v^{(0)})$ を代入したものを $r^{(0)}$ とする. q 次のベクトル $r^{(0)}$ の成分のうち第 q 番目の成分だけが負の値をとったとしても一般性は失われない. このときマトリクス N_q から q 列目の列ベクトル n_{v_q} を取り除き, $N \times (q-1)$ マトリクス N_{q-1} , および $N \times N$ マトリクス P_{q-1} をつぎのようにつくる.

$$\left. \begin{aligned} N_{q-1} &= [n_{v_1}, n_{v_2}, \dots, n_{v_{q-1}}] \\ P_{q-1} &= I - N_{q-1}(N_{q-1}'N_{q-1})^{-1}N_{q-1}' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(36)$$

$(q-1)$ 個の境界面 $\mathcal{H}_{v_1}, \mathcal{H}_{v_2}, \dots, \mathcal{H}_{v_{q-1}}$ の交わりを H とし, $g(v^{(0)})$ の H への写像ベクトル方向の単位ベクトル z_0 を,

$$z_0 = -\frac{P_{q-1}g(v^{(0)})}{\|P_{q-1}g(v^{(0)})\|} \quad \dots\dots(37)$$

で与える. この場合の意味するところは, $v^{(0)}$ が Ω の境界上で, しかも q 個の境界面 $\mathcal{H}_{v_1}, \mathcal{H}_{v_2}, \dots, \mathcal{H}_{v_q}$ に属しているが, $v^{(0)}$ の改善として $(q-1)$ 個の法線ベクトル $n_{v_1}, n_{v_2}, \dots, n_{v_{q-1}}$ 方向に対して許されず, 残る $(N-q+1)$ 個の法線ベクトル方向への改善が可能であるということである. $r^{(0)}$ の成分のうちで負の値をとるものが q 成分以外のものである場合, またそのような成分が複数個存在する場合についても全く同様である.

(ii) (35) 式の $g(v^{(0)})$ に対して (34) 式が満足され, (33) 式が満足されない場合.

$r^{(0)} \geq 0$, $\|P_q g(v^{(0)})\| > 0$ とする. このとき q 個の境界面 $\mathcal{H}_{v_1}, \mathcal{H}_{v_2}, \dots, \mathcal{H}_{v_q}$ の交わりを H とし, $g(v^{(0)})$ の H への写像ベクトル方向の単位ベクトル z_0 を,

$$z_0 = -\frac{P_q g(v^{(0)})}{\|P_q g(v^{(0)})\|} \quad \dots\dots(38)$$

で与える. この場合は, $v^{(0)}$ の改善の方向として, q 個の法線ベクトル $n_{v_1}, n_{v_2}, \dots, n_{v_q}$ 方向すべてに許されず, 残る $(N-q)$ 個の法線ベクトル方向にのみ改善が可能であることを意味する. ここで $v^{(0)}$ が Ω の内部操作として選ばれたとき, 特別な場合として $q=0$ を許すものとすれば, $P_0 g(v^{(0)}) = g(v^{(0)}) = 0$ でないかぎり (38) 式で与えられる z_0 は定まり, $g(v^{(0)}) = 0$ のときは $v^{(0)}$ が最適操作でなければならず, 以下の議論は $v^{(0)}$ が Ω の任意の操作である場合に対して成立する.

さて, 以上のことから (28) 式で考えたような, 改善された操作 $v^{(1)}$ の形としては, (37) 式または (38) 式で与えられる単位ベクトル z_0 を用いて,

$$v^{(1)} = v^{(0)} + \tau z_0, \quad \tau: \text{実数} \quad \dots\dots(39)$$

なる形のものを考えればよいことが知られる. $v^{(1)} \in \Omega$ でなければならないことから, 実数 τ は, (41) 式で定められる τ_m を越えない正の実数にとらなければならない.

$v^{(0)} \in H$ かつ $v^{(0)} \in \Omega$ なる仮定から,

$$n_{v_i}'v^{(0)} + c_{v_i} > 0, \quad i = q+1, q+2, \dots, 2N$$

が成立する. ここで c_{v_i} は (29) 式で定義される $2N$ 次のベクトル c の v_i 成分である. したがって, $(2N-q)$ 個の境界面 $\mathcal{H}_{v_{q+1}}, \mathcal{H}_{v_{q+2}}, \dots, \mathcal{H}_{v_{2N}}$ のおののに対して, $n_{v_i}'v^{(1)} + c_{v_i} = n_{v_i}'(v^{(0)} + \tau v_0) + c_{v_i} = 0$, すなわち,

$$\tau_{v_i} = -\frac{n_{v_i}'v^{(0)} + c_{v_i}}{z_0'n_{v_i}}, \quad i = q+1, q+2, \dots, 2N \quad \dots\dots(40)$$

となる τ_{v_i} が存在する. $|\tau_{v_i}|$ は z_0 方向にとった $v^{(0)}$ から $\mathcal{H}_{v_i}$, $i = q+1, q+2, \dots, 2N$ までの距離を表わし

ており、 $|\tau_{\nu_i}|$ が ν_i の値によっては無限大となるものも存在しうるが、他方 Ω が有界な閉集合であることから、 τ_{ν_i} を有限な正の実数とする ν_i が少なくとも 1 つは存在する。正の実数値をとる τ_{ν_i} の組から最小なものを選び出し、これを τ_m とする。

$$\tau_m = \min_{q+1 \leq i \leq 2N} \{\tau_{\nu_i} > 0\} \quad \dots\dots(41)$$

τ_m は Ω の中で、 $v^{(0)}$ から z_0 方向に動かしようる最大の距離を表わすから、(39) 式における τ として、 $0 < \tau \leq \tau_m$ となるものを選べば、 $v^{(1)} \in \Omega$ が保証される。

つぎに、(39) 式で与えられる $v^{(1)}$ が $F(v^{(1)}) < F(v^{(0)})$ を実現する、すなわち改善された操作であるように τ を定めなければならない。

$F(v)$ を書きなおせば、

$$F(v^{(1)}) = F(v^{(0)}) + (v^{(1)} - v^{(0)})' g(v^{(0)}) + (v^{(1)} - v^{(0)})' \Phi(v^{(1)} - v^{(0)}) \quad \dots\dots(42)$$

なる関係が得られる。 Φ は準正値対称マトリクスであるから、 $v^{(1)}, v^{(0)} \in \Omega$ に対して、

$$(v^{(1)} - v^{(0)})' \Phi(v^{(1)} - v^{(0)}) \geq 0 \quad \dots\dots(43)$$

である。他方 Ω は凸有界閉集合であるから、

$$\chi \|v^{(1)} - v^{(0)}\|^2 \geq (v^{(1)} - v^{(0)})' \Phi(v^{(1)} - v^{(0)}) \quad \dots\dots(44)$$

を満足する有限な正の実数 χ が存在する。(42), (43), (44) 式から、

$$(v^{(1)} - v^{(0)})' g(v^{(0)}) + \chi \|v^{(1)} - v^{(0)}\|^2 \geq F(v^{(1)}) - F(v^{(0)}) \geq (v^{(1)} - v^{(0)})' g(v^{(0)}) \quad \dots\dots(45)$$

(39) 式を用いて書きなおせば

$$\tau z_0' g(v^{(0)}) + \chi \tau^2 \geq F(v^{(1)}) - F(v^{(0)}) \geq \tau z_0' g(v^{(0)})$$

しかるに (37), (38) 式から、

$$z_0' g(v^{(0)}) = -\frac{g(v^{(0)})' P_q g(v^{(0)})}{\|P_q g(v^{(0)})\|} = -\|P_q g(v^{(0)})\| \leq 0$$

または、

$$z_0' g(v^{(0)}) = -\frac{g'(v^{(0)}) P_{q-1} g(v^{(0)})}{\|P_{q-1} g(v^{(0)})\|} = -\|P_{q-1} g(v^{(0)})\| \leq 0$$

したがって、 $\beta = |z_0' g(v^{(0)})|$ とおくと、

$$\tau[-\beta + \chi \tau] \geq F(v^{(1)}) - F(v^{(0)}) \quad \dots\dots(46)$$

なる関係が得られる。ここで、

$$\tau = \min\{\tau_m, \beta/2\chi\} \quad \dots\dots(47)$$

と選べば、(39) 式で与えられる $v^{(1)}$ は Ω に属し、かつ、 $0 > -(1/2)\tau\beta \geq F(v^{(1)}) - F(v^{(0)})$ 、すなわち $F(v^{(1)}) < F(v^{(0)})$ を満足するものであることが知られる。

実際に (39), (47) 式を用いて $v^{(1)}$ を求める場合、 χ の性質から明らかのように、これがもっともよい改善方法であるとは限らない。

よりすぐれた改善としては、 $F(v_0 + \tau z_0)$ 、 $0 < \tau \leq \tau_m$

を最小にする τ の値が必要である。

このような τ に対する改善された操作 $v^{(1)}$ は、つぎのようにして求めることができる。

$\tau = \tau_m$ のときの $v^{(1)}$ を $\tilde{v}^{(1)}$ で表わせば、 $\tilde{v}^{(1)}$ は Ω の境界上にあることは明らかである。 $v^{(0)}$ と $\tilde{v}^{(1)}$ とを結ぶ線分上の操作として $v^{(1)}$ を表わせば、

$$v^{(1)} = \rho \tilde{v}^{(1)} + (1 - \rho)v^{(0)}, \quad 0 < \rho \leq 1 \quad \dots\dots(48)$$

となり、この ρ はつぎのようにして決定される。 $v^{(0)}$ 、 $\tilde{v}^{(1)} \in \Omega$ を結ぶ線分はベクトル z_0 に平行で、 $g(v)$ はこの線分に沿って連続である。もし、 $z_0' g(v^{(0)}) < 0$ 、かつ $z_0' g(\tilde{v}^{(1)}) \leq 0$ ならば $v^{(1)} = \tilde{v}^{(1)}$ とする。また $z_0' g(v^{(0)}) < 0$ でしか $z_0' g(\tilde{v}^{(1)}) > 0$ ならば、 $v^{(0)}$ と $\tilde{v}^{(1)}$ とを結ぶ線分上で $F(v^{(1)}) = 0$ とする操作 $v^{(1)}$ が存在する。このとき $F(v^{(1)})$ はこの線分上の任意の操作 v に対して、 $F(v^{(1)}) < F(v)$ である。この $v^{(1)}$ は、 $z_0' g(v^{(1)}) = 0$ から、

$$\rho = \frac{z_0' g(v^{(0)})}{z_0' g(v^{(0)}) - z_0' g(\tilde{v}^{(1)})}, \quad 0 < \rho \leq 1 \quad \dots\dots(49)$$

なる ρ に対して、(48) 式で与えられる操作である。

以上で、適当に選ばれた Ω の操作 $v^{(0)}$ から出発し、改善された操作 $v^{(1)}$ を見出す方法が明らかにされた。以下同様にこの方法を繰り返し適用して、改善のすめられた操作 $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$ を得ることができる。

ここに示された手順の収束性に関して、つぎの結論を得る。

定理 4. 任意の初期操作 $v^{(0)} \in \Omega$ を与え、上述の手順で操作列 $\{v^{(j)}\}$ 、 $j=0, 1, 2, \dots$ が得られたものとする。このとき、操作列 $\{v^{(j)}\}$ 、 $j=0, 1, 2, \dots$ に対応する非増加関数列 $\{F(v^{(j)})\}$ が存在して、その極限値は $\min_{v \in \Omega} F(v) = F(v^*)$ である。

[証明] $\{F(v^{(j)})\}$ が非増加関数列であることは、

$$0 \geq -\frac{1}{2} \tau_j \beta_j \geq F(v^{(j+1)}) - F(v^{(j)}), \quad j=0, 1, 2, \dots \quad \dots\dots(50)$$

なる関係から明らかである。ここで、 τ_j, β_j は

$$\left. \begin{aligned} \tau_j &= \min\{\tau_{m,j}, \beta_j/2\chi_j\} \\ \beta_j &= \|P_q g(v^{(j)})\| \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(51)$$

で与えられる実数である。(51) 式の P_q は、 $r(v^{(j)})$ が負の成分をもつ場合には、5章の (i) で示したような方法で負の成分に対応する超平面を取り除いて $r(v^{(j)}) \geq 0$ が満足されるように構成しなおされた写像マトリクスを一般的に表わしているものとする。したがって、 $r(v^{(j)}) \geq 0$ と考えてよい。いま、前述の計算手順をくり返し、 $(k+1)$ ステップで、

$$F(v^{(k+1)}) = F(v^{(k)})$$

が得られたものと仮定する。このとき (50) 式から、 $\tau_k = 0$ 、または $\beta_k = 0$ が満足されなければならない。

$\tau_{m,k} \geq 0$ であるから (51) 式により, $\beta_k = 0$ のときつねに $\tau_k = 0$ である.

まず $\beta_k = 0$ と仮定すれば, $P_q g(v^{(k)}) = 0$ となり定理 3 の条件から $v^{(k)} = v^*$ でなければならない.

つぎに $\beta_k \neq 0, \tau_k = 0$ とすれば, (51) 式から $\tau_{m,k} = 0$ となる. $\beta_k = \|P_q g(v^{(k)})\| \neq 0$ なる仮定から $P_q \neq 0$ である. (37) 式または (38) 式により $z_k \neq 0$ となり, Ω が有界閉集合であるところから $\tau_{m,k} > 0$ が少なくとも 1 つは存在しなければならない. また $q = N$ のとき $\beta_k \neq 0$ の場合も同様である. $q = N$ で $\tau_{m,k} = 0$ となるのは, $P_q = 0$, すなわち $v^{(k)}$ が Ω の頂点の 1 つに存在し, しかもあらゆる方向への改善が許されない場合に限られる. $P_q = 0$ のとき $\beta_k = 0$ とならねばならず, $\beta_k = 0$ で $\tau_k = 0$ なる場合は起こり得ない.

また手順のくり返しが無制限回数が必要とする場合には, $F(v^{(j)})$ は下に有界で, j に対して非増加関数列をつくることから $j \rightarrow \infty$ において収束することは明らかである. k が有限である場合と同様にして, $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ から, 定理 3 により $v^{(\infty)} = v^*$ が知られる. (証明終)

6. 最適操作の計算過程

前節で示された写像こう配法による最適操作の探索方法を, 実際の計算過程として実現するために, 演算および判定の手順を整理する.

なお, この手順においては, Ω が正規直交基底ベクトル $e_1, e_2, \dots, e_N$ ではられる操作空間 $\mathcal{R}$ において立方体を形成するという事実から, 写像マトリクスのすべての要素が 0 または 1 の値となり, 計算がきわめて容易である. とくに, $q \times q$ マトリクス $(N_q' N_q)^{-1}$ は I となり, 以下の手順では省略されている.

[最適操作の計算過程]

- 1) 初期操作として任意の操作 $v^{(0)} \in \Omega$ を仮定する.
- 2) $g(v^{(0)}) = [\text{grad}_v F(v)]_{v=v^{(0)}} = 2\phi + 2\Phi v^{(0)}$ を求める.
- 3) Ω の境界を含む超平面のうち, $n_{\nu_i}' v^{(0)} + c_{\nu_i} = 0$ を満足するすべての超平面 $\mathcal{H}_{\nu_1}, \mathcal{H}_{\nu_2}, \dots, \mathcal{H}_{\nu_q}$ を選び出す.
 $N_q = [n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \dots, n_{\nu_q}]$ を構成する.
 このような $\mathcal{H}_{\nu_i}$, $i = 1, 2, \dots, q$ が存在しないとき, $q = 0$ としてつぎへすすむ.
- 4) $P_q = I - N_q N_q'$ を求める. とくに $q = 0$ のとき, $P_0 = I$ として 6) へすすむ.
- 5) $r = N_q' g(v^{(0)})$ を求め, つぎの判定を行なう.
 - (i) r の成分がすべて正または 0 ならば, 6) へすすむ.
 - (ii) r の成分のうち少なくとも 1 つが負ならば,

7) へすすむ. たとえば, $r_j < 0, r_q < 0$ と仮定する.

- 6) $P_q g(v^{(0)})$ および $\|P_q g(v^{(0)})\|$ を求める. つぎの判定を行なう.

(i) $\|P_q g(v^{(0)})\| > 0$ のとき, 8) へすすむ.

(ii) $\|P_q g(v^{(0)})\| = 0$ のとき, 計算を停止する. $v^{(0)}$ を最適操作 v^* として採用する.

- 7) $N_{q-2} = [n_{\nu_1}, \dots, n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_{j+1}}, \dots, n_{\nu_{q-1}}]$ および $P_{q-2} = I - N_{q-2} N_{q-2}'$ を作る. この P_{q-2} を用いて $P_{q-2} g(v^{(0)})$ を求める. (つねに, $\|P_{q-2} g(v^{(0)})\| > 0$ なることに注意する.)

- 8) z_0 を (37) 式または (38) 式にならって求める.

- 9) (40) 式から τ_{ν_i} , $i = q+1, q+2, \dots, 2N$ を求める. $\tau_m = \min_{q+1 \leq i \leq 2N} \{\tau_{\nu_i} > 0\}$ を選び出す.

- 10) $\tilde{v}^{(1)} = v^{(0)} + \tau_m z_0$ を求める. $g(\tilde{v}^{(1)})$ を計算する.

- 11) $z_0' g(\tilde{v}^{(1)})$ を求める. つぎの判定を行なう.

(i) $z_0' g(\tilde{v}^{(1)}) \leq 0$ ならば, $v^{(1)} = \tilde{v}^{(1)}$ として, 2) へ戻る.

(ii) $z_0' g(\tilde{v}^{(1)}) > 0$ ならば, 12) へすすむ.

- 12) (49) 式によって ρ を求める.

$$v^{(1)} = \rho \tilde{v}^{(1)} + (1 - \rho) v^{(0)}$$

として 2) に戻る.

7. 例 題

前章で示された最適操作の計算過程を, つぎのような 2 次伝達関数で表わされる制御対象の最適制御系の設計の手段として適用する.

このときの制御装置をディジタル計算機で構成し, 最適解の探索結果を示す.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$

この制御対象を Fig. 2 のように構成し, 状態変数 x^1, x^2 を図示のように定め, サンプルング周期 $T = 1$ とする.

状態転移方程式 $x_{k+1} = Gx_k + hu_k$ において, G, h はつぎのように計算される.

$$G = \begin{bmatrix} 0.6187 & 0.6334 \\ -0.6334 & 0.2387 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0.3812 \\ 0.6334 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 Block-diagram of the plant and definition of the state variable x^1, x^2 in the example

ここで問題として、 $N=4$, $\alpha=\text{col}(-4.0, 3.0)$ を与えるとき、つぎの関数 $F_4(\alpha, v)$ を最小にする最適操作 v^* を見出すことを考える。

$$F_4(\alpha, v) = \alpha(\alpha) + 2\phi'(\alpha)v + v'\Phi v,$$

ここで、

$$\alpha(\alpha) = 1.7552,$$

$$\phi'(\alpha) = (0.3964 \quad 0.2385 \quad -0.3487 \quad -0.9792),$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.1030 & 0.1135 & -0.0102 & -0.2228 \\ 0.1135 & 0.2943 & 0.2351 & -0.1409 \\ -0.0102 & 0.2531 & 0.4141 & 0.1857 \\ -0.2228 & -0.1409 & 0.1857 & 0.5466 \end{pmatrix}$$

こう配ベクトルは、 $g(\alpha, v) = 2\phi'(\alpha) + 2\Phi v$ で与えられる。

以上の予備計算のもとに、制御装置としての解の計算過程をデジタル計算機 (FACOM-231) 上に構成して計算を行なった結果をつぎに示す。

初期操作 $v^{(0)}$ をつぎのように選ぶとき、改善された操作 $v^{(1)}$ を得るまでの過程を、前章の手順に沿っておこなった結果を例示しておく。

$$v^{(0)} = \text{col}(1.4562 \quad 0.0871 \quad 0.0000 \quad 0.0000)$$

$$g(v^{(0)}) = \text{col}(1.1126 \quad 0.8589 \quad -0.6830 \quad -2.6318)$$

$v^{(0)} \in \Omega$ は、 $\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ 上にあるから、

$$N_2' = [n_3, n_4]' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

として、

$$r_1 = n_3'g(v^{(0)}) = -0.6830 < 0,$$

$$r_2 = n_4'g(v^{(0)}) = -2.6318 < 0,$$

したがって、 $q=0$ とすれば、 $P_0 = I$

$$P_0 g(v^{(0)}) = \text{col}(1.1126 \quad 0.8589 \quad -0.6830 \quad -2.6318)$$

$$\|P_0 g(v^{(0)})\| = 3.0608.$$

このことから操作の改善の方向は、つぎの単位ベクトル z_0 で与えられる。

$$z_0 = \text{col}(-0.3635 \quad -0.2806 \quad 0.2231 \quad 0.8598),$$

$$\tau_1 = 4.0061, \quad \tau_2 = 0.3104, \quad \tau_7 = 8.9646, \quad \tau_8 = 2.3261,$$

$$\tau_m = \tau_2 = 0.3104.$$

この τ_m を用いて計算をすすめれば、

$$\tilde{v}^{(1)} = \text{col}(1.3434 \quad 0.0000 \quad 0.0693 \quad 0.2669),$$

$$g(\tilde{v}^{(1)}) = \text{col}(0.9492 \quad 0.7419 \quad -0.5683 \quad -2.2395),$$

$$z_0'g(\tilde{v}^{(1)}) = -2.6055 < 0.$$

したがって、 $v^{(1)} = \tilde{v}^{(1)}$, $g(v^{(1)}) = g(\tilde{v}^{(1)})$.

以上で、改善された操作 $v^{(1)}$ が得られた。

以下、 $v^{(1)}$ を新しい出発点として、同様な計算過程を繰り返し適用する。操作列 $\{v^{(j)}\}$ を $j=11$ まで求めた結果、およびこの $v^{(j)}$ によって得られる評価関数 $F_4(\alpha, v^{(j)})$ を Table 1 に示す。

以上の結果にもとづいて、 $v^{(11)} = v^*$ としてとれば、本来の問題の解としての最適操作信号列 $\{u_k^*\}_{k=0}^8$ は、

j	$v^{(j)}$				$F_4(\alpha, v^{(j)})$
0	1.4562	0.0671	0.0000	0.0000	3.2006
1	1.3434	0.0000	0.0693	0.2669	2.3213
2	0.6703	0.0000	0.4732	1.8551	0.1089
3	0.5501	0.0000	0.0000	1.9238	0.0062
4	0.5130	0.0000	0.0000	2.0000	0.0020
5	0.5122	0.0000	0.0000	2.0000	0.0014
6	0.4777	0.0000	0.0000	2.0000	0.0013603
7	0.4777	0.0000	0.0000	1.9862	0.0011542
8	0.4481	0.0000	0.0000	1.9862	0.0010488
9	0.4481	0.0000	0.0000	1.9741	0.0009978
10	0.4219	0.0000	0.0000	1.9743	0.0008523
11	0.4219	0.0000	0.0000	1.9634	0.0008121

Table 1 Results of the control $v^{(j)}$, and its corresponding functional $F_4(\alpha, v^{(j)})$

Fig. 3 The trajectories corresponding to the controls at the j -th iteration

$$u_0^* = -0.5781, \quad u_1^* = -1.0000$$

$$u_2^* = -1.0000, \quad u_3^* = 0.9634$$

が得られる。 $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(5)}$ および $v^{(11)} = v^*$ の操作による状態 x_k の軌跡を、Fig. 3 に示す。

8. 結 言

本論文では、サンプル値最適制御系の設計の一例として、操作信号が飽和拘束をうけ、評価関数が非線形な形で与えられる場合の最適化問題を考察した。この問題をノンリニア・プログラミングの問題として、写像こう配法を適用して解くことを考え、最適解の計算過程を明らかにした。ここで示された計算過程は2次形伝達関数をもつ制御対象の制御問題に適用され、計算の手間および収束の速さの面から満足できる結果を得ることができた。

この方法では、評価関数としては、連続かつ2次微

分可能な凸関数であればよく、より一般的な評価関数をもつ問題へも容易に拡張できるものと考えている。

終わりにあたり、懇切なご討論をいただきました大阪大学工学部児玉慎三講師に感謝いたします。また、講演に際し有益なご討論をいただきました京都大学坂和愛幸助教授、早稲田大学示村悦二郎講師に感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) Y. C. Ho and P. B. Brentani : On Computing Optimal Control with Inequality Constraints. Symposium on Multivariable Control Systems. 1962. J. A. C. C.
- (2) G. B. Dantzig : Linear Programming and Extensions. Ch. 24., pp. 471~498. Princeton Univ. Pres, 1963
- (3) J. B. Rosen : The Gradient Projection Method., Part 1. Linear Constraints, J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 8, No. 1, pp. 181~217. March, 1960
- (4) C. A. Desoer and J. Wing : The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems : General Theory : J. Frank. Inst. Vol. 272, No. 3, pp. 208~228. Sept. 1961
- (5) R. E. Kalman : General Synthesis Procedure for Computer Control of Single-Loop and Multi-Loop Linear Systems. A.I.E.E. Trans., Part. 2. pp. 602~609. Jan. 1959
- (6) 熊谷三郎, 長田朗 : 飽和のあるサンプル値制御系の最適制御. 制御工学 Vol. 7, No. 4, 1963
- (7) 熊谷三郎, 長田朗, 松村雅司 : 画像勾配法によるサンプル値制御系の最適化プログラミング. 制御工学 1965 (予定)

討 論

[示村悦二郎*] この論文で扱われたいわゆる Fixed time problem は、最大原理のような変分計算によっても比較的解きやすい種類の問題だと思いますが、いずれにしても境界値問題になってしまうことには変わりありません。それに対して、変分計算によらず、操作空間を導入してプログラミングの形に持ち込まれた点にたいへん興味を感じました。連続制御系の最適制御に対して辻三郎氏が、制御 $u(t)$ によってつくられる Hilbert 空間において最急降下法を適用する方法をのべておられます⁽¹⁾が、貴論文の趣旨も帰するところは同じで、最適制御論のひとつの方向を示すものと考えます。

* 早稲田大学理工学部

(注) 第 3 回計測自動制御学会学術講演会(1964)の際の発表論文には、証明の部分は省略されていた。

** 京都大学工学部電気工学教室

第 5 章で、操作列 $\{u_j\}$ のつくり方を示され、その収束は容易に確かめられるとされていますが、収束の条件をもう少し詳しく述べていただきたいと思います。また、あとがきの中で、もっと一般的な評価関数を扱う可能性をのべておられますが、たとえば、 u を explicit に含む評価関数を扱った場合、どの程度手順が変わってくるのでしょうか。

文 献

- (1) S. Tsuji and N. Sugie : Process Optimization in a Hilbert Space I. Free End Problem ; Bulletin of Electrotechnical Laboratory, Vol. 28, No. 1, 20/28, 1964

[筆 者]

1. ここでは制御動作の完了までの期間を有限ステップ数 N で与えておりますところから操作空間は N 次元のユークリッド空間となりますが、連続系の近似計算などに拡張する場合、ヒルベルト空間としての考えが必要になり、ご指摘のように辻氏の概念と同じものになると思われます。

2. 操作列 $\{u^{(j)}\}$ の収束性につきましては、5 章のように示されますが^(注)、その条件としましては、評価関数 $F_N(\alpha, v)$ が操作 v に関して凸で下に有界、連続で 2 次微分可能であること、および許容操作領域 Ω が部分的に連続な境界をもつ凸閉集合であること、があげられます。本論文の問題では、 Ω に対する条件が満足されていることは (2) 式の拘束条件から明らかで、(11) 式の形で与えられる $F_N(\alpha, v)$ に対する条件は、マトリクス Q の正値性、操作空間 $\mathcal{R}$ が実数空間であることを仮定することによって満足することができます。

3. 評価関数としましては上に述べた条件を満足すればよいわけで、(3) 式の形である必要はありません。操作信号 $u_k, k=0, 1, \dots, N-1$ を explicit に含む評価関数に対しましては最適操作探索の手順には変わりありません。この場合の一例としまして文献 (7) をご参照いただければ幸いです。

[坂和愛幸**] ここで取り扱われている問題は、quadratic programming の問題であると思います。Rosen の gradient projection 法は凸な一般の非線形関数に対して適用できますから quadratic function に対してとうぜん適用できますが、問題を quadratic form に限定しますと種々の algorithm があります。たとえば、Wolfe の線形計画法に帰着させる方法⁽¹⁾、Lemke の双対法⁽²⁾などは線形計画法と同様に有限回のくり返し計算で厳密解がえられますが、ここで論ぜられているような quadratic programming の問題に

対して、Rosen の一般的な方法を適用すると上記のような finite algorithm を適用すると計算はどちらが楽でしょうか。

文 献

- (1) P. Wolfe : The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica*, Vol. 27, pp. 382~398, 1959
- (2) C. E. Lemke : A Method of Solution for Quadratic Programs, *Management Science*, Vol. 8, No. 4, pp. 442~453, 1962

[筆 者]

ご指摘のように quadratic programming に関しましてはすでに種々の algorithm が考えられており、適用しようとする問題に対しましてそのいずれがより楽な計算でできるかは重要な問題点であると思われます。本論文における問題にこれらの手法を適用して実

際の計算手順の比較は行なっておりませんので具体的なデータの比較からではありませんがつぎのように考えられます。写像こう配法でもっとも複雑な計算を必要とする部分はつぎのステップにすすむとき、出発点となる操作 ν を含む境界面の法線ベクトルから写像マトリクスを求めることであります。しかしこの手順は、本論文におけますように許容操作領域 Ω が立方体で与えられる場合、きわめて簡単にすすむことができます。したがって、最適操作探索のための繰り返し手順はかなり簡単になり、しかも例題に示されておりますように収束もかなり速いといえます。ご指摘の finite algorithm としての手法で、多くの slack 変数などの助変数を導入するものに比べて、ステップのすすめ方で本論文における方法が有利であると考えます。さらに筆者らはより一般的な制御問題への適用の意図をもちまして写像こう配法をとりあげた次第です。